الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للإمتحانات و المسابقات

تصحيح مقترح لبكالوريا 2018 — شعبة : علوم تجريبية

التَصْحِيحْ المفصّل للبكالُوريَا الرَّسمية دَورة : جوان 2018 — الموضوع 02

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (المتتاليات العددية) — التنقيط

لدينا : (u_n) متتاليّة معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=1-\dfrac{9}{u_n+5} \end{cases}$

1) أ) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>-2$:--

أولا نضع الخاصية $P(n):u_n>-2$.

نتحقق من صحة الخاصية $P(n)$ من أجل $n=0$. لدينا : $u_0=1$ ، أي : $u_0>-2$ ، و منه الخاصية محققة .

* نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة أي : $u_n>-2$ ونتحقّق من صحّة $P(n+1)$ أي : $u_{n+1}>-2$:

لدينا حسب فرضا $u_n>-2$ ، أي : $u_n+5>3$ ، أي : $\dfrac{1}{u_n+5}<\dfrac{1}{3}$ ، أي : $-\dfrac{9}{u_n+5}>-3$ ، أي : $1-\dfrac{9}{u_n+5}>-2$

ومنه : $u_{n+1}>-2$ ، إذن : $P(n+1)$ محققة ، و أخيرا $P(n)$ محققة ، أي من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>-2$.

ب) بيان أنّ (u_n) متتالية متناقصة على $\mathbb{N}$ واستنتاج أنّها متقاربة : --

$$u_{n+1}-u_n=1-\frac{9}{u_n+5}-u_n=1-u_n-\frac{9}{u_n+5}=\frac{(1-u_n)(u_n+5)-9}{u_n+5}=\frac{-u_n^2-4u_n-4}{u_n+5}=\frac{-(u_n+2)^2}{u_n+5}<0 .$$

و منه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

بما أنّ : المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$:

أ) إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=\dfrac{1}{3}$ يطلب تعيين حدّها الأول :--

معناه : $v_{n+1}=v_n+\dfrac{1}{3}$ ، أي :

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+2}=\frac{1}{1-\dfrac{9}{u_n+5}+2}=\frac{1}{3-\dfrac{9}{u_n+5}}=\frac{1}{\dfrac{3u+15-9}{u_n+5}}=\frac{u_n+5}{3u_n+6}=\frac{1}{3}+\frac{3}{3u_n+6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}+v_n$$

إذن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=\dfrac{1}{3}$ ، ومنه : $v_0=\dfrac{1}{u_0+2}=\dfrac{1}{3}$.

3) التعبير عن v_n و u_n بدلالة n و حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:---

عبارة v_n بدلالة n : $v_n=v_0+nr$ ، أي : $v_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}n$ ، و منه : $v_n=\dfrac{1}{3}(n+1)$.

عبارة u_n بدلالة n : لدينا : $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$ ، أي : $v_n(u_n+2)=1$ ، أي : $v_nu_n=1-2v_n$ ، أي : $u_n=\dfrac{1}{v_n}-2$.

و منه : $u_n=\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}(n+1)}-2$.

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{3}(n+1)}-2\right)=-2$ ، لأنّ : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{3}(n+1)}\right)=0$.

4) بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_0u_0+v_1u_1+\ldots+v_nu_n=\frac{1}{3}\left(1-n^2\right)$: ----------------------------

لدينا مما سبق : $v_nu_n=1-2v_n$ ، أي : $v_0u_0+v_1u_1+\ldots+v_nu_n=(1-2v_0)+(1-2v_1)+\ldots+(1-2v_n)$.

نضع $S_n=v_0u_0+v_1u_1+\ldots+v_nu_n$: أي :

$S_n=(1-2v_0)+(1-2v_1)+\ldots+(1-2v_n)=1(n+1)-2(v_0+v_1+..+v_n)=(n+1)-2\left[\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)\right]$ ، أي :

$S_n==(n+1)-\left[n+1\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n\right)\right]=(n+1)\left[1-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}n\right]=(n+1)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}n\right)=\frac{1}{3}(n+1)(1-n)$ ، و منه :

$S_n=\frac{1}{3}\left(1-n^2\right)$ ، و هو المطلوب .

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (الإحتمالات)	التنقيط

السحب في آن واحد معناه : **توفيقة** . إذن الحالات الممكنة للسحب هي : $C_{10}^3=\frac{10!}{3!(10-3)!}=120$.

1) حساب $p(A)$ **و** $p(B)$ **:** --

$p(A)$ هو إحتمال سحب ثلاث كريات تحمل لون العلم الوطني ، أي : $P(A)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_3^1}{C_{10}^3}$ ، و منه : $P(A)=\frac{3}{10}$

$p(B)$ هو إحتمال سحب ثلاث كريات تحمل نفس الرقم ، أي : $P(B)=\frac{C_5^3+C_4^3}{C_{10}^3}$ ، و منه : $P(B)=\frac{7}{60}$.

ب) بيان أنّ : $p(A\cap B)=\frac{1}{20}$ ، **ثم استنتاج** $p_A(B)$ **وَ** $p(A\cup B)$: --

$p(A\cap B)$ هو إحتمال سحب ثلاث كريات تحمل لون العلم الوطني و تحمل نفس الرقم ، أي :

$P(A\cap B)=\frac{\left(C_2^1\times C_2^1\times C_1^1\right)+\left(C_1^1\times C_1^1\times C_2^1\right)}{C_{10}^3}=\frac{6}{120}$ ، و منه : $p(A\cap B)=\frac{1}{20}$ ، **و هو المطلوب .**

حساب الإحتمال الشرطي $p_A(B)$ **:** $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{20}\times\frac{10}{3}$ ، و منه : $p_A(B)=\frac{1}{6}$.

حساب $p(A\cup B)$ **:** $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{22}{60}$ ، أي : $p(A\cup B)=\frac{11}{60}$.

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا : --------------------

لدينا : $X\in\{0,1,2,3\}$.

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$	$\frac{C_5^1\times C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}$	$\frac{C_5^2\times C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}$	$\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}$

حساب الأمل الرياضي : $E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_iP_i=0\times\frac{10}{120}+1\times\frac{50}{120}+2\times\frac{50}{120}+3\times\frac{10}{120}=\frac{180}{120}$.

و منه : $E(X)=\frac{3}{2}$.

تصحيح التمرين الثالث (05 نقاط) (الأعداد المركبة) — التنقيط

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-\sqrt{3}z+1=0$: --

نحسب المميّز : $\Delta=b^2-4ac=\left(-\sqrt{3}\right)^2-4(1)(1)=-1=i^2$ ، و منه المعادلة تقبل حلان متمايزان هما :

$z_1=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ ، $z_2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

2) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي ، ثم تعيين قيم n : --

لدينا : $z_A=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، و منه : $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$. **لأنّ :** $|z_A|=1$ ، و $\arg(z_A)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$.

لدينا : $z_B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}$ ، و منه : $z_B=e^{i\frac{\pi}{6}}$. **لأنّ :** $|z_B|=1$ ، وَ $\arg(z_B)=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ **.**

تعيين قيم n حتى يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، أي : $\left(\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^n=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي : $\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي : $e^{i\frac{n\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ،

و منه : $\dfrac{n\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ، أي : $\dfrac{n}{6}=\dfrac{1+6k}{3}$ ، أي : $3n=6+36k$ ، و منه : $n=12k+2$.

3) أ)التحقّق أنّ : $\dfrac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و تحديد طبيعة المثلث OBC**:** ---

لدينا : $\dfrac{z_B}{z_C}=\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i-\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ وهو المطلوب .

لدينا : $\dfrac{z_B}{z_C}=\dfrac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي : $\dfrac{OB}{OC}=1$ ، وَ $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ، إذن المثلث OBC **متقايس الأضلاع** .

ب) إستنتاج أنّ B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة : --

لدينا : $\dfrac{z_B-z_O}{z_C-z_O}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، أي : $z_B-z_O=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C-z_O)$ ، و منه B هي صورة C بالدوران r الذي مركزه O

و زاويته : $\dfrac{\pi}{3}$ **.**

4) تعيين طبيعة المجموعة (γ) ثم تعيين صورتها بالدوران r : --

لدينا: $|z|=\left|\bar{z}-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$ ، أي : $|z|=|\bar{z}-z_B|$ ، أي : $|z|=\left|\overline{z-z_B}\right|$ ، أي : $|z-z_O|=|z-z_C|$ ، و منه : $OM=CM$.

إذن مجموعة النقط (γ) هي: **محور القطعة** $[OC]$ **.**

صورة (γ) بالدوران r : بما أنّ النقطة O هي مركز الدوران r فصورتها بواسطته هي O (نقطة صامدة) . وَ نعلم أنّ

صورة النقطة C بالدوران r هي النقطة B ، **و منه :** صورة (γ) بالدوران r هي (γ') **محور القطعة** $[OB]$ **.**

تصحيح التمرين الرابع (7نقاط) (الدالة الأسية) — التنقيط

الجزء الأول: لدينا : $g(x)=2+(x-1)e^{-x}$.

أ) حساب : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$: --

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2+(x-1)e^{-x}\right]=-\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2+(x-1)e^{-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2+\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right]=2$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.

ب) دراسة إتجاه تغيّر الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها : --

الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $g'(x)=e^{-x}(2-x)$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2+e^{-2}$	$\searrow$	2

ب) بيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α على $]-0,38;-0,37[$ ، ثم استنتاج إشارة $g(x)$: ------------

الدالة g مستمرة و رتيبة على $[-0,38;-0,37]$ و لدينا : $\begin{cases} g(-0,38)=-0,01 \\ g(-0,37)=0,01 \end{cases}$ ، أي : $g(-0,38)\times g(-0,37)<0$

و منه و حسب نظرية القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $-0,38<\alpha<-0,37$.

إذن : نجد إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ كما يلي :

لمّا $x\in]-\infty;\alpha[$ فإنّ $g(x)<0$ ، لمّا $x=\alpha$ فإنّ $g(x)=0$ ، ولمّا $x\in]\alpha;+\infty[$ فإنّ $g(x)>0$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني : لدينا $f(x)=2x+1-xe^{-x}$.

1) أ) حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$: ---.-------

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x+1-xe^{-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x+1-\frac{x}{e^{x}}\right]=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(2+\frac{1}{x}-e^{-x}\right)=+\infty$.

ب) حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)$ و تفسير النتيجة هندسيا : ---

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-xe^{-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{e^{x}}\right]=0$ ، و منه : المستقيم ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

ج) دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) وَ المستقيم (Δ) : --

ندرس إشارة الفرق : $\left[f(x)-(2x+1)\right]=-xe^{-x}$ ، ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$ لأنّ $e^{-x}>0$ ، أي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $\omega(0;2)$	(C_f) يقع تحت (Δ)	

2) بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$ واستنتاج إتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها : ------

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $f'(x)=2-e^{-x}+xe^{-x}=2+(x-1)e^{-x}=g(x)$.

و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

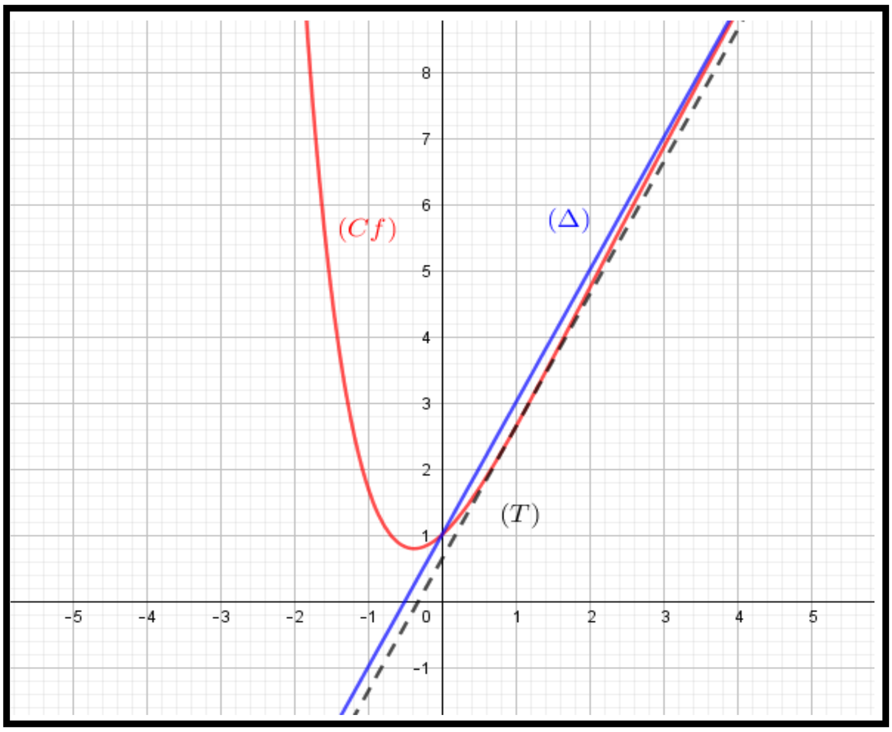
لمّا $x\in]\alpha;+\infty[$ فإنّ f متزايدة تماما ، ولما $x\in]-\infty;\alpha]$ فان f متناقصة تماما .

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 : ---------------------------------------

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، أي : و منه : $(T): y=2(x-1)+3-e^{-1}$ ، أي : $(T): y=2x+1-e^{-1}$.

4) رسم كلا من (T) و (Δ) و المنحنى (C) : ---



المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m : --

لدينا : $x=(1-m)e^{x}$ ، أي : $xe^{-x}=(1-m)$ ، أي : $-xe^{-x}=m-1$ ، أي : $2x+1-xe^{-x}=2x+1+m-1$

أي : $f(x)=2x+m$ ، إذن المناقشة **وسيطية مائلة** موازية لـ (T) و (Δ) .

و منه حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيما ت ذات المعادلة : $y=2x+m$.

* لمّا $m\in]-\infty;1-e^{-1}[$ ، ليس للمعادلة حلول . * لمّا $m=1-e^{-1}$ ، للمعادلة حل موجب .

* لمّا $m\in]1-e^{-1};1[$ ، للمعادلة حلان موجبان . * لمّا $m=1$ ، للمعادلة حل معدوم .

* لمّا $m\succ 1$ ، للمعادلة حل سالب .

6) تعيين الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$: ---

أخذنا : $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^{-x}\end{cases}$. $\int xe^{-x}dx=[-xe^{-x}]-\int -e^{-x}dx$ ، أي : $\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+c$.

و منه : $F(x)=-xe^{-x}-e^{-x}+c$ ، لدينا : $F(1)=0$ ، أي : $c=2e^{-1}$ ، و منه : $F(x)=-xe^{-x}-e^{-x}+2e^{-1}$

ب) حساب العدد A :---

$$A=\int_1^3 (y-f(x))\,dx=\int_1^3 xe^{-x}dx=F(3)-F(1)=-3e^{-3}-e^{-3}+2e^{-1}(u.a)$$.

<u>كتابة الأستاذ</u> : ب . لقمان .