التاريخ: 2014/09/14 **المستوى:** ثالثة علوم تجريبية **المـدة:** 05 ساعات

المجال التعليـــمـــي: التحليل.

الـوحدة التعليميـة (01): الدوال العددية.

مـوضـوع الدرس: النهايات

الوسـائل التعليميـة: السبورة ، الكتاب المدرسي، الآلة الحاسبة البيانية

الـمـراجـــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة:

- حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود(المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.
- دراسة السلوك التقاربي لدالة
- حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.

I. نشاط

II. نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي

1. نهاية منتهية عند عدد حقيقي

تعريف: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$ و l عدد حقيقي.

القول أن نهاية f عند x_0 هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0. نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى x_0.

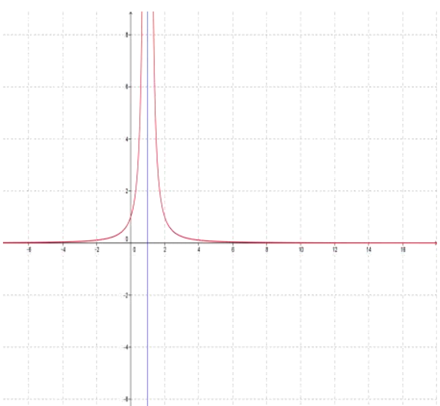
مثال: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1} x-1=-2$

2. نهاية غيرمنتهية عند عدد حقيقي

تعريف1: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$.

القول أن نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $[A;+\infty[$ $(A\in\mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0. نكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى x_0.

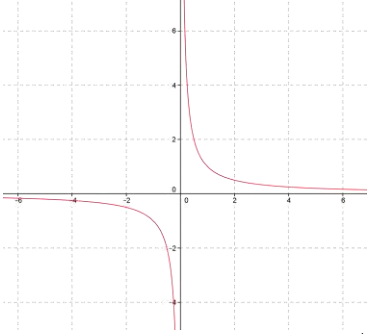


مثال1: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$

(C_f) التمثيل البياني لدالة f

يتضح جليا أن $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يقترب x من 2 بالقدر الكافي. لدينا هكذا $\lim\limits_{x\to2} f(x)=+\infty$

مثال2: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{x}$. نعتبر الدالتين f_1 و f_2 المعرفتين على الترتيب على $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ بـ $f_1(x)=f_2(x)=f(x)$



من الواضح أن $\lim_{x\to 0} f_1(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to 0} f_2(x) = +\infty$

نقول في هذه الحالة أن نهاية f عند 0 من اليسار هي $-\infty$

و أن نهاية f عند 0 من اليمين هي $+\infty$

و نكتب $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

تعريف2: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته: $x = a$. القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يعني أن نهاية الدالة f عند x_0 (من اليسار أو من اليمين) هي $+\infty$ أو $-\infty$.

III. نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

1. نهاية منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

تعريف: f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0;+\infty[$ و l عدد حقيقي.

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى $+\infty$.

نتيجة: نقول أن المستقيم ذا المعادلة $y = l$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

ملاحظة: نحصل على تعريف و نتيجة مماثلتين عند $-\infty$.

أمثلة: $* \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ $* \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ $* \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $* \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $* \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

2. نهاية غيرمنتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$

تعريف1: f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0;+\infty[$.

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ $(A \in \mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

تعريف2: f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0;+\infty[$.

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty;B[$ $(B \in \mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$.

ملاحظة: نحصل على تعريفين مماثلين عند $-\infty$.

أمثلة: $* \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $* \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ $* \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ $* \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ $* \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

3. المستقيم المقارب المائل

تعريف: ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$

القول أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \text{ (على الترتيب } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \text{)}$$

ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ فمن الواضح أن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$ أو $-\infty$.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=2x-3+\dfrac{1}{x^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ و منه فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x-3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f)

عند $+\infty$ و $-\infty$.

❖ تمارين

تمرين 1: لتكن f الدالة المعرفة على $]3;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$

أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

الحل: ليكن $I=]a;b[$ حيث $a<0<b$ (I مجال مفتوح يشمل 0).

من أجل x من $]3;+\infty[$ ، $f(x)\in I$ يعني $\dfrac{2}{x-3}<b$ أي $x>3+\dfrac{2}{b}$.

نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي(أكبر من $3+\dfrac{2}{b}$)، المجال I يشمل كل قيم $f(x)$. ومنه نهاية f عند $+\infty$ هي 0.

تمرين 2: لتكن f الدالة المعرفة على $[3;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{x-3}$

أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

الحل: ليكن A عددا حقيقيا موجبا.

$\sqrt{x-3}\geq A$ يعني $x\geq A^2+3$ ومنه المجال $[A;+\infty[$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

لدينا إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

تمرين 3: لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x-1-\dfrac{1}{x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

1. بين أن المستقيم $(D):y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.
2. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

طريقة: لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى $(D):y=ax+b$ ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-(ax+b)\right]$.

الحل: 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}=0$ و منه المستقيم $(D):y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

2. $\left[f(x)-(x-1)\right]=-\dfrac{1}{x}$ و منه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ،

$\left[f(x)-(x-1)\right]<0$. إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D).

تمرين 6: لتكن f الدالة المعرفة على $[-1;+\infty[$ بـ $f(x)=(x+1)^2-2$

نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما يؤول x إلى 1.

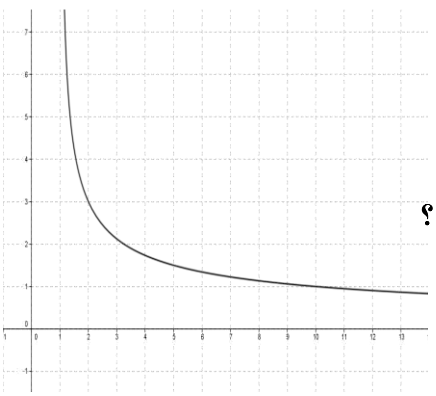
1. ضع تخمينا.
2. في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى المجال $[1,99;2,01]$ ؟
3. r عدد حقيقي حيث $0<r<1$.
   - في أي مجال يجب اختيار x بحيث $f(x)\in[2-r;2+r]$ ؟
   - ماذا تستنتج علما أنه يمكن اختيار r صغيرا بالقدر الذي نريد ؟

الحل:

1. يظهر أنه كلما اقترب x من 1 اقترب $f(x)$ من $(1+1)^2-2$ أي من العدد 2.
2. $1,99\leq f(x)\leq 2,01$ يعني $3,99\leq(x+1)^2\leq 4,01$. يمكن اختيار x بحيث $1,998\leq x+1\leq 2,002$ أي $0,998\leq x\leq 1,002$ و منه $x\in[0,998\,;\,1,002]$.
3. * $2-r\leq f(x)\leq 2+r$ يعني $4-r\leq(x+1)^2\leq 4+r$. يمكن اختيار x بحيث $\sqrt{4-r}\leq x+1\leq\sqrt{4+r}$ أي $-1+\sqrt{4-r}\leq x\leq -1+\sqrt{4+r}$ ومنه $x\in\left[-1+\sqrt{4-r}\,;\,-1+\sqrt{4+r}\right]$.

* يمكننا جعل $f(x)$ قريبا من 2 بالقدر الذي نريد بشرط أخذ x قريبا من 1 بالقدر الكافي و هذا يثبت أن نهاية الدالة f عند 1 هي 2.

تمرين 5: لتكن f الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.(انظر الشكل المقابل)



نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما يؤول x إلى 1.

1. من التمثيل البياني (C_f) ضع تخمينا بخصوص نهاية f عند 1.
2. A عدد حقيقي موجب تماما.
   - في أي مجال يجب اختيار x بحيث يكون $f(x)\geq A$ ؟
   - أثبت صحة التخمين الموضوع في السؤال 1.

الحل:

1. نخمن بأن نهاية الدالة f عند 1 هي $+\infty$.
2. $f(x)\geq A$ يعني $\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}\geq A$ أي $\sqrt{x-1}\leq\dfrac{3}{A}$

أي $x-1\leq\dfrac{9}{A^2}$ و أخيرا $x\leq 1+\dfrac{9}{A^2}$.

حتى يكون $f(x)\geq A$ نختار x في المجال $\left]1;1+\dfrac{9}{A^2}\right[$.

علما أنه يمكن أخذ A كبيرا بالقدر الذي نريد يمكننا جعل $f(x)$ كبيرا بالقدر الذي نريد بشرط أخذ x قريبا من 1 بالقدر الكافي و هذا يثبت أن نهاية الدالة f عند 1 هي $+\infty$.

IV. العمليات على النهايات

❖ بعض نهايات الدوال المرجعية

$* \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \quad * \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \quad * \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$* \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \quad * \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \quad * \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \quad * \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$* \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad * \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad * \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x} = +\infty \quad * \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x} = -\infty$

❖ f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

- **نهاية مجموع دالتين:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)+g(x)\right)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

- **نهاية جداء دالتين:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)\times g(x)\right)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

- **نهاية حاصل قسمة دالتين:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "**عدم التعيين**" (ح ع ت)

3. نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

قواعد إجرائية

- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).
- النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty$ ($-\infty$).

مثال: لتكن f الدالة الناطقة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ $f(x)=\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$

لدينا حالة عدم التعيين بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ إلا أنه بتطبيق القاعدة 2 نتحصل على

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

تمرين1: أدرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f المعرفة على D_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

1. $f(x)=-x^3+2x-2$ ، $D_f=\mathbb{R}$
2. $f(x)=3x^2+x-3$ ، $D_f=\mathbb{R}$
3. $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{2-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

الحل:

.1 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x^3)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$

.2 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(3x^2)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(3x^2)=+\infty$

.3 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

تمرين 2: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+x-2}$

1. حدد حسب قيم x إشارة x^2+x-2.
2. أدرس النهايات من اليمين و من اليسار عند كل من -2 و 1.
3. أدرس نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل:

1.لكثير الحدود x^2+x-2 جذران هما -2 و 1. و بتطبيق القاعدة المحددة لإشارة ثلاثي حدود من الدرجة 3 نجد:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		+	0	-	0	+	

.2 $\lim_{x\to-2}(2x+3)=-1$ ، $\lim_{x\to-2}(x^2+x-2)=0$ و بما أنه من أجل $x<-2$ ، $x^2+x-2>0$

فإن $\lim_{\substack{x\to-2\\<}} f(x)=-\infty$.

$\lim_{x\to-2}(2x+3)=-1$ ، $\lim_{x\to-2}(x^2+x-2)=0$ و بما أنه من أجل $-2<x<1$ ، $x^2+x-2<0$

فإن $\lim_{\substack{x\to-2\\>}} f(x)=+\infty$.

$\lim_{x\to1}(2x+3)=5$ ، $\lim_{x\to1}(x^2+x-2)=0$ و بما أنه من أجل $-2<x<1$ ، $x^2+x-2<0$

فإن $\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty$.

$\lim_{x\to1}(2x+3)=5$ ، $\lim_{x\to1}(x^2+x-2)=0$ و بما أنه من أجل $x>1$ ، $x^2+x-2>0$

فإن $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=+\infty$.

.3 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$

V. نهاية دالة مركبة-النهايات بالمقارنة

1. نهاية دالة مركبة

مبرهنة: a ، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f=v\circ u$.

إذا كانت $\lim_{x\to a} u(x)=b$ و إذا كانت $\lim_{x\to b} v(x)=c$ فإن $\lim_{x\to a} f(x)=c$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)$ و نريد حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

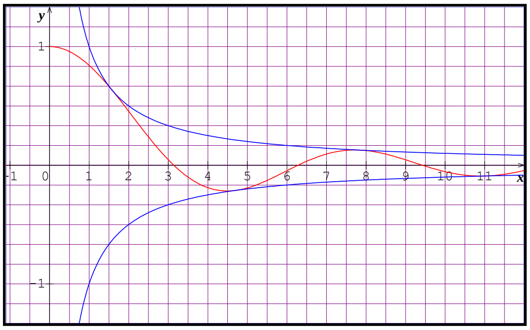
نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}$ و $v(x)=\sin x$

$(f=v\circ u)$

بما أن $\lim_{x\to+\infty} u(x)=\frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} v(x)=1$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

2. النهايات بالمقارنة

مبرهنة1: f، g و h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x)\le f(x)\le h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.



مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1\le \sin x\le 1$ و منه فإن

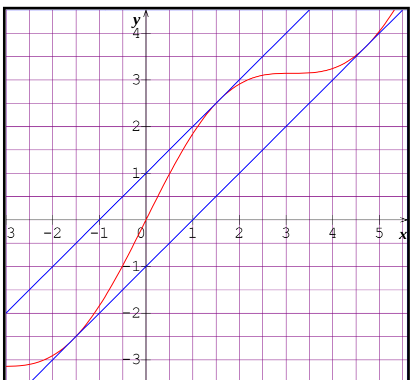
من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{1}{x}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

مبرهنة2: f، g دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\ge g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

مبرهنة3: f، g دالتان و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\le g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

ملاحظة: تمدد هذه المبرهنات إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي.



مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+\sin x$

نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1\le\sin x\le 1$ و منه فإن

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $x-1\le x+\sin x\le x+1$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

تمرين 1: لتكن f الدالة المعرفة على $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$

أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

الحل:

نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ و $v(x)=\sqrt{x}$ ($f=v\circ u$)

* بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)=2$ و $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\sqrt{2}$. نجد كذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{2}$.

* بما أن $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} u(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} v(x)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)=0$.

* بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} u(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=+\infty$.

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=1+\dfrac{\cos x}{x^2}$

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $1-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x^2}$
2. أستنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل:

1. نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1\le \cos x\le 1$ و منه فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$،
$-\frac{1}{x^2}\le \frac{\cos x}{x^2}\le \frac{1}{x^2}$
و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $1-\frac{1}{x^2}\le 1+\frac{\cos x}{x^2}\le 1+\frac{1}{x^2}$ أي $1-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x^2}$
2. بما أن $\lim_{|x|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{|x|\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

تمرين 3: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{x}{2+\sin x}$

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}\le 1$
2. استنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $-1\le \sin x\le 1$ و منه $1\le 2+\sin x\le 3$ أي $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}\le 1$
2. لدينا $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}$ ومن أجل x من $]-\infty;0]$ لدينا $\frac{x}{3}\ge\frac{x}{2+\sin x}$ و بما أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{3}=-\infty$ فإن
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
لدينا $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}$ ومن أجل x من $[0;+\infty[$ لدينا $\frac{x}{3}\le\frac{x}{2+\sin x}$ و بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3}=+\infty$ فإن
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

التاريخ: 2014/09/21 **المستوى:** ثالثة علوم تجريبية **المـدة:** 05 ساعات

المجال التعليـمـي: التحليل.

الـوحدة التعليمية (01): الدوال العددية.

مـوضـوع الدرس: الاستمرارية

الوسـائل التعليـميـة: السبورة ، الكتاب المدرسي، الآلة الحاسبة البيانية

الـمـراجـــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة:

• استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x)=k$، k عدد حقيقي معطى.

النشاط 3 ص 7

تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n ، حيث $n \le x < n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو $[\ ]$.

1) أحسب $[-2,3]$، $E(-1)$، $\left[\sqrt{3}\right]$ و $E(11,01)$.

2) نعتبر الدوال f، g و h المعرفة على المجال $[-2;1[$ كما يلي:

$f(x)=[x]$ ، $g(x)=x-[x]$ ، $h(x)=x^2+1$ و لتكن (C_f)، (C_g)، (C_h) تمثيلاتها البيانية على الترتيب.

• أرسم في معالم مختلفة التمثيلات البيانية (C_f)، (C_g) و (C_h).

• هل بإمكانك رسم المنحنيات (C_f)، (C_g) و (C_h) بدون رفع القلم (اليد) ؟

• هل تقبل الدوال f، g و h نهاية عند -1 ؟ عند 0 ؟

• أكتب خلاصة.

الاستمرارية

1. تعريف:

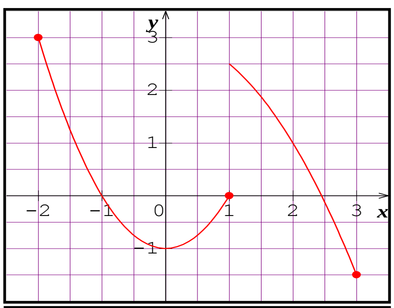
f دالة مجموعة تعريفها D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f.

القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن نهاية الدالة f عند a هي $f(a)$.

(f مستمرة عند a) يعني $\left(\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\right)$

ملاحظة: القول أن الدالة f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I.

التفسير البياني: تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).



مثال1:

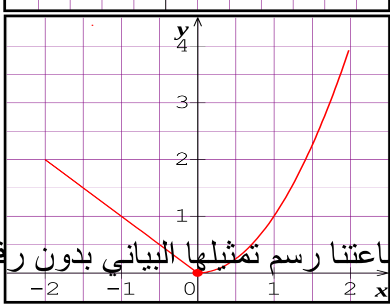
الدالة f الممثلة في الشكل المقابل غير مستمرة على المجال $[-2;3]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.

في حين نلاحظ أنها مستمرة على كل من المجالين $[-2;1[$ و $]1;3]$.

مثال2:

الدالة f المعرفة على المجال $]-2;2[$ بـِ:

$$\begin{cases} f(x)=-x & \text{إذا كان } x\in]-2;0] \\ f(x)=x^2 & \text{إذا كان } x\in]0;2[\end{cases}$$



و الممثلة في الشكل المقابل مستمرة على المجال $]-2;2[$ لأنه باستطاعتنا رسم تمثيلها البياني بدون رفع القلم.

2. خواص(تقبل دون برهان)

نقبل بأن كل الدوال المقررة في هذا المستوى و المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

نتائج

• الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

• الدوال كثيرات الحدود، $\sin$ و $\cos$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

• الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

أمثلة:

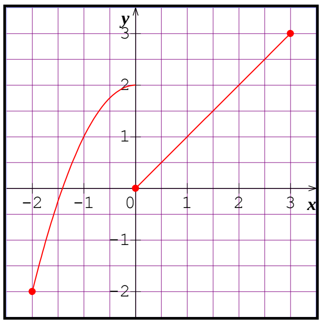
- الدالة $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدالة $x \mapsto \dfrac{3x-2}{x^2-1}$ مستمرة على كل من المجالات $]-\infty;-1[$ ، $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$.

تمرين 1: لتكن f الدالة المعرفة على $[-2;3]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 2 & \text{إذا كان } x \in [-2;0[\\ f(x) = x & \text{إذا كان } x \in [0;3] \end{cases}$$

1. مثل بيانيا الدالة f. هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟
2. هل الدالة f مستمرة على $[-2;3]$ ؟ أذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

الحل:



1. أنظر الشكل المقابل. لدينا من جهة $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = 2$ و لدينا من جهة ثانية $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 0$. إذن لا تقبل الدالة f نهاية عند 0.
2. الدالة غير مستمرة عند 0 و بالتالي فهي غير مستمرة على $[-2;3]$.

نلاحظ أنه غير ممكن رسم تمثيلها البياني دون رفع القلم.

الدالة f مستمرة مثلا على المجال $[0;3]$.

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (x^2 + x + 1)\cos x$

بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

الحل:

الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto x^2 + x + 1$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.

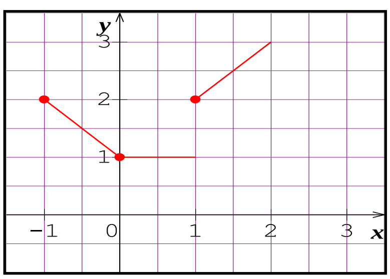
الدالة f هي جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين 3: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2[$ بـِ: $f(x) = xE(x) + 1$

حيث الدالة $x \mapsto E(x)$ هي الدالة الجزء الصحيح (أنظر النشاط الأول)

1. عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-1;0[$ ، $[0;1[$ و $[1;2[$.
2. أرسم في معلم $(O;I,J)$ المنحني الممثل للدالة f.
3. هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$؟ على المجال $[-1;2[$؟

الحل



1. من أجل $x \in [-1;0[$ لدينا $E(x) = -1$ ومنه $f(x) = -x + 1$

من أجل $x \in [0;1[$ لدينا $E(x) = 0$ ومنه $f(x) = 1$

من أجل $x \in [1;2[$ لدينا $E(x) = 1$ ومنه $f(x) = x + 1$

2. انظر الشكل المقابل.
3. نعم الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$ لأنه بإمكاننا رسم جزء المنحني في هذا المجال دون رفع القلم.

الدالة f ليست مستمرة على المجال $[-1;2[$ لأنها غير مستمرة عند 1 كما نلاحظ أنه لا يمكن رسم منحنيها

البياني دون رفع القلم.

مبرهنة القيم المتوسطة

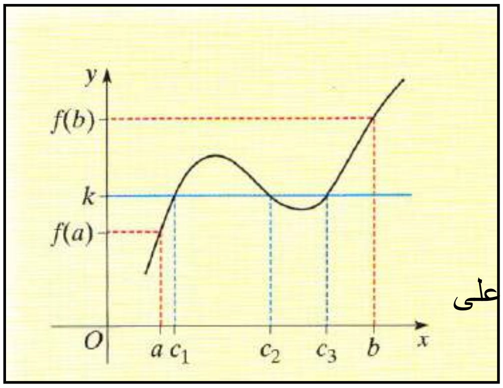
1. مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان)

مبرهنة: f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b

بحيث $f(c)=k$.

2. التفسير البياني



f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b.

(بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1، c_2 و c_3).

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$

و كان $f(a)\times f(b)<0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$)

فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=0$ b c

a

أي أن f تنعدم على الأقل مرة واحدة على $[a;b]$.

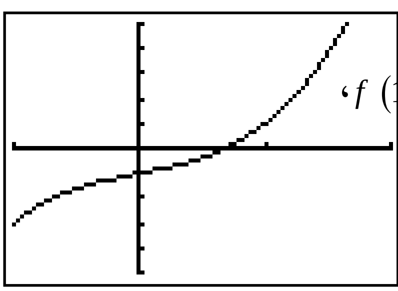
3. المعادلة $f(x)=k$

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$

و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b.

ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيين الحلول أو قيم

مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.



مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3+x-1$

f دالة كثير حدود فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$ و لدينا $f(0)=-1$ و $f(1)=1$، العدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$ ومنه، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا محصورا بين 0 و 1.

تمرين 1: برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3-2x=-2$ تقبل على الأقل حلا

في المجال $[-2;1]$.

طريقة: لإثبات وجود حلول معادلة على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

- نكتب المعادلة على الشكل $f(x)=k$.
- نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$.
- نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

الحل: يمكن كتابة المعادلة $x^3-2x=-2$ على الشكل $f(x)=-2$ حيث f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=x^3-2x$ (يمكن اختيار كتابة أخرى مماثلة)

الدالة f دالة كثير حدود و بالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و من تم على $[-2;1]$.

لدينا $f(-2)=-4$ و $f(1)=-1$ كما نلاحظ أن العدد 2- محصور بين العددين 4- و 1-.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $x^3-2x=-2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;1]$.

ملاحظة: يمكن مراقبة النتيجة باستعمال حاسبة بيانية بحيث يتم تمثيل الدالة f و المستقيم ذا المعادلة $y=-2$ ثم ملاحظة تقاطعهما.

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=x^3+2x^2+x+1$

1. أظهر على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني للدالة f .
2. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في مجال يطلب تحديده.

الحل:

1. نحصل مثلا على الشكل المقابل.
2. يوحي الشكل بأن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا محصورا بين -2 و -1.

بما أن f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[-2;-1]$.

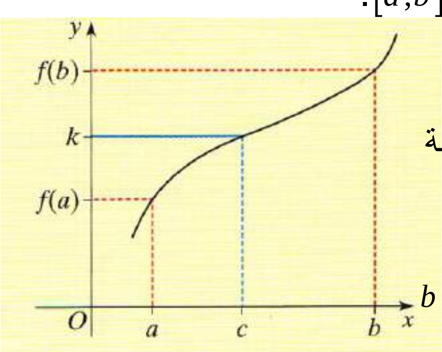
لدينا من جهة ثانية $f(-2)=-1$ و $f(-1)=1$ و بما أن 0 محصور بين -1 و 1 أي بين $f(-2)$ و $f(-1)$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;-1]$.

الدوال المستمرة و الرتيبة تماما

1. الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على مجال $[a;b]$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$.



البرهان:

نفرض أن الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$.

و ليكن k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي آخر c' مختلف عن c، محصور بين a و b

و يحقق $f(c')=k$.

يكون لدينا حينئذ $c \neq c'$ و $f(c)=f(c')$ و هذا يناقض الرتابة التامة للدالة f على المجال $[a;b]$.

و بالتالي يوجد عدد حقيقي وحيد c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=k$ أي أن c هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=k$.

2. ملاحظات

ملاحظة1: إذا كانت الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على مجال $[a;b]$ فإن جدول تغيراتها يأخذ أحد الشكلين التاليين:

x	a		x_0		b
					$f(b)$
$f(x)$		↗	k	↗	
	$f(a)$				

x	a		x_0		b
	$f(a)$				
$f(x)$		↘	k	↘	
					$f(b)$

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $[a;b]$.

ملاحظة2: تقبل المبرهنة السابقة عدة تمديدات في حالة دالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود.

تذكير: الأسهم المائلة في جدول تغيرات دالة تترجم استمرارية و رتابة الدالة على المجال المعتبر.

مثال:

لتكن f الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $]-1;+\infty[$ و لدينا $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي k من $]0;+\infty[$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]-1;+\infty[$.

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-4;3]$ بـ: $f(x)=2x^3+2x^2-12x+1$

1. أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.
2. أرسم التمثيل البياني للدالة f على شاشة حاسبة بيانية باختيار نافذة مناسبة.
3. بين أن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2;1]$.
4. باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا لهذا الحل سعته 10^{-2}.

الحل:

1. من أجل كل x من $[-4;3]$، $f'(x)=6(x+2)(x-1)$

x	-4		-2		1		3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-31	↗	21	↘	-6	↗	46

2. لدينا $f(-2)=21$ ، $f(1)=-6$ و $-6\le 8\le 21$. f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[-2;1]$.إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=8$ تقبل على الأقل حلا c في المجال $[-2;1]$.و بما أن f متناقصة تماما على $[-2;1]$ فإن c وحيد.

3. لتعيين حصرا للحل c يمكننا، بعد تمثيل المستقيم ذي المعادلة $y=8$ ، إظهار قيم مقربة لإحداثيي نقطة التقاطع

و هكذا نقرأ $c\approx -0,5370446$ و منه نستنتج الحصر التالي: $-0,54<c<-0,53$.

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-x^3-2x+5$

1. برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α.
2. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنى الممثل للدالة f ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-1}.
3. عين حسب قيم x إشارة الدالة f.

الحل:

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=-(3x^2+2)$ و بالتالي لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)<0$.إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

لدينا كذلك $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. كما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها كثير حدود.

نستنتج مما سبق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α .

2. نثبت بإتباع مثلا نفس الطريقة السابقة أو باستعمال مجدول أو باستعمال جدول قيم مع اختيار الخطوة $0,1$ أن $1,3<\alpha<1,4$.

A	B
x	f(x)
1	2
1,1	1,469
1,2	0,872
1,3	0,203
1,4	-0,544
1,5	-1,375
1,6	-2,296
1,7	-3,313

3. من أجل $x\in]-\infty;\alpha[$ ، $f(x)>0$

و من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ ، $f(x)<0$.

◈ **ازالة حالة عدم التعيين**

1. بالاختزال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2}$

- أحسب $\lim_{x\to-2}(x^3+2x^2+x+2)$ و $\lim_{x\to-2}(x^2+x-2)$. هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند -2 ؟
- قم بتحليل كل من x^3+2x^2+x+2 و x^2+x-2 .
- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ ، $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.
- استنتج نهاية الدالة f عند -2.

تطبيق: أدرس النهاية عند 1 للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $g(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$.

2. باستعمال التحليل

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ $f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$

- هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند $+\infty$ مباشرة ؟ لماذا ؟
- بين أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $f(x)=x\left(2+\dfrac{1}{x}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}\right)$.
- استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

تطبيق: أدرس النهاية عند $+\infty$ للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(x)=x+2-\sqrt{x}$.

3. باستعمال المرافق

نعتبر الدالة f المعرفة على $[2;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}$

- تحقق أن لدينا حالة عدم التعيين لما يؤول x إلى $+\infty$.
- بين أنه من أجل كل x من $[2;+\infty[$، $f(x)=\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}$
- استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

تطبيق: أدرس النهاية عند $-\infty$ للدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(x)=x+2+\sqrt{x^2+x}$.

4. باستعمال العدد المشتق

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$

- هل يمكن تعيين نهاية الدالة f عند 0 مباشرة ؟ لماذا ؟
- باستعمال تعريف العدد المشتق عند 0 للدالة $x\mapsto \cos x$ عين نهاية الدالة f عند 0.

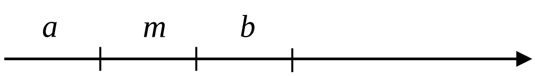
تطبيق: أدرس النهاية عند 0 للدالة g المعرفة على $[-1;0[\cup]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

◈ إيجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف

المبدأ: بصفة عامة إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ بحيث $f(a)\times f(b)<0$

فإن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a;b]$.

نعلم أن $m=\dfrac{a+b}{2}$ هو مركز المجال $[a;b]$.



1. ماذا يمكن القول عن α إذا كان $f(a)\times f(m)<0$ ؟
2. ماذا يمكن القول عن α إذا كان $f(a)\times f(m)>0$ ؟

نواصل بنفس الطريقة من خلال تعويض a أو b بـ m و ذلك إلى غاية الحصول على الحصر المرغوب فيه.

تعيين حصر لـِ α :

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3-3x-3$

1. برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[2;3]$.
2. بحساب $f(m)$ ، حيث m هو مركز $[2;3]$، عين حصرا لـِ α سعته $0,5$.
3. بتعويض 2 و3 بحدي الحصر السابق و بإتباع نفس المنهجية أوجد حصرا لـِ α. ما هي سعته ؟
4. ما هي سعة الحصر المحصل عليه بعد n مرحلة علما أنه في كل مرحلة يتم قسمة السعة على2 ؟

استعمال مجدول:

1. لمتابعة العملية السابقة أنجز ورق الحساب أسفله

بإتباع الخطوات التالية:

- نحجز في الخلية $D2$: $=(B2+C2)/2$
- نحجز في الخلية $E2$: $B2\wedge3-3*B2-3$ ثم ننقلها نحو كل من الخليتين $F2$ و $G2$.
- في الخليتين $B3$ و $C3$ نحجز على الترتيب:

برامج لحاسبة بيانية:

$TI\ 82-83$ $\quad$ $TI\ 89-92$ $\quad$ $Casio\ Graph$

```
Prompt A, B, E
While B – A ≥ E
(A + B)/2 → C
A → X
Y1 → F
C → X
Y1 → G
If F × G ≤ 0
Then
C → B
Else
C → A
End
End
Disp A, B
```

```
Dicho()
Prgm
Local c
Prompt a, b, e
While b – a ≥ e
(a + b)/2 → c
If y1(a) *y1(b) ≤ 0 Then
c → b
Else
c → a
EndIf
EndWhile
Disp a, b
EndPrgm
```

```
? → A
? → B
? → E
While B – A ≥ E
A → X
Y1 → F
(A + B)/2 → X
Y1 → G
If F × G ≤ 0
Then X → B
Else X → A
IfEnd
WhileEnd
A◢
B
```

$=SI\,(E\,2*G\,2<0;B\,2;D\,2)$ و

$=SI\,(E\,2*G\,2<0;D\,2;C\,2)$ ثم نسحب نحو

الأسفل في كل عمود من أعمدة ورقة الحساب.

2. ابتداء من أي قيمة لِـ n تكون سعة حصر العدد α أصغر من 10^{-5} ؟

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a	b	m=(a+b)/2	f(a)	f(b)	f(m)	b-a
2	0	2	3	2,5	-1	15	5,125	1
3	1	2	2,5	2,25	-1	5,125	1,640625	0,5
4	2	2	2,25	2,125	-1	1,640625	0,220703	0,25
5	3	2	2,125	2,0625	-1	0,220703	-0,41382	0,125
6	4	2,0625	2,125	2,09375	-0,41382	0,220703	-0,10269	0,0625
7	5	2,09375	2,125	2,109375	-0,10269	0,220703	0,057461	0,03125
8	6	2,09375	2,109375	2,101563	-0,10269	0,057461	-0,023	0,015625
9	7	2,101563	2,109375	2,105469	-0,023	0,057461	0,017134	0,007813
10	8	2,101563	2,105469	2,103516	-0,023	0,017134	-0,00296	0,003906

تمارين

تمرين 1 ص26

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{3x-2}{x+1}$$

1) أوجد عدداً حقيقيا A حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]2,9;3,1[$.

2) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=3$ مقارب للمنحنى C_f الممثل لدالة f.

3) ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ.

تمرين 12 ص 26

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+3$

نريد دراسة سلوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2.

1) ضع تخمينا لسوك $f(x)$ لما x يؤول إلى 2.

2) في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى $]6,99;7,01[$ ؟

3) α عدد حقيقي حيث $0<\alpha<1$

- في أي مجال يجب اختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى $]7-\alpha;7+\alpha[$ ؟
- علما أننا نختار α صغير بالقدر الذي نريد ، ماذا تستنتج؟

تمرين 23 ص 28

أ) $f(x)=2x^2+\sqrt{x}+1$ عند $+\infty$

ب) $f(x)=\frac{1}{x-1}+2\sqrt{x}$ عند $+\infty$ ، عند1

تمرين 28 ص 28

أ) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ عند $+\infty$

ب) $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-x$ عند $-\infty$

تمرين 32 ص 28

احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi x-1}{2x}\right)$ ،

$\lim\limits_{x\to-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{(x+1)^2}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\pi\frac{\sin x}{x}\right)$

تمرين 33 ص 28

$$f(x)=\frac{x+\sin x}{2x+1}$$

1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>-\frac{1}{2}$:

$$\frac{x-1}{2x+1}\le f(x)\le\frac{x+1}{2x+1}$$

2) هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

تمرين 42 ص 29

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2;4[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+x \ ; & x\in[-2;1[\\ f(x)=x-1 \ ; & x\in[1;4[\end{cases}$$

1) مثل بيانيا الدالة f في معلم.هل تقبل الدالة f نهاية عند 1 ؟

2) هل الدالة f مستمرة على المجال $]-2;4[$ ؟ لماذا؟

3) اذكر مجالا تكون الدالة f مستمرة عليه.

تمرين 49 ص 29

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;1[$ كما يلي:

$$f(x)=x\left(x+E(x)\right)$$

حيث $x\mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح

1) عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية:

$[-2;-1[$ ، $[-1;0[$ ، $[0;1[$

2) ارسم في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة f.

3) هل الدالة f مستمرة على $[-2;-1[$ ، $[-2;0[$ ، $[-2;1[$ ؟

تمرين 51 ص 30

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;2]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=2x+1 \ ; & 0<x\le1 \\ f(x)=-2x+3 \ ; & 1\le x<2 \end{cases}$$

1) هل يمكن تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلولا في المجال $[0;2]$ ؟

2)تحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في $[0;2]$.

تمرين 59 ص 30

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=-2x^3+3x^2-x+5$$

1) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

3) باستعمال حاسبة بيانية أوجد قيمة مقربة إلى 10^{-2} لهذا الحل.

تمرين 75 ص 32

f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x+3$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$

2) ادرس الوضعية النسبية لـ (C) و Δ .

تمرين 33 ص 83

باستعمال المرافق احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ،

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\sqrt{x+2}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x+\sqrt{x^2+3}$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$

حيث $a>0$ و $b>0$

تمرين 91 ص34

باستعمال نهاية مركب دالتين احسب ما يلي:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{2x-4}}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2-x+3}$ ، 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

تمرين 95 ص 34

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$-2\le\cos x+\sin x\le2$ ،

ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x+\sin x}{x^2}$

تمرين 103 ص 35

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} & ;\ x>0 \\ f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-2} & ;x\le0 \end{cases}$$

بين لن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

تمرين 104 ص 35

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} & ;\ x\neq0 \\ f(0)=\alpha \end{cases} .$$

عين قيمة العدد α حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

تمرين 106 ص 35

f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث

$f(a)<ab$ و $f(b)>b^2$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $[a;b]$ بحيث

$f(c)=bc$.

تمرين 113 ص 37

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ :

$$f(x)=|x+1|+\frac{x}{x^2-1}$$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1) أ) اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب) ادرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) أ) احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها .

ب) مثل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بين أن المستقيمين $\Delta: y=x+1$ و $\Delta': y=-x-1$ مقاربين للمنحني (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب.

ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ على المجال $]1;+\infty[$ و ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ' على المجال $]-\infty;-1[$.

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً واحداً α على المجال $]-1;1[$ ، وأعط حصراً لـ α سعته 10^{-1} .

تمرين 114 ص 37

نعتبر الدالتين f و g المعرفتان على المجموعة $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$$

و $$g(x)=x-\sqrt{x^2-1}$$

و C_f و C_g تمثيلاهما البيانيين على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) عين نهاية الدالة f عند $+\infty$

ب) عين نهاية الدالة f عند $-\infty$.استنتج أن المنحني C_f

يقبل مستقيما مقاربا أفقيا.

ج)بين أن المستقيم $\Delta : y = 2x$ مقارب للمنحني C_f

عند $+\infty$.

2) أ) احسب $f\left(x\right)\times g\left(x\right)$ ثم استنتج نهايات الدالة g

عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب) ما هو التفسير الهندسي لهذه النتيجة ؟

ج) قارن بين $g\left(x\right)-2x$ و $f\left(x\right)$.

استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)-2x$ ،أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة.

3) نعتبر المنحني $\left(\Gamma\right)=C_f \cup C_g$.

بين أن معادلة $\left(\Gamma\right)$ هي $y^2-2xy+1=0$

4) ليكن الشعاع $\vec{u}$ من المستوي حيث $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$.

نرمز بـ$\left(x;y\right)$ لاحداثيتي النقطة M في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

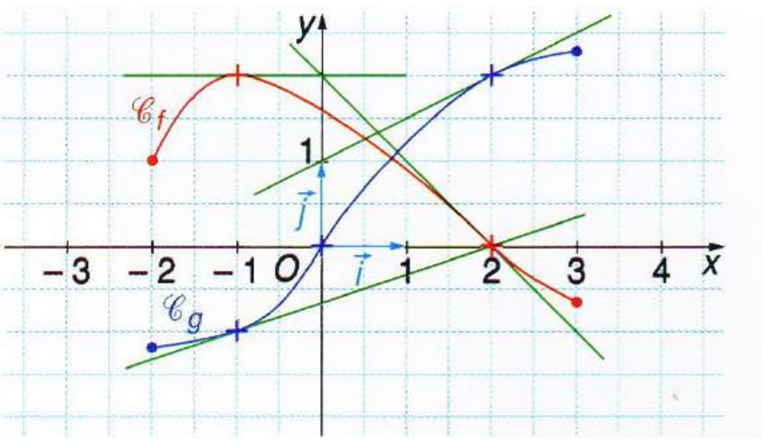
و بـ$\left(x';y'\right)$ احداثياتها في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{u}\right)$

أ) عبر عن x و y بدلالة x' و y' .

ب) عين معادلة$\left(\Gamma\right)$ في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{u}\right)$.

ج) ما طبيعة$\left(\Gamma\right)$.

- توظيف المشتقات لحل مشكلات.
- استعمال المشتقات لدراسة خواص دالة والمنحني الممثل لها (التغيرات، التقريب الخطي، نقطة الانعطاف،...).
- حساب مشتق دالة مركبة.
- حل معادلة تفاضلية من الشكل $y'=f(x)$، $y''=f(x)$. حيث f دالة مألوفة



➢ النشاط 1ص39

رسمنا في الشكل الموالي المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين لدالتين f و g معرفتين و قابلتين للاشتقاق على المجال $[-2;3]$ و بعض مماساتهما.

1. أحسب الأعداد المشتقة التالية:

- * $(f)'(-1)$ * $(g)'(-1)$ * $(f)'(2)$ * $(g)'(2)$
- * $(f+g)'(-1)$ * $(fg)'(2)$ * $\left(\frac{3}{f}\right)'(-1)$ * $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

2. من أجل كل x من المجال $[0;2]$ نضع: $h(x)=f(2x-1)$

أحسب $h'(0)$ و $h'\left(\frac{3}{2}\right)$.

I. الاشتقاقية

1. العدد المشتق- الدالة المشتقة

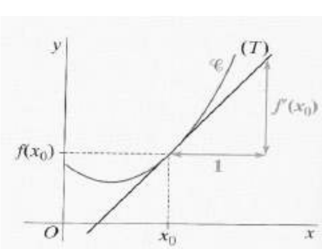
تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h\neq 0$.

نقول أن f تقبل الاشتقاق عند a إذا قبلت النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h إلى0.

تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a و نرمز لها بالرمز $f'(a)$.

لدينا إذن: $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ أو $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و ذلك بوضع $x=a+h$

ملاحظة: إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و تسمى الدالة



.
$f':x\mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f.

2. مماس منحني دالة

تعريف و خاصية: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

إذا قبلت f الاشتقاق عند x_0 فإن (C) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلته:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

3. المشتقات المتتابعة

تعاريف: f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا قبلت الدالة f' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها

بالرمز f''. إذا قبلت الدالة f'' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f'')'$ تسمى المشتقة الثالثة للدالة f

و نرمز لها بالرمز f'''. تسمى الدوال f'، f''، f'''،...،$f^{(n)}$،... المشتقات المتتابعة للدالة f.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x}$

لدينا: $f'(x)=3x^2+\dfrac{1}{x^2}$ ، $f''(x)=6x-\dfrac{2}{x^3}$ ، $f'''(x)=6+\dfrac{6}{x^4}$.

4. الاشتقاقية و الاستمرارية

خاصية: إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق على مجال I فإنها مستمرة على هذا المجال.

ملاحظة: عكس هذه الخاصية ليس دائما صحيحا فمثلا الدالة: $x\mapsto|x|$ مستمرة عند 0 و لكن غير قابلة للاشتقاق عند 0. لدينا $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ بينما النسبة $\dfrac{|h|}{h}$ لا تقبل نهاية عند 0 لأن $\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\dfrac{|h|}{h}=-1$ و $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{|h|}{h}=1$.

- **تمارين**

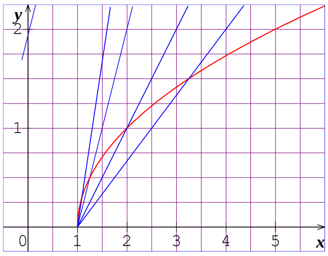
تمرين 1: أدرس قابلية اشتقاق الدوال التالية f، g و k عند 1 مفسرا بيانيا في كل مرة النتيجة المحصل عليها: $f(x)=(x^2-2x+3)^2$ ، $g(x)=\sqrt{x-1}$ ، $k(x)=2x|x-1|$

طريقة: لدراسة قابلية اشتقاق دالة f عند a ندرس نهاية النسبة $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لما يؤول h إلى 0.

الحل: * $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{\left[(1+h)^2-2(1+h)+3\right]^2-4}{h}=\dfrac{h^2(h^2+4)}{h}$ ومنه

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h(h^2+4)=0$. إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 و لدينا $f'(1)=0$.

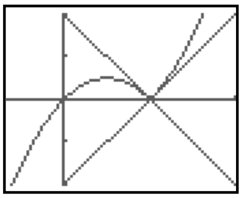
المنحني (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا معامل توجيهه 0 و هو موازي لمحور الفواصل.



*من أجل لدينا: $\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$ ومنه $\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=+\infty$

إذن الدالة g غير قابلة للاشتقاق عند 2 . بما أن نهاية النسبة $\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$ هي $+\infty$ فإن معامل توجيه المستقيم (AM) حيث $A(1;0)$ و M نقطة من (C_g) فاصلتها $1+h$ يصبح كبيرا جدا لما يؤول h إلى 0 و هذا يعني أن (C_g) يقبل عند النقطة $A(1;0)$ مماسا موازيا لحامل محور التراتيب.

طريقة: إذا كانت نهاية النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لما يؤول h إلى 0 غير منتهية فإن المنحني (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا موازيا لحامل محور التراتيب.



*من أجل $h>0$ ، $\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\frac{2(h+1)|h|}{h}=2(h+1)$

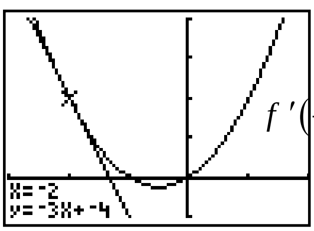
و من أجل $h<0$ ، $\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\frac{2(h+1)|h|}{h}=-2(h+1)$

نلاحظ أن هذه النسبة تقبل نهاية من اليمين عند 0 مساوية لـِ 2 و نهاية من اليسار عند 0 مساوية لـِ -2 .
نقول أن k تقبل الاشتقاق عند 1 من اليمين و من اليسار و أن عددها المشتق من اليمين عند 1 هو 2 و عددها المشتق من اليسار عند 1 هو -2 و بما أنهما مختلفان فهي غير قابلة للاشتقاق عند 1(النسبة $\frac{k(1+h)-k(1)}{h}$ لا تقبل نهاية عند 0). المنحني (C_k) يقبل عند النقطة $A(1;0)$ نصفي مماسين معاملا توجيههما 2 و -2 .

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=x^2+x$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحني (C_f) و (Δ) مماس (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة (-2).
2. عين معادلة لـِ (Δ).

الحل



1. أنظر الشكل المقابل.
2. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=2x+1$ و منه $f'(-2)=-3$

بتطبيق الدستور: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ مع $a=-2$ نجد $y=-3x-4$.

II. المشتقات و العمليات

1. مشتقات دوال مألوفة

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (حيث k ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

2. المشتقات والعمليات على الدوال

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$ (الدالة v لا تنعدم على I)
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

- **نتائج:**

* الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
* الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها.

3. مشتقة الدالة: $x \mapsto u(ax+b)$

مبرهنة: a و b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$. u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$. ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b$ ينتمي إلى I.

الدالة $f: x \mapsto u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على J و لدينا: $f'(x)=au'(ax+b)$

أمثلة:

*الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sin(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$f'(x)=a\cos(ax+b)$$

*الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\cos(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$g'(x)=-a\sin(ax+b)$$

- **تمارين**

تمرين 1: عين مشتقة كل دالة من الدوال التالية المعرفة على $I=]0;+\infty[$ بـ:

$$h(x)=\frac{\sin x}{x} \text{ ، } g(x)=(x+1)\sqrt{x} \text{ ، } f(x)=-\frac{1}{2}x^3+3x^2-x+3$$

طريقة: لحساب مشتقة دالة نقوم أولا بالتعرف على شكلها.

الحل:

*الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود و منه فهي قابلة للاشتقاق على I و لدينا:

$$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+6x-1$$

*الدالة g قابلة للاشتقاق على I لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على I و لدينا:

$$g'(x)=\sqrt{x}+(x+1)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$$

*الدالة h هي حاصل قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بما أن الدالة المقام: $x \mapsto x$ لا تنعدم على I فإن الدالة h تقبل الاشتقاق على I و لدينا:

$$h'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

تمرين 2: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$.

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=f(-x)$ و $h(x)=f(2x-1)$

بدون تعيين الدالتين g و h عين الدالتين g' و h'.

الحل:

*من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ ومنه فالدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$g'(x)=-f'(-x)=-\frac{1}{(-x)^2+(-x)+1}=-\frac{1}{x^2-x+1}$$

*من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $(2x-1)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ ومنه فالدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$h'(x)=2f'(2x-1)=2\times\frac{1}{(2x-1)^2+(2x-1)+1}=-\frac{2}{4x^2-2x+1}$$

تمرين 3: من أجل $x\geq 0$ و n عدد طبيعي نضع $f_n(x)=x^n\sqrt{x}$

* بين أن الدالة f_n تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ثم عبر عن $f'_{n+1}(x)$ بدلالة n و $f_n(x)$.

الحل: الدالة $x\mapsto x^n$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ بينما الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و منه فالدالة f_n جداؤهما تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$.

لدينا: $f_{n+1}(x)=x^{n+1}\sqrt{x}$ و منه $f'_{n+1}(x)=(n+1)x^n\sqrt{x}+x^{n+1}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

و بالتالي $f'_{n+1}(x)=(n+1)x^n\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^n\sqrt{x}=\left(n+\frac{3}{2}\right)x^n\sqrt{x}$

و نجد هكذا: $f'_{n+1}(x)=\left(n+\frac{3}{2}\right)f_n(x)$

III. اتجاه تغير دالة

1. المشتقة و اتجاه تغير دالة

مبرهنة (دون برهان): f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماما على I.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)<0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متناقصة تماما على I.

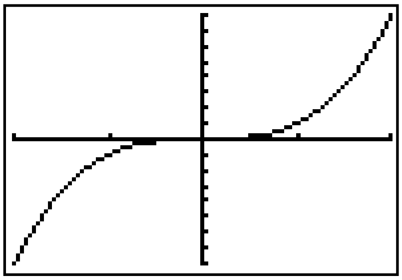
*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

ملاحظة: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=x^3$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=3x^2$ و منه:

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)>0$ و $f'(0)=0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$



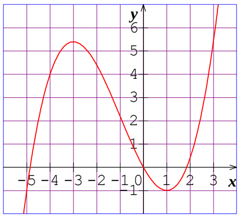
2. القيم الحدية المحلية

- **تعاريف:** f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

*القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\leq f(x_0)$.

*القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\geq f(x_0)$.

*القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لِـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.



مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $[-6;4]$ بـ $f(x)=\frac{1}{5}(x^3+3x^2-9x)$

و ليكن في الشكل المقابل تمثيلها البياني. $f(-3)=\frac{27}{5}$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f

و $f(1)=-1$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f.

- **مبرهنة (دون برهان):** f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I. إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f.

x		x_0	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘

➢ تمارين

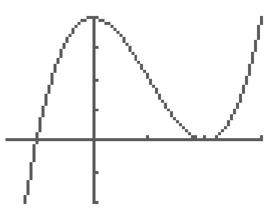
تمرين 1: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3-3x^2+4$

1. أدرس اتجاه تغير f. أحسب $f(-1)$. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج إشارتها على $\mathbb{R}$.
2. باستعمال السؤال 1 أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ $g(x)=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{4}{x}$

الحل:

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. $f'(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه 0 و 2 و بالتالي فإشارته من نفس إشارة (3) بين الجذرين أي سالبة على المجال $[0;2]$

لدينا: $f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+4=0$



x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	0	↗	4	↘	0	↗	

من جدول التغيرات نستنتج أن $f(x)\leq 0$ على $]-\infty;-1]$ و $f(x)\geq 0$ على $[-1;+\infty[$.

2. الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[$ و لدينا: $g'(x)=x-3+\frac{4}{x^2}=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}=\frac{f(x)}{x^2}$

إذن إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $f(x)$ على $]-\infty;0[$ أي سالبة على $]-\infty;-1]$ و موجبة على $[-1;0[$.

نستنتج هكذا أن الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ و متزايدة تماما على $[-1;0[$.

تمرين 2: بدراسة اتجاه تغير دالة f مختارة بشكل مناسب قارن بين العددين:

$A=0,999998+\dfrac{1}{0,999998}$ و $B=0,999999+\dfrac{1}{0,999999}$

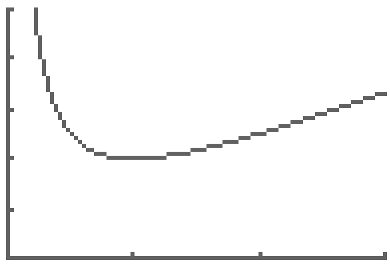
الحل: نعتبر الدالة f المعرفة مثلا على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$. و بالتالي فإن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة (x^2-1) الذي يقبل جذرين هما (-1) و 1 و منه

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
x^2-1	+ $\quad$ 0 $\quad$ - $\quad$ 0 $\quad$ +

نستنتج هكذا أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;1]$ و متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

نلاحظ أن $A=f(0,999998)$ و $B=f(0,999999)$



و بما أن العددين $0,999998$ و $0,999999$ ينتميان إلى المجال $]0;1]$

مع $0,999998<0,999999$ فإن $f(0,999998)>f(0,999999)$

و هكذا فإن $A>B$

IV. اشتقاق دالة مركبة

1. مشتقة الدالة $v\circ u$

مبرهنة (دون برهان): إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v\circ u$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I:

$$(v\circ u)'(x)=v'[u(x)]\times u'(x)$$

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2(x^2+3)^2+1$

نلاحظ أن $f=v\circ u$ حيث $u:x\mapsto x^2+3$ و $v:x\mapsto 2x^2+1$ و منه $f'(x)=v'(x^2+1)\times u'(x)$

بعد الحساب نجد: $f'(x)=4(x^2+3)\times 2x=8x(x^2+3)$

2. تطبيقات

- **مشتقة الدالة** $x\mapsto\sqrt{u(x)}$

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و كانت موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

البرهان: نضع $f=\sqrt{u}$ و منه $f=v\circ u$ حيث $v:x\mapsto\sqrt{x}$

الدالة v تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. بما أن من أجل كل x من I، $u(x)>0$ فإن f تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $f'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\times u'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

- **مشتقة الدالة $x\mapsto\left[u(x)\right]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n\geq 2$)**

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة u^n تقبل الاشتقاق على I و لدينا:

$(u^n)'=nu'u^{n-1}$.

البرهان: نضع $f=u^n$ و منه $f=v\circ u$ حيث $v:x\mapsto x^n$

الدالة v $(n\geq 2)$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $v'(x)=nx^{n-1}$. إذن الدالة f تقبل الاشتقاق على I ولدينا:

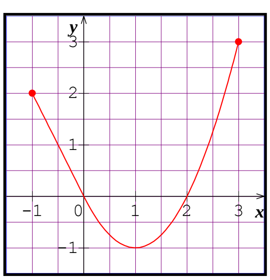
$$f'=nu^{n-1}\times u'=nu'u^{n-1}$$

- **مشتقة الدالة $x\mapsto\frac{1}{\left[u(x)^n\right]}$ (n عدد طبيعي يحقق $n\geq 1$)**

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ ولا تنعدم على I فإن الدالة $\frac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $\left(\frac{1}{u^n}\right)'=-\frac{nu'}{u^{n+1}}$.

➢ تمارين

تمرين 1: التمثيل البياني المقابل هو لدالة g قابلة للاشتقاق على $[-1;3]$



1. عين بيانيا إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g'(x)$.
2. نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;3]$ بـ $f(x)=\left[g(x)\right]^2$.

أحسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

الحل:

1. نلاحظ أن منحنى الدالة g يقع فوق محور الفواصل من أجل $x \in [-1;0] \cup [2;3]$ و تحته من أجل $x \in [0;2]$

و منه $g(x) \geq 0$ من أجل $x \in [-1;0] \cup [2;3]$ و $g(x) \leq 0$ من أجل $x \in [0;2]$.

بما أن الدالة g متناقصة تماما على $[-1;1]$ و متزايدة تماما على $[1;3]$ و تقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة 1 فإن $g'(x) < 0$ من أجل $[-1;1[$ و $g'(x) > 0$ من أجل $x \in]1;3]$ و $g'(1) = 0$.

2. الدالة g معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-1;3]$ و منه فالدالة $f = g^2$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-1;3]$

و لدينا: $f'(x) = 2g'(x)g(x)$. باستعمال الجدول الموالي نحصل على إشارة $f'(x)$

x	-1 0 1 2 3
$g(x)$	+ 0 -	- 0 +
$g'(x)$	-	- 0 +	+
$f'(x)$	- 0 + 0 - 0 +

تمرين 2: عين مشتقات الدوال الآتية:

1. $f : x \mapsto (2x^2 - x + 3)^4$ **على** $\mathbb{R}$.

2. $g : x \mapsto \frac{1}{(x^2-1)^3}$ **على** $]1;+\infty[$.

3. $h : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$ **على** $]2;+\infty[$.

الحل:

1. نلاحظ أن $f = u^4$ مع $u(x) = 2x^2 - x + 3$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $u'(x) = 4x - 1$

إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f' = 4u'u^3$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = 4(4x-1)(2x^2-x+3)^3$

2. نلاحظ أن $g = \frac{1}{u^3}$ مع $u(x) = x^2 - 1$ كما أن $u(x) \neq 0$ من أجل x من $]1;+\infty[$. الدالة u قابلة للاشتقاق

على $]1;+\infty[$ و لدينا $u'(x) = 2x$. إذن g قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا $g' = -\frac{3u'}{u^4}$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x) = -\frac{3(2x)}{(x^2-1)^4} = -\frac{6x}{(x^2-1)^4}$

2. نلاحظ أن $h = \sqrt{u}$ مع $u(x) = x^2 - 4$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ مع $u(x) > 0$.

إذن h قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ و لدينا $h' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ومنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$،

$h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

V. التقريب التآلفي – طريقة أولر

1. التقريب التآلفي

خاصية: f دالة معرفة على مجال مفتوح I.

إذا قبلت f الاشتقاق عند x من I فإنه توجد دالة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث $x+h$ ينتمي إلى I

لدينا: $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h\varepsilon(h)$ مع $\lim\limits_{h\to0}\varepsilon(h)=0$.

من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ: $f(x+h)\approx f(x)+hf'(x)$

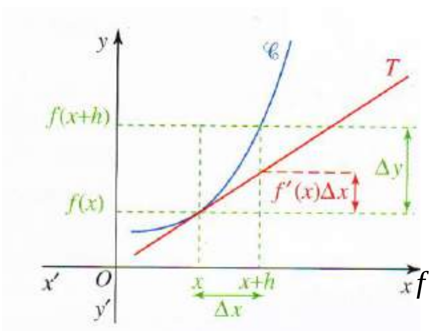
يسمى $f(x)+hf'(x)$ التقريب التآلفي لـِ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0، المرفق بالدالة f.

البرهان: ليكن x من I، من المعطيات لدينا f قابلة للاشتقاق عند x و منه $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$

بوضع $\varepsilon(h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)$ يكون لدينا $\lim\limits_{h\to0}\varepsilon(h)=f'(x)-f'(x)=0$

إذن $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\varepsilon(h)+f'(x)$ و منه $f(x+h)-f(x)=hf'(x)+h\varepsilon(h)$.

الكتابة التفاضلية: بوضع: $\Delta x=(x+h)-x$ و $\Delta y=f(x+h)-f(x)$ تكتب المساواة $f(x+h)-f(x)=hf'(x)+h\varepsilon(h)$ كما يلي: $\Delta y=f'(x)\Delta x+\Delta x\,\varepsilon(\Delta x)$



و منه التقريب $\Delta y\approx f'(x)\Delta x$ عندما يكون Δx قريبا من 0.

نصطلح الصياغة التفاضلية التالية: $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ أو $dy=f'(x)dx$.

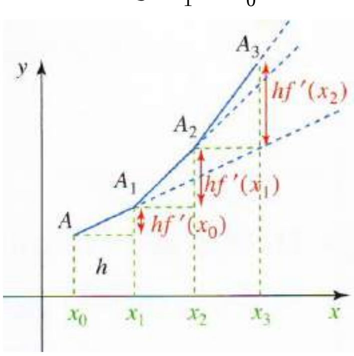
يستعمل هذا الترميز في العلوم الفيزيائية و بصفة عامة نكتب: $\dfrac{df}{dx}$ بدلا من f'

و $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ بدلا من f'' و هكذا $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ بدلا من $f^{(n)}$.

2. طريقة أولر

تسمح طريقة أولر بإنشاء تمثيلات بيانية تقريبية لدالة f بمعرفة f' و $y_0=f(x_0)$. ترتكز هذه الطريقة على التقريب التآلفي للدالة f بحيث من أجل h قريب من 0 لدينا: $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$.

انطلاقا من النقطة $A_0(x_0;y_0)$ بحيث $f'(x_0)\neq0$ ننشئ النقطة $A_1(x_1;y_1)$ ذات الفاصلة $x_1=x_0+h$ و التي تنتمي إلى المستقيم الذي معامل توجيهه $f'(x_0)$ و المار من A_0 و بالتالي:



$y_1=f(x_0)+hf'(x_0)$ و بما أن $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$

من أجل h قريب من 0 فإن النقطة $A_1(x_1;y_1)$ قريبة من (C_f) منحنى f.

بنفس الطريقة يمكن إنشاء، انطلاقا من A_1، النقطة $A_2(x_1+h;f(x_1)+hf'(x_1))$.

و هكذا يمكن على التوالي إنشاء النقط $A_n(x_n;y_n)$ حيث $x_n=x_{n-1}+h$

و $y_n = f(x_{n-1}) + hf'(x_{n-1})$ مع $n \geq 1$. بربط النقط A_0، A_1، A_2، ...، نحصل

على تمثيل بياني تقريبي لـِ f مرتبط باختيار h الذي يسمى الخطوة. و نحصل على أكثر دقة كلما كان h أقربا إلى 0 .

➢ تمارين

تمرين 1: كرة حديدية نصف قطرها $8cm$ تتمدد عند ارتفاع دراجة الحرارة.

1. ما هو تغير حجمها لما يرتفع نصف قطرها بِـ $1mm$ ؟
2. ما هو تغير مساحتها في نفس الظروف ؟

الحل:

1. ليكن V حجم الكرة بِـ cm^3 و ليكن R نصف قطرها بِـ cm. لنعين ΔV تغير حجم الكرة الحاصل بسبب $\Delta R = 0,1$ تغير نصف القطر في حالة $R = 8cm$. لدينا: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ و منه $\frac{dV}{dR} = \frac{4}{3}\pi(3R^2) = 4\pi R^2$ أي $dV = 4\pi R^2 dR$ و بما أن $\Delta R = 0,1$ (قريب من 0) يمكننا أن نكتب $\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R$ و هكذا نجد: $\Delta V = 4\pi(8)^2(0,1) \approx 80$ و منه يرتفع الحجم بحوالي $80cm^3$.
2. لتكن S مساحة الكرة بِـ cm^2 و منه $S = 4\pi R^2$ و بالتالي $dS = 8\pi R dR$ يمكننا أن نكتب $\Delta S = 8\pi R \Delta R$ من أجل $\Delta R \approx 0$. و هكذا $\Delta S \approx 20$. ترتفع المساحة بحوالي $20cm^2$.

تمرين 2: لتكن f دالة تحقق: $f(0) = 1$ و $f'(x) = \sqrt{x}$.

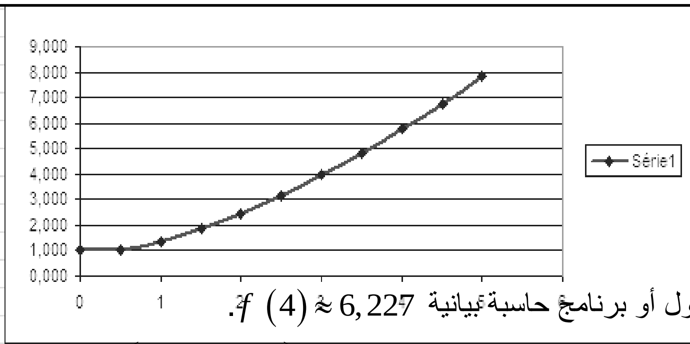
1. باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h = 0,5$ شكل جدولا يتضمن القيم التقريبية لـِ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[0;5]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f . تدور النتائج إلى $0,01$. عين قيمة مقربة للعدد $f(4)$.
2. باختيار خطوة جديدة $h = 0,1$ عين قيمة مقربة للعدد $f(4)$.
3. نبرهن أن $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 1$. تحقق أن $f(0) = 1$ و $f'(x) = \sqrt{x}$. أحسب $f(4)$ ثم قارن النتيجة

مع القيم المقربة المحصل عليها سابقا بالخطوتين $0,5$ و $0,1$.

طريقة: لإيجاد قيمة مقربة لِـ $f(a+h)$ نستعمل التقريب $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$ حيث h قريب من 0.

الحل: 1. لدينا: $f(0,5)\approx f(0)+0,5f'(0)\approx 1$ ، $f(1)\approx f(0,5)+0,5f'(0,5)\approx 1+0,5\sqrt{0,5}\approx 1,354$

x	f(x)
0	1,000
0,5	1,000
1	1,354
1,5	1,854
2	2,466
2,5	3,173
3	3,964
3,5	4,830
4	5,765
4,5	6,765
5	7,826



لدينا $f(4)\approx 5,765$.

2. نجد باستعمال مجدول أو برنامج حاسبة بيانية $f(4)\approx 6,227$.

3. من الواضح أن $f(0)=1$ كما أن $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\sqrt{x}=\sqrt{x}$

لدينا $\frac{19}{3}=f(4)=\frac{2}{3}\times 4\sqrt{4}+1$ و باستعمال حاسبة نجد $f(4)\approx 6,333$. نلاحظ أن القيمة المقربة المحصل عليها بالخطوة $0,1$ أقرب من القيمة المضبوطة لِـ $f(4)$ من القيمة المقربة المحصل عليها بالخطوة $0,5$.

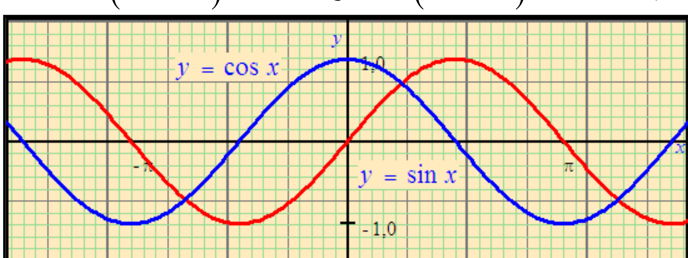
دراسة دالة

1- دراسة دالة مثلثية

1. تذكير حول الدالتين " جيب " و " جيب التمام "

* الدالتان $x\mapsto\cos x$ و $x\mapsto\sin x$ معرفتان على $\mathbb{R}$.

* من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $x+2\pi$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و لدينا $\cos(x+2\pi)=\cos x$ و $\sin(x+2\pi)=\sin x$



نقول أن الدالتين $x\mapsto\cos x$ و $x\mapsto\sin x$ دوريتان دورهما 2π.

* من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

2. الدالة " ظل "

تعريف: الدالة " ظل " و التي نرمز إليها بالرمز " tan " معرفة بِـ $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن $\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث k عدد صحيح $(k\in\mathbb{Z})$.

خواص: * من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $\tan(x+\pi)=\tan x$. إذن الدالة "ظل " دورية دورها π .

* من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $\tan(-x)=-\tan x$. إذن المنحني الممثل للدالة "ظل" متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

دراسة الدالة "ظل": *من الخاصيتين السابقتين يمكن اقتصار دراسة الدالة "ظل" على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

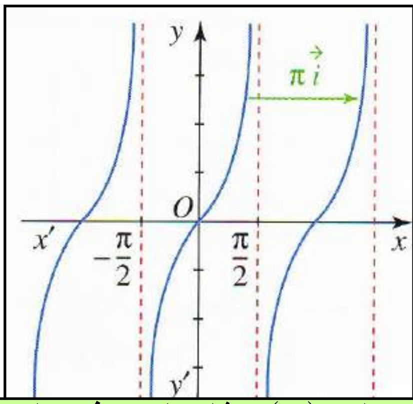
*من أجل كل x يختلف عن $\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $(\tan)'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

بما أن $(\tan)'(x)>0$ فإن الدالة "ظل" متزايدة تماما على كل مجال معرفة فيه.

*لدينا $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$ و بما أن من أجل كل x من $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ، $\cos x>0$ فإن $\lim_{x\xrightarrow{<}\frac{\pi}{2}} \tan x=+\infty$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة "ظل".

x	0 $\quad\quad$ $\frac{\pi}{2}$
$(\tan)'(x)$	$+$
$\tan(x)$	$0 \nearrow +\infty$



تمرين محلول: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sin^2 x$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن الدالة f دورية دورها π و أن محور التراتيب محور تناظر للمنحني (C).

2. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3. أرسم المنحني (C) على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ثم على $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

الحل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x+\pi)=\sin^2(x+\pi)=(-\sin x)^2=\sin^2 x=f(x)$ و منه الدالة f دورية دورها π .

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(-x)=\sin^2(-x)=\left[\sin(-x)\right]^2=(-\sin x)^2=\sin^2 x=f(x)$ و منه الدالة f زوجية و بالتالي فإن محور التراتيب محور تناظر للمنحني (C).

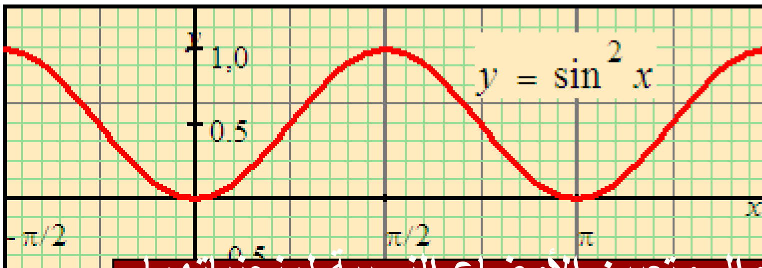
2. بما أن الدالة $x\mapsto \sin x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (جداء دالتين) فهي إذن قابلة للاشتقاق على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ و لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=2\sin x\cos x$

و بما أن العددين $\sin x$ و $\cos x$ موجبان على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ مع $\sin 0=0$ و $\cos\frac{\pi}{2}=0$ فإن $f'(x)\geq 0$ على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

و بالتالي فالدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

3. نرسم في البداية المنحنى الممثل للدالة f على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ثم باستعمال التناظر بالنسبة إلى محور التراتيب نرسم المنحنى على $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ و بما أن الدالة f دورية دورها π نقوم بانسحاب شعاعه $\pi\vec{i}$ لرسم المنحنى (C) على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.



ملاحظة: لرسم (C) على $\mathbb{R}$ نجري انسحابات متتالية أشعتها $k\pi\vec{i}$ حيث k عدد صحيح (من $\mathbb{Z}$)

◈ المقارنة بين دوال وتعيين الأوضاع النسبية لمنحنياتها

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $[0;\pi]$ كما يلي: $f(x)=x-\frac{x^3}{6}$ و $g(x)=\sin x$

و ليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. مماس مشترك

بين أن للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) عند النقطة O يطلب تعيين معادلة له.

2. دراسة الأوضاع النسبية للمنحنيات (C_f) و (C_g) و (T)

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[0;\pi]$ بـ $u(x)=\sin x-x$

- أدرس اتجاه تغير الدالة u
- استنتج إشارة $u(x)$ على $[0;\pi]$ محددا وضعية المنحنى (C_g) بالنسبة للمماس (T).

نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $[0;\pi]$ بـ $v(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$

- أحسب $v'(x)$ ثم $v''(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[0;\pi]$.
- عين إشارة $v''(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة v'.
- عين إشارة $v'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة v.
- حدد إشارة $v(x)$.

طريقة

عندما يتعذر إيجاد إشارة المشتقة مباشرة يمكن دراسة اتجاه تغير الدالة المشتقة لتحديد إشارتها.

- بين أنه من أجل كل x من $[0;\pi]$، $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x$
- حدد الأوضاع النسبية للمنحنيات (C_f)، (C_g) و (T).
- أنشئ في نفس المعلم $(O;I,J)$ المنحنيات (C_f)، (C_g) و (T).

تطبيق1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2\cos x-2+x^2$

- أدرس اتجاه تغير الدالة f' على $\mathbb{R}$.
- استنتج تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.
- قارن بين الدالتين $u : x \mapsto \cos x$ و $v : x \mapsto 1-\dfrac{x^2}{2}$

تطبيق2: نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ
$f_n(x)=(1+x)^n-1-nx$ حيث $n \in \mathbb{N}-\{0;1\}$

- أدرس اتجاه تغير الدالة f_n على $[0,+\infty[$.
- أثبت صحة " متباينة برنولي " التالية:

من أجل كل x من $[0,+\infty[$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $(1+x)^n \geq 1+nx$

2- دراسة دالة الصماء

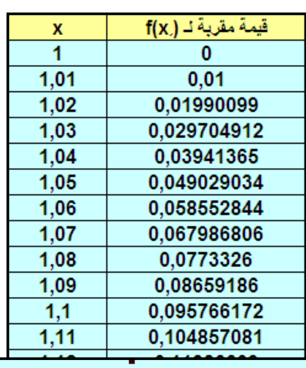
1. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=2x-\sqrt{1+x^2}$
   - أدرس اتجاه تغير الدالة g.
   - بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه. استنتج إشارة g على $\mathbb{R}$.
2. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2\sqrt{1+x^2}-x$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد.

   نعتبر المستقيمين $(D): y=-3x$ و $(D'): y=x$
   - أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
   - بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. استنتج جدول تغيرات الدالة f.
   - أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+3x]$. فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها.
   - بين أن المستقيم (D') مستقيما مقاربا للمنحني (C_f) عند $+\infty$.
   - أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) و (D'). أرسم (C_f)، (D) و (D').

◈ تقريب دالة بواسطة مجدول أو حاسبة بيانية

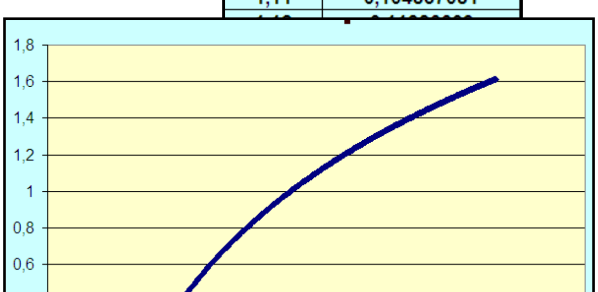
لتكن f دالة تحقق $f(1)=0$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

1. بإتباع " طريقة أولر " أنجز ورقة الحساب الموالية باختيار خطوة $h=0{,}01$ ثم أكمل الجدول التالي:



x	قيمة مقربة لـ f(x)
1	0
1,01	0,01
1,02	0,01990099
1,03	0,029704912
1,04	0,03941365
1,05	0,049029034
1,06	0,058552844
1,07	0,067986806
1,08	0,0773326
1,09	0,08659186
1,1	0,095766172
1,11	0,104857081

x	$f(x)\approx$
2	$0{,}695653$
3	
4	
5	



2. أنشئ تقريبا لمنحنى الدالة f على المجال $[1;5]$.
3. أعد إنجاز نفس الجدول السابق باختيار خطوة

$h=0,001$. قارن بين النتائج المحصل عليها مع تلك التي تقدمها الحاسبة باستعمال اللمسة 

موضوع محلول

تمرين :

نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=ax+\dfrac{b}{4x+2}$ مع a و b عددان حقيقيان.

1. أ - عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب - بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق على كل مجال من المجموعة D_f .

جـ - عين العددين a و b بحيث من أجل كل $x\in D_f$ ، $f'(0)=\dfrac{7}{2}$ و $f(0)=-\dfrac{3}{2}$.

2. أ - أحسب النهايات عند حدود المجموعة D_f .

ب - برّر أنه من أجل كل $x\in D_f$ ، $f'(x)>0$.

جـ - انجز جدول تغيرات الدالة f .

3. نسمي $\mathcal{C}_f$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

أ - برهن أن المستقيم ذي المعادلة $y=\dfrac{1}{2}x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $\mathcal{C}_f$.

ب - أكتب معادلة لمماس المنحنى $\mathcal{C}_f$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

جـ - برهن أنّ النقطة ω ذات الإحداثيتين $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى $\mathcal{C}_f$. أرسم المنحنى $\mathcal{C}_f$.

حل مختصر

1. أ - $D_f=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

ب - لدينا من أجل كل $x\in D_f$ ، $4x+2\neq 0$ إذن الدالة الناطقة $x\mapsto\dfrac{b}{4x+2}$ تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من D_f ؛ الدالة كثير حدود $x\mapsto ax$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من D_f ولدينا مجموع هاتين الدالتين هو الدالة f ؛ إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من D_f .

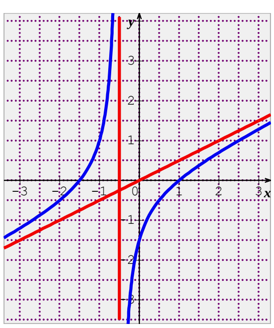
جـ - $f'(x)=a-\dfrac{4b}{(4x+2)^2}$ ؛ $f'(0)=\dfrac{7}{2}$ معناه $a-b=\dfrac{7}{2}$ ؛ $f(0)=-\dfrac{3}{2}$ معناه $\dfrac{b}{2}=-\dfrac{3}{2}$ وبالتالي نجد $b=-3$ و $a=\dfrac{1}{2}$.

2. أ - $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ <}}f(x)=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ >}}f(x)=-\infty$.

ب - $f'(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{12}{(4x+2)^2}$ مجموع عددين موجبين تماما إذن من أجل كل $x\in D_f$ ، $f'(x)>0$.

x	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$ $-\infty$
$f'(x)$	+ ‖	+
$f(x)$	$+\infty$ ↗ $-\infty$ ‖	$+\infty$ ↗ $-\infty$

3. أ - $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left|f(x)\right|=+\infty$ و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)-\dfrac{1}{2}x=0$ إذن المستقيم ذي المعادلة $y=\dfrac{1}{2}x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $\mathcal{C}_f$.



ب - معادلة المماس هي $y=\dfrac{7}{2}x-\dfrac{3}{2}$.

M نقطة من $\mathcal{C}_f$ حيث $(x;y)$ إحداثيتها في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ و $(x';y')$ إحداثيتها في المعلم $\left(\omega;\vec{i};\vec{j}\right)$

من $\overrightarrow{\omega M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\omega}$ ينتج $x'=x+\dfrac{1}{2}$

و $y'=y+\dfrac{1}{4}$ ثم نجد $y'=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{4}{4x+2}+\dfrac{1}{4}$ ؛

تعاليق

استعمال المبرهنة حول مشتق مجموع دالتين .

للحصول على النتائج نطبق المبرهنات على النهايات .

تطبيق مباشر للمعادلة المعروفة $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ مع العلم أن المعاملات أعطيت في 1.

جـ -

استعملنا طريقة تغيير المعلم من المبدأ O إلى المبدأ ω ؛ يمكن استعمال طرق أخرى

$y'=\frac{1}{2}x'-\frac{1}{x'}$ ونبرهن أن الدالة $g: x\mapsto \frac{1}{2}x-\frac{1}{x}$ هي فردية .

موضوع موجه

تنبيه

تمارين الإستمثال (التوسع إلى أبعد حد) يطلب فيها تعيين القيم المثلى (العظمى أو الصغرى) وهذا يؤدي بنا إلى إنشاء دالة نستخرج من دراستها القيم الحدّية حسب المطلوب .

نستفيد من الاستمثال في الحياة الاقتصادية (مثل شراء كمية كبيرة من البضائع بأقل ثمن) .نريد في الموضوع المقترح استخراج روافد خشبية من جذع شجرة بدون تبذير .

تمرين (بكالوريا)

من جذع شجرة دائري المقطع قطره D ، نريد الحصول على راقد مستطيل المقطع قاعدته x وارتفاعه h .

نحصل على المقاومة القصوى (العظمى) في الانحناء كلما كان المقدار xh^2 كبيرا مع $h>x$.

I) f هي الدالة المعرفة على المجال $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ بـ : $f(x)=-x^3+\frac{9}{4}x$.

$\mathscr{C}$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ حيث يؤخذ $\|\vec{i}\|=2\|\vec{j}\|=2cm$.

1. أحسب $f'(x)$ وأنجز جدول تغيرات الدالة f .
2. أكتب معادلة لِـ t_1 مماس المنحنى $\mathscr{C}$ عند النقطة O ثم معادلة لِـ t_2 مماس المنحنى $\mathscr{C}$ عند نقطته A ذات الفاصلة $\frac{3}{2}$ ؛ ثم أدرس على المجال $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ الوضعية النسبية للمنحنى $\mathscr{C}$ بالنسبة لِـ t_1 وبالنسبة لِـ t_2 .
3. أنشئ المماسين t_1 و t_2 ثم المنحنى $\mathscr{C}$.

II) تطبيق : نضع $D=1{,}5m$. (D هو قطر المقطع الدائري لجذع الشجرة)

1. اشرح لماذا $x^2+h^2=\frac{9}{4}$.
2. أحسب xh^2 بدلالة x .
3. استعمل الجزء **I)** لإيجاد x و h بحيث تكون للرافد أقصى مقاومة للانحناء .

توجيهات

I) 1. حلل $f'(x)$ إلى جداء عاملين ثم استنتج إشارته بسهولة .

2. طبّق مباشرة معادلة المماس ولدراسة الوضعية ، أدرس إشارة العبارة $f(x)-t(x)$ حيث $y=t(x)$ هي معادلة للمماس .

II) 1. استعمل مبرهنة فيثاغورس لإيجاد العلاقة بين x ، h و D .

2. استخرج h^2 من العلاقة السابقة ثم قم بتعويضها تحصل على $xh^2=f(x)$.

3. استعمل جدول تغيرات الدالة f لتعيين القيمة الحدّية العظمى .

التاريخ: 2014/10/22 **المستوى:** ثالثة علوم تجريبية **المـدة:** 06 ساعات

المجال التعليـمـي: التحليل.

الـوحدة التعليمية (01): الدوال العددية.

مـوضـوع الدرس: الدالة الاسية

الوسـائل التعليـميـة: السبورة ، الكتاب المدرسي، الآلة الحاسبة البيانية

الـمـراجــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة

توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية.

حل مشكلات بتوظيف الدوال الأسية

❖ نشاط أول

مقدمة: تتم نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية و البيولوجية والاقتصادية و غيرها باستخدام دالة f متناسبة مع دالتها المشتقة f'. سوف نهتم هنا بدالة من هذا النوع و هي دالة تساوي دالتها المشتقة.

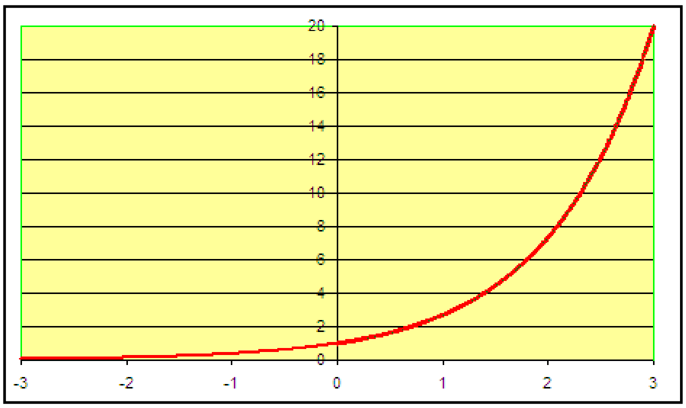
فرضية: نقبل أنه توجد دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرطين التاليين:

$$f'=f \quad (1) \qquad \text{و} \qquad f(0)=1 \quad (2)$$

1) باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h=0{,}005$ أنجز جدولا يتضمن القيم التقريبية لـِ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[-3;3]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f .

نذكر أن $f(x_0+h)\approx f(x_0)+hf'(x_0)$ و بما أن $f'=f$ فإن $f(x_0+h)\approx f(x_0)(1+h)$

لدينا كذلك $f(x_0-h)\approx f(x_0)-hf'(x_0)$ و بما أن $f'=f$ فإن $f(x_0-h)\approx f(x_0)(1-h)$



h	x	f(x-h)=f(x)*(1-h)	x	f(x+h)=f(x)*(1+h)
0,005	0	1	0	1
	-0,01	0,995	0,01	1,005
	-0,01	0,990025	0,01	1,010025
	-0,02	0,985074875	0,02	1,015075125
	-0,02	0,980149501	0,02	1,020150501
	-0,03	0,975248753	0,03	1,025251253
	-0,03	0,970372509	0,03	1,030377509
	-0,04	0,965520647	0,04	1,035529397
	-0,04	0,960693044	0,04	1,040707044
	-0,05	0,955889578	0,05	1,045910579
	-0,05	0,95111013	0,05	1,051140132
	-0,06	0,94635458	0,06	1,056395833
	-0,06	0,941622807	0,06	1,0616778[illegible]2
	-0,07	0,936914693	0,07	1,066986201

2) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $h(x)=f(x)f(-x)$

- بين أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$. استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)f(-x)=1$
(3)
- برهن بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)\neq 0$ (4)

3) نفرض أنه توجد دالة ثانية g تحقق $g'=g$ و $g(0)=1$. بما أن الدالة f لا تنعدم على $\mathbb{R}$، نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $k(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

- بين أن k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g(x)=f(x)$.

4) ليكن y عدد حقيقي كيفي ثابت. نعتبر الدالة i المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $i(x)=\frac{f(x+y)}{f(x)}$

- بين أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $i(x)=f(y)$.
- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $f(x+y)=f(x)f(y)$

(5)

- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$، $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$ (6)

5) ليكن n عددا صحيحا نسبيا و لتكن j الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $j(x)=\frac{f(nx)}{[f(x)]^n}$

- عين الدالة المشتقة للدالة j.
- استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(nx)=[f(x)]^n$ (7)

تعريف: تسمى الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$ الدالة الأسية (النيبيرية).
و نرمز إليها بالرمز" $\exp$ ".

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\exp(x)$

6) أكتب باستعمال الترميز السابق كل النتائج (1)، (2)، ... ، (7).

- ماذا تستنتج

I. الدالة الأسية

1. عموميات

يسمح النشاط الأول من استخلاص النتائج التالية:

مبرهنة و تعريف: توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$.
نرمز إلى هذه الدالة بالرمز" $\exp$ " و نسميها الدالة الأسية (النيبيرية).

ملاحظة: الدالة الأسية هي إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y'=y$ التي تحقق $y(0)=1$.

نتائج: * $\exp(0)=1$.

* من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp'(x)=\exp(x)$.

2. خواص جبرية

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

(1) $\exp(x)\neq 0$ (2) $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$ (3) $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$.

(4) $\exp(x-y)=\frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.   (5) $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$.

البرهان: أنظر النشاط الأول.

3. العدد e و الترميز e^x

- العدد e هو صورة العدد1 بالدالة الأسية أي $e=\exp(1)$. تعطينا الحاسبة $e\approx 2,718281828$.
- من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=\exp(n\times 1)=[\exp(1)]^n$.

لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\exp(n)=e^n$.

اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $\exp(x)$ بـِ e^x.

من أجل كل عدد حقيقي x، $\exp(x)=e^x$

تقرأ e^x: " أسية x ".

ملاحظة: الترميز السابق متلائم مع خواص القوى في الحالة التي يكون فيها الأس عددا صحيحا.

باستعمال الاصطلاح السابق تكتب خواص الدالة الأسية كما يلي:

قواعد الحساب: من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

- $e^0=1$
- $\exp'(x)=e^x$
- $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x+y}=e^xe^y$
- $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$
- $e^{nx}=\left(e^x\right)^n$

4. تمارين

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

1. بين أن الدالة f فردية.
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}$

الحل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $(-x)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و لدينا:

$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{\dfrac{1}{e^x}-1}{\dfrac{1}{e^x}+1}=\dfrac{\dfrac{1-e^x}{e^x}}{\dfrac{1+e^x}{e^x}}=-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$. إذن الدالة f دالة فردية.

2.
$$\frac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}=\frac{2\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{1+\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2}=\frac{2\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\dfrac{\left(e^x+1\right)^2+\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2}}=\frac{2\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)}{\dfrac{2\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}}=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\frac{\left(e^x+1\right)^2}{\left(e^{2x}+1\right)}$$

و منه $\dfrac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}=\dfrac{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)}=\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)}=f(2x)$

و هكذا نجد أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}$

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(-x)+f(x)=2$. فسر بيانيا النتيجة.
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1$

الحل: ليكن x عددا حقيقيا كيفيا.

.1 $f(-x)+f(x)=\dfrac{e^x\left(3e^{-x}-1\right)}{e^x\left(e^{-x}+1\right)}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{3-e^x}{1+e^x}+\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{2e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{2\left(e^x+1\right)}{e^x+1}$.

و منه $f(-x)+f(x)=2$

المنحني الممثل للدالة f متناظر بالنسبة على النقطة $A(0;1)$.

.2 $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1=\dfrac{4e^x-e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$.

.II دراسة الدالة الأسية

.1 اتجاه تغير الدالة الأسية

خاصية1: من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x>0$.

البرهان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^x=e^{2\times\frac{x}{2}}=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ و بما أن $e^x\neq 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^x>0$.

خاصية2: الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

البرهان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\exp'(x)=e^x$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\exp'(x)>0$.

نتائج: • من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^a<e^b$ يعني $a<b$ و $e^a=e^b$ يعني $a=b$.

• من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $0<e^x<1$ يعني $x<0$ و $e^x>1$ يعني $x>0$.

.2 النهايات

خواص: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

البرهان:

• نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-x$. من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)=e^x-1$.

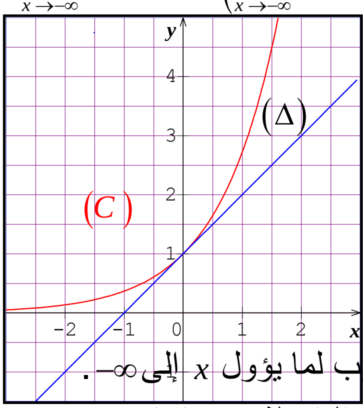
و بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$ $e^x\geq 1$ فإن $f'(x)\geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $f(0)=1$.

إذن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f(x)\geq 0$ أي $e^x\geq x$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

• من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x=\dfrac{1}{e^{-x}}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty\right)$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

.3 جدول تغيرات - التمثيل البياني

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$\exp'(x)$	+
e^x	0 ↗ 1 ↗ e ↗ $+\infty$



• المنحني (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول x إلى $-\infty$.

• لدينا $\exp'(0)=1$ و $e^0=1$. إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $(\Delta):y=x+1$.

• من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\exp(0+x)-\exp(0)}{x}=\exp'(0)=1$ إذن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

نتيجة: الدالة $x \mapsto 1+x$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0.
أي من أجل x قريب من 0 لدينا: $e^x \approx 1+x$.

4. تمارين

تمرين 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

$(1)\ e^{2x}+3=0 \quad (2)\ e^{-2x+1}-1=0 \quad (3)\ e^{-2x-1}-e^{x}<0 \quad (4)\ e^{2x}>2-e^{x}$

طريقة: المعادلة $e^{u(x)}=e^{v(x)}$ تعني $u(x)=v(x)$.
المتراجحة $e^{u(x)}\geq e^{v(x)}$ تعني $u(x)\geq v(x)$.

الحل:

(1) تعني $e^{2x}=-3$. هذه المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{2x}>0$. إذن $S=\phi$.

(2) تعني $e^{-2x+1}=1$ أي $e^{-2x+1}=e^{0}$ أي $-2x+1=0$ و منه $x=0,5$ إذن $S=\{0,5\}$.

(3) تعني $e^{-2x-1}<e^{x}$ أي $-2x-1<x$ أي $x>-\dfrac{1}{3}$ و منه $S=\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

(4) تعني $e^{2x}+e^{x}-2\leq 0$. بوضع $e^{x}=X$ نحصل على $X^{2}+X-2\leq 0$

جذرا كثير الحدود $X^{2}+X-2$ هما -2 و 1 و منه $X^{2}+X-2\leq 0$ تعني $X<-2$ أو $X>1$

$X<-2$ تعني $e^{x}<-2$. هذه المتراجحة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

$X>1$ تعني $e^{x}>1$ أي $x>0$. إذن مجموعة حلول المتراجحة (4) هي $S=]0;+\infty[$.

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^{*}$ بِـ: $f(x)=\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

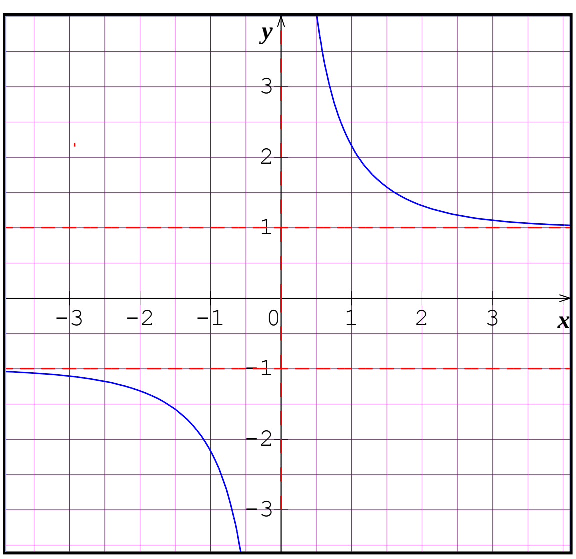
1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة للمنحني (C).

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المنحني (C) معلم متعامد و متجانس.

الحل: 1)

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=-1$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$.
- نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ و منه لدينا حالة عدم التعيين.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}\left(1+e^{-x}\right)}{e^{x}\left(1-e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.



- لدينا $\lim\limits_{x\to0}\left(e^{x}+1\right)=2$ و $\lim\limits_{x\to0}\left(e^{x}-1\right)=0$.

نعلم أن $e^{x}<1$ يعني $x<0$ و $e^{x}>1$ يعني $x>0$

و بالتالي $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)=+\infty$.

يقبل المنحني (C) ثلاث مستقيمات مقاربة معادلاتها:

$x=0$، $y=-1$ و $y=1$.

2) f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;0[$، $]0;+\infty[$

و لدينا $f'(x)=\dfrac{-2e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}$ و بالتالي فالدالة f

متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$، $]0;+\infty[$.

III. دراسة الدالة $\exp\circ u$

1. النهايات
لدراسة نهاية دالة $\exp\circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{-x+2}$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+2}=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.
- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+2}=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2. اتجاه التغير

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

البرهان:

نعلم أن الدالة " $\exp$ " متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^2-1}$.

نلاحظ أن $f=\exp\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $u(x)=x^2-1$.

بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

وبما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

3. المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

البرهان:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و علما ان الدالة " $\exp$ " قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة المركبة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:

من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)\times(\exp)'[u(x)]=u'(x)\times(\exp)[u(x)]$

أي من أجل كل x من I، $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

مثال:

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^2+x+1}$ هي $f'(x)=(2x+1)e^{x^2+x+1}$.
- مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$ هي $g'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^3+3x+1}$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

1. أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.
2. اوجد معادلة المماس للمنحنى (C) عند النقطة $A(0;e)$

الحل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.
بما أن $e^{2x}>0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
2. يكون المماس عند نقطة من (C) فاصلتها x موازيا للمستقيم (Δ) يعني $f'(x)=\dfrac{1}{3}$
يكون لدينا إذن $\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}=\dfrac{1}{3}$ أي $6e^{2x}=e^{2x}+1$ و هذا يعني $e^{2x}=\dfrac{1}{5}$ أي $2x=-\ln 5$ و منه
$x=-\dfrac{\ln 5}{2}$
و بالتالي توجد نقطة وحيدة من (C) فاصلتها $x=-\dfrac{\ln 5}{2}$ يكون المماس عندها موازيا للمستقيم (Δ).

تمرين 2: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$
(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلي
معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$
1) أ) ادرس تغيرات الدالة f .
ب) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$. فسر النتائج هندسيا.
2) بين أن النقطة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C).
3) عين معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة A .

IV. المعادلة التفاضلية من الشكل $y'=ay+b$

حل المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ هو تعيين كل الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و التي تحقق من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=af(x)+b$ حيث a و b عددان حقيقيان مع $a\neq 0$.

ملاحظة: العديد من المسائل في العلوم التجريبية، الاقتصاد، الكهرباء و الميكانيك تؤدي إلى دراسة هذا النوع من المعادلات التفاضلية و التي غالبا ما نكتبها على الشكل: $\dfrac{dy}{dx}=ay+b$

1. المعادلة التفاضلية $y'=ay$ مع $a\neq 0$

مبرهنة: a عدد حقيقي غير معدوم.
الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=ay$ هي الدوال $x\mapsto Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

البرهان: نعتبر المعادلة التفاضلية: (E) $y'=ay$ حيث $a\neq 0$

- أثبت أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي هي حل للمعادلة التفاضلية (E).
- نفرض أن الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E). أثبت أن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=e^{-ax}g(x)$ دالة ثابتة.استنتج أن $g(x)=Ce^{ax}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $3y'-2y=0$.

2. المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $a\neq 0$

مبرهنة: a و b عددان حقيقيان مع a غير معدوم.

الحلول على $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ هي الدوال $x\mapsto Ce^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث C عدد حقيقي ثابت كيفي.

البرهان: نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E')\quad y'=ay+b$ حيث $a\neq 0$

- أثبت أن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث C عدد حقيقي كيفي هي حل للمعادلة (E').
- نفرض أن الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E'). لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=g(x)+\frac{b}{a}$
  - أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $h'(x)=ah(x)$.
  - استنتج من مبرهنة الجزء1 عبارة $h(x)$ و من ثم عبارة $g(x)$.

تطبيق: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية: $y'-2y=3$.

خاصية: من أجل كل ثنائية أعداد حقيقية $(x_0;y_0)$، المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $a\neq 0$ تقبل حلا وحيدا f معرفة على $\mathbb{R}$ و تحقق الشرط: $f(x_0)=y_0$.

البرهان: إذا كانت $f(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$ بين أن $C=e^{-ax_0}\left(y_0+\frac{b}{a}\right)$.

تطبيق: نعتبر المعادلة التفاضلية $(1)\quad 2y'+y=1$

1. حل المعادلة (1),
2. عين الحل f للمعادلة (1) بحيث $f(-1)=2$.
3. أدرس تغيرات الدالة f ثم أرسم في معلم متعامد و متجانس تمثيلها البياني.

التاريخ: 2014/10/29 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 04 ساعات

المجال التعليـمــي: التحليل.

الـوحدة التعليميـة (01): الدوال العددية.

مــوضـوع الدرس: الدالة اللوغاريثمية النبيرية

الوسـائل التعليـمية: السبورة ، الكتاب المدرسي، الآلة الحاسبة البيانية

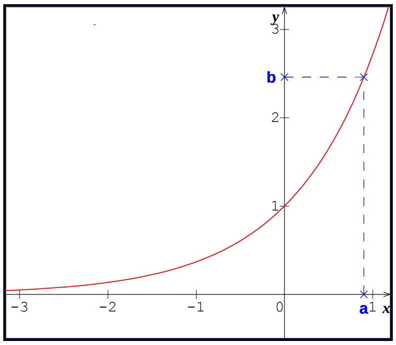
الـمـراجــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة

توظيف خواص الدالة اللوغاريثمية النبيرية.

حل مشكلات بتوظيف الدوال اللوغاريتمية النبيرية..

نشاط



الدالة الأسية مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، من أجل كل عدد حقيقي b من $]0;+\infty[$ يوجد عدد حقيقي وحيد a من $\mathbb{R}$ بحيث $e^a = b$.

بوضع $a = \ln(b)$ نكون بذلك قد عرفنا دالة جديدة.

تعريف: تسمى هذه الدالة " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " و نرمز إليها بالرمز " $\ln$ ".

1) حساب بعض الصور

- أحسب الأعداد التالية: $\ln(1)$ ، $\ln(e)$ ، $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ و $\ln(e^2)$.
- عين قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد $\ln(2)$.
- بين أن $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ ثم استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

2) التمثيل البياني

نعتبر في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنيين (C) و (C') الممثلين على التوالي للدالتين " $\exp$ " و " $\ln$ ".

- ماذا يمكن القول عن النقطتين $M(x;y)$ و $M'(y;x)$ حيث x، y عددان حقيقيان.
- a عدد حقيقي و b عدد حقيقي موجب تماما.بين أن النقطة $M(a;b)$ تنتمي إلى المنحني (C) إذا وفقط إذا كانت النقطة $M'(b;a)$ تنتمي إلى المنحني (C').
- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C) و (C') ؟
- أرسم المنحنى (C) ثم المنحنى (C') في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3) وضع تخمينات

- خمن اتجاه تغير الدالة " $\ln$ " على المجال $]0;+\infty[$.
- خمن نهايتي الدالة " $\ln$ " عند 0 و عند $+\infty$.

I. الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1. اللوغاريتم النيبيري لعدد

مبرهنة و تعريف: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a$.

يسمي هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد a " و نرمز إليه بالرمز " $\ln a$ ".

مثال: * العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^b = 2$ هو إذن $\ln 2$.

2. تعريف الدالة " ln "

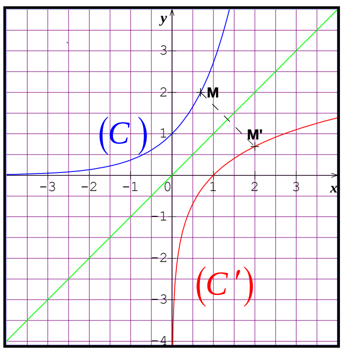
تعريف: نسمي " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " الدالة التي نرمز إليها بالرمز " $\ln$ " و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج:

1. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $x = e^y$ يعني $y = \ln x$.
2. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $e^{\ln x} = x$.
3. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\ln\left(e^x\right) = x$.
4. بما أن $e^0 = 1$ فإن $\ln 1 = 0$ و بما أن $e^1 = e$ فإن $\ln e = 1$.

ملاحظة: نعبر عن النتيجة "1" بالقول أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " $\ln$ " هي الدالة العكسية للدالة الأسية " $\exp$ ".

خاصية: في معلم متعامد و متجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (المنصف الأول).



البرهان: نرمز بِـ (C) إلى منحنى الدالة $x \mapsto e^x$ و بِـ (C') إلى منحنى الدالة $x \mapsto \ln x$.

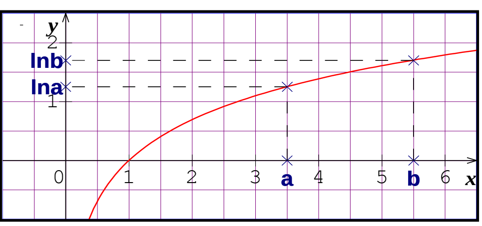
بما أن $y = e^x$ يعني $x = \ln y$ فإن القول أن النقطة $M(x;y)$ تنتمي إلى (C) يعني أن النقطة $M'(y;x)$ تنتمي إلى (C').

و بما أن $M(x;y)$ و $M'(y;x)$ متناظرتين بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ فإن المنحنيين (C) و (C') متناظرين بالنسبة إلى هذا المستقيم.

3. اتجاه تغير الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

خاصية: الدالة اللوغاريتمية النيبيرية متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

البرهان: a و b عددان حقيقيان كيفيان من $]0;+\infty[$ حيث $a < b$. $a < b$ يعني $e^{\ln a} < e^{\ln b}$ و بما أن الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن $\ln a < \ln b$.



نتائج: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$:

1. $\ln a = \ln b$ يعني $a = b$.
2. $\ln a < \ln b$ يعني $a < b$.
3. $\ln a > 0$ يعني $a > 1$ و $\ln a < 0$ يعني $0 < a < 1$ كما أن $\ln 1 = 0$.

4. تمارين

تمرين 1: حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$\ln(2x-1) = 2 \ (1)$ $\qquad$ $\ln(x-1) \geq -3 \ (2)$ $\qquad$ $\ln(x+2) \leq 5 \ (3)$

طريقة: لحل معادلة من الشكل $\ln\left[u(x)\right] = p$ (على التوالي متراجحة من الشكل $\ln\left[u(x)\right] < p$) :

- نعين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).
- نحل في D المعادلة $u(x) = e^p$ (على التوالي المتراجحة $u(x) < e^p$).

الحل:

1. لدينا $D = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. (1) تعني $2x-1 = e^2$ أي $x = \frac{1+e^2}{2}$ و منه مجموعة الحلول هي $S = \left\{\frac{1+e^2}{2}\right\}$

2. لدينا $D=]1;+\infty[$. (2) تعني $x-1>e^{-3}$ أي $x>1+e^{-3}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=]1+e^{-3};+\infty[$

3. لدينا $D=]-2;+\infty[$. (3) تعني $x+2\le e^{5}$ أي $x\le e^{5}-2$ و منه مجموعة الحلول هي $S=]-2;e^{5}-2]$

تمرين 2: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$\ln(x^2-1)=\ln(x)$ (1) $\qquad$ $\ln(x^2-1)\le\ln(x)$ (2)

طريقة: لحل المعادلة $\ln[u(x)]=\ln[v(x)]$ (على التوالي المتراجحة $\ln[u(x)]<\ln[v(x)]$) :

- نعين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).
- نحل في D المعادلة $u(x)=v(x)$ (على التوالي المتراجحة $u(x)<v(x)$).

الحل:

1. تكون المعادلة معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x^2-1>0$ و $x>0$ و منه $D=]1;+\infty[$.

(1) تعني $x^2-1=x$ أي $x^2-x-1=0$. حلول المعادلة $x^2-x-1=0$ هما $x'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $x''=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

نلاحظ أن x'' عنصر من D بينما x' لا تنتمي إلى D . و هكذا مجموعة الحلول هي $S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2. مجموعة تعريف المتراجحة هي $D=]1;+\infty[$. لدينا (2) تعني $x^2-x-1\le 0$. مجموعة حلول المتراجحة $x^2-x-1\le 0$ هي $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ و بالتالي فمجموعة حلول المتراجحة (2) هي تقاطع مجموعة التعريف D مع المجال $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. نجد هكذا أن مجموعة الحلول هي: $\left]1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

II. الخواص الجبرية

1. الخاصية الأساسية

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

البرهان: a و b عددان حقيقيان من $]0;+\infty[$. نضع $\alpha=\ln(ab)$ و نضع $\beta=\ln a+\ln b$ و بالتالي:

$e^{\alpha}=ab$ و $e^{\beta}=e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln a}\times e^{\ln b}=ab$. إذن $e^{\alpha}=e^{\beta}$ و منه $\alpha=\beta$ أي $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

2. نتائج

نتيجة1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ و $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

البرهان:

* من أجل a من $]0;+\infty[$ ، $a\times\frac{1}{a}=1$ و منه $\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=0$ أي $\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{a}\right)=0$ و منه $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$.

* من أجل a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\left(\frac{1}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

ملاحظة: يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما و هكذا يكون لدينا:

من أجل كل أعداد حقيقية a_1 ، a_2 ، ...، a_n من $]0;+\infty[$ ، $\ln(a_1a_2...a_n)=\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n$.

نتيجة2: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\ln(a^n)=n\ln a$.

البرهان: a عدد حقيقي من $]0;+\infty[$ و n عدد صحيح نسبي.

نميز الحالات التالية:

1. الحالة الأولى: $n\ge 0$

نستعمل البرهان بالتراجع. و من أجل ذلك نسمي $P(n)$ الخاصية $\ln(a^n)=n\ln a$.

- من أجل $n=0$ لدينا: $\ln(a^0)=\ln(1)=0=0\ln a$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- فرضية التراجع: نفرض صحة $P(n)$ من أجل n حيث $n\geq 0$ أي $\ln(a^n)=n\ln a$.
- وراثية الخاصية ابتداء من الرتبة 0: نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $\ln(a^{n+1})=(n+1)\ln a$. لدينا:

$\ln(a^{n+1})=\ln(a^n\times a)=\ln(a^n)+\ln a=n\ln a+\ln a=(n+1)\ln a$ و منه $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $\ln(a^n)=n\ln a$.

2. الحالة الثانية: $n<0$

$\ln(a^n)=\ln\left(\dfrac{1}{a^{-n}}\right)=-\ln(a^{-n})=-(-n)\ln a=n\ln a$ لأن $-n>0$.

نتيجة3: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$، $\ln(\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\ln a$.

البرهان: من أجل a من $]0;+\infty[$، $\ln a=\ln\left[\left(\sqrt{a}\right)^2\right]=2\ln(\sqrt{a})$ و منه $\ln(\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\ln a$.

3. تمارين

تمرين 1: حل المعادلتين التاليتين:

$\ln(x-1)(x+2)=2\ln 2\quad(1)$ و $\ln(x-1)+\ln(x+2)=2\ln 2\quad(2)$

طريقة: الكتابة $\ln a+\ln b$ تفرض أن يكون $a>0$ و $b>0$ بينما الكتابة $\ln(a\times b)$ تفرض أن يكون $ab>0$ و يعني هذا أنه يمكن للعددين a و b أن يكونا سالبين معا.

الحل:

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x-1)(x+2)>0$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

(1) تعني $\ln(x-1)(x+2)=\ln 4$ أي $(x-1)(x+2)=4$ أي $x^2+x-6=0$. -3 و 2 حلول هذه المعادلة تنتمي إلى D و منه مجموعة الحلول هي $S=\{-3;2\}$.

2. تكون المعادلة (2) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $(x-1)>0$ و $(x+2)>0$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]1;+\infty[$.

(2) تعني $\ln(x-1)(x+2)=\ln 4$ أي $(x-1)(x+2)=4$ أي $x^2+x-6=0$. من بين -3 و 2 حلول هذه المعادلة، الحل 2 هو الوحيد الذي ينتمي إلى D و منه مجموعة الحلول هي $S=\{2\}$.

تمرين 2: حل المتراجحتين التاليتين:

$\ln(x-1)(x+2)\leq 2\ln 2\quad(1)$ و $\ln(x-1)+\ln(x+2)\leq 2\ln 2\quad(2)$

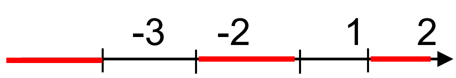
طريقة: لمعاينة حلول متراجحة يمكنك استعمال محور.

الحل:

1. مجموعة تعريف المتراجحة (1) هي $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

(1) تعني $\ln(x-1)(x+2)\leq\ln 4$ أي $x^2+x-6\leq 0$.

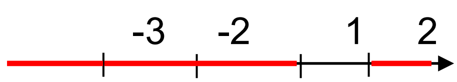
مجموعة الحلول هي $[-3;2]\cap D=[-3;-2[\cup]1;2]$



2. مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي $D=]1;+\infty[$.

(2) تعني $\ln(x-1)(x+2)\leq\ln 4$ أي $x^2+x-6\leq 0$.

مجموعة الحلول هي $[-3;2]\cap D=]1;2]$



تمرين 3: حل المعادلة التالية: $2[\ln(x)]^2+\ln(x)-6=0$

طريقة: لحل معادلة من الشكل $a[\ln(x)]^2+b\ln(x)+c=0$ مع $a\neq 0$ نضع $X=\ln x$.

نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ ثم نستنتج قيم x في حالة وجودها.

الحل: مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]0;+\infty[$.

بوضع $X=\ln x$ نحصل على المعادلة $2X^2+X-6=0$ ذات الحلين -2 و $\frac{3}{2}$.

$\ln x=-2$ تعني $x=e^{-2}$ و $\ln x=\frac{3}{2}$ تعني $x=e^{\frac{3}{2}}$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\left\{e^{-2};e^{\frac{3}{2}}\right\}$

III. دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

1. النهايات

خواص: نهاية الدالة " ln " عند $+\infty$ هي $+\infty$ و نهايتها عند 0 هي $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \quad (1) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\ln x=-\infty \quad (2)$$

البرهان:

- ليكن A عددا حقيقيا موجبا تماما. الدالة " ln " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و منه إذا كان x عددا حقيقيا يحقق $x>e^A$ فإن $\ln x>A$ و هكذا فإن المجال $]A;+\infty[$ يشمل كل قيم $\ln x$ من أجل x كبير بالقدر الكافي. و هذا يعني أن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.
- من أجل x من $]0;+\infty[$، نضع $X=\frac{1}{x}$ و منه $\ln X=\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$. لدينا: $\lim_{x\xrightarrow{>}0} X=+\infty$

و من النتيجة (1) لدينا: $\lim_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$ و هكذا فإن $\lim_{x\to0}\ln x=\lim_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$.

2. الاستمرارية و الاشتقاقية

خواص: الدالة "ln" مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

البرهان:

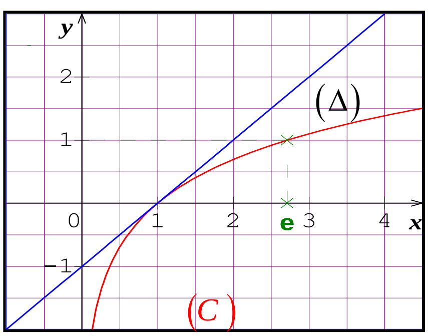
- نقبل بدون برهان أن الدالة "ln" مستمرة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$.
- لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بِـ $f(x)=e^{\ln x}$. f هي مركب الدالة "ln" متبوعة بالدالة "exp" فهي

إذن قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\ln'(x)\times e^{\ln x}$ و بما أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $e^{\ln x}=x$

فإن $f'(x)=\ln'(x)\times x$ من جهة و $f'(x)=1$ $(f(x)=x)$ من جهة ثانية. نستنتج هكذا أن $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

3. جدول تغيرات الدالة" ln "

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	+	
$\ln x$	‖ $-\infty$	0 ↗	$+\infty$



- المنحنى (C) الممثل للدالة "ln" يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.
- لدينا $\ln'(1)=1$ و $\ln 1=0$. إذن يقبل المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $(\Delta): y=x-1$.
- من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=\ln'(1)=1$ إذن $\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$ أو $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

نتيجة: الدالة $h\mapsto h$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة $h\mapsto\ln(1+h)$ بجوار 0.

أي من أجل h قريب من 0 لدينا: $\ln(1+h)\approx h$.

4.تمارين

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=(\ln x)^2-\ln x$

1. أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.
2. عين الدالة f'. أدرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.
3. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أرسم تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

الحل:

1. نعلم أن $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0}(\ln x)^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0}(-\ln x)=+\infty$.

لدينا $f(x)=\ln x\left[(\ln x)-1\right]$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2. بما أن الدالة " $\ln$ " قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'(x)=2\times\frac{1}{x}\times\ln x-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(2\ln x-1)$. بما أن $x>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $(2\ln x-1)$. لدينا $2\ln x-1\geq0$ تعني $\ln x\geq\frac{1}{2}$ أي $x\geq e^{\frac{1}{2}}$ ومنه:

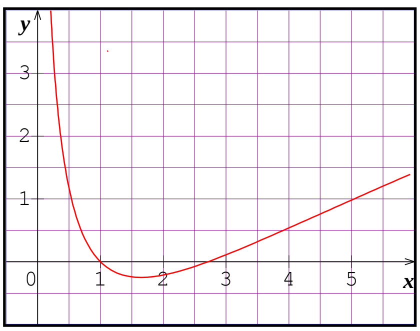
- من أجل كل x من $\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right]$، $f'(x)\leq0$ و بالتالي f متناقصة تماما على $\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right]$.

- من أجل كل x من $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$، $f'(x)\geq0$ و بالتالي f متزايدة تماما على $\left[e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$.

3. باستعمال قيم مساعدة نحصل على التمثيل البياني للدالة f.

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

x	$f(x)$
$-0,5$	
1	
e	
3	
4	
5	



تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـِ $f(x)=\ln(x+2)$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

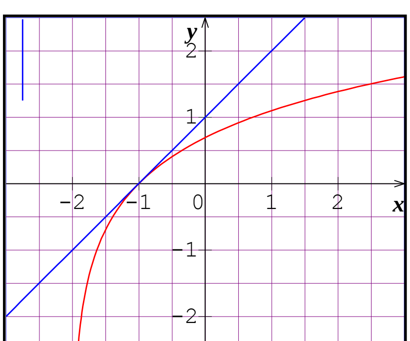
عين نقطة (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y=x$. أرسم (C_f) و هذا المماس.

الحل: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-2;+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\frac{1}{x+2}$.

يكون المماس عند نقطة من (C_f) فاصلتها x موازيا لِـ $(\Delta):y=x$ لما يكون $f'(x)=1$ أي $\frac{1}{x+2}=1$ و منه $x=-1$ مع $f(-1)=0$.

معادلة المماس عند النقطة $A(-1;0)$ هي: $y=x+1$.

(C_f) هو صورة منحنى الدالة " $\ln$ " بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{i}$.



I.
II.
III.
IV. دراسة الدالة $\ln\circ u$

1. النهايات

لدراسة نهاية دالة $\ln\circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln(x-2)$.

- لدينا $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ و بما أن $\lim_{X\to 0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim_{x\to 2}\ln(x-2)=-\infty$ أي $\lim_{x\to 2}f(x)=-\infty$
- لدينا $\lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ و بما أن $\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\ln(x-2)=+\infty$ أي $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2. اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

البرهان:
نعلم أن الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون
للدالتين u و $\ln\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln\left(\frac{3}{x-1}\right)$.

نلاحظ أن $f=\ln\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $u(x)=\frac{3}{x-1}$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

3. المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن الدالة $\ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على I
و لدينا من أجل كل x من I، $(\ln\circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

البرهان:
إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على I و علما ان الدالة " $\ln$ " قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة المركبة $\ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:
من أجل كل x من I، $(\ln\circ u)'(x)=u'(x)\times(\ln)'[u(x)]=u'(x)\times\frac{1}{u(x)}$
أي من أجل كل x من I، $(\ln\circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

مثال: * مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\ln(x^2+x+1)$ هي $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

* مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\ln(e^x+1)$ هي $g'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

3. تمارين

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)$

أدرس نهايتي الدالة f عند 1 و عند $+\infty$.

الحل:

- لدينا من جهة: $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+1\right)=2$ و بما أن $\lim\limits_{X\to 2}\ln X=\ln 2$ فإن $\lim\limits_{x\to 1}\ln\left(x^2+1\right)=\ln 2$

و لدينا من جهة ثانية: $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0$ و بما أن $\lim\limits_{X\to 0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to 1}\ln\left(x^2-1\right)=-\infty$

نستنتج مما سبق أن $\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln\left(x^2+1\right)-\ln\left(x^2-1\right)\right]=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-1\right)=+\infty$. لدينا إذن حالة عدم التعيين.

من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$. بما أن $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)=1$ و علما أن $\lim\limits_{X\to 1}\ln X=0$

نستنتج أن $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)=0$ أي $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=0$.

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ بـ $f(x)=x+3\ln(2x-1)$

1. أحسب $f'(x)$
2. عين معادلة لـِ (Δ) مماس المنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها1.

الحل:

1.من أجل كل x من $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$، $f'(x)=1+3\times\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{2x+5}{2x-1}$.

2.لدينا: $f(1)=1$ و $f'(1)=7$. لدينا $(\Delta):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(\Delta):y=7x-6$.

تمرين 3: جدول التغيرات المقابل هو دالة u

استنتج جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $[-3;+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=\ln\left[u(x)\right]$

x	-3		1		$+\infty$
$u(x)$	3	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

الحل: نلاحظ من جدول تغيرات الدالة u أنه من أجل كل x من $[-3;+\infty[$، $u(x)\geq 0$ و منه فالدالة u موجبة تماما على المجال $[-3;+\infty[$. إذن للدالتين u و $f=\ln\circ u$ نفس مجموعة التعريف. نعلم بالإضافة إلى ذلك أن لهما نفس اتجاه التغير. لدينا $f(-3)=\ln\left[u(-3)\right]=\ln 3$ و $f(1)=\ln\left[u(1)\right]=\ln e=1$.

بما أن $\lim\limits_{x\to +\infty}u(x)=+\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left[u(x)\right]=+\infty$

x	-3		1		$+\infty$
$f(x)$	$\ln 3$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

V. دالة اللوغاريتم العشري

1. دالة اللوغاريتم العشري

تعريف: نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز" $\log$ " و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

ملاحظة: $\log 1 = 0$ و $\log 10 = 1$.

2. خواص

خاصية1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، $\log(ab) = \log a + \log b$.

البرهان: a و b عددان حقيقيان من $]0;+\infty[$. لدينا:

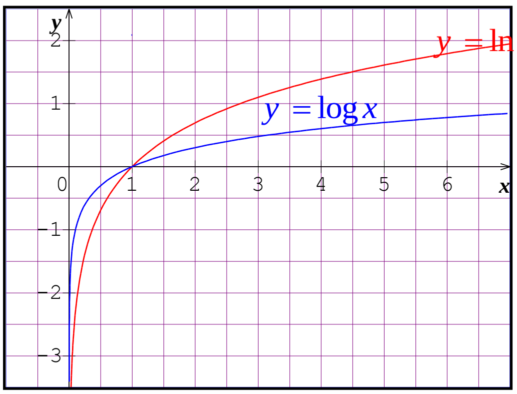
$$\log(ab) = \frac{\ln(ab)}{\ln 10} = \frac{\ln a + \ln b}{\ln 10} = \frac{\ln a}{\ln 10} + \frac{\ln b}{\ln 10} = \log a + \log b$$

نتائج: كل الخواص الجبرية للدالة " $\ln$ " تبقى محققة من قبل الدالة " $\log$ " ومنه:

1. من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$، $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$.
2. من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\log(a^n) = n\log a$.

حالة خاصة: من أجل كل عدد صحيح نسبي n، $\log(10^n) = n$ لأن $\log 10 = 1$.

خاصية2: الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.



البرهان: من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\log x = \dfrac{1}{\ln 10} \times \ln x$

و بما أن $\ln 10 > 0$ فإن للدالتين" $\log$ " و" $\ln$ " نفس اتجاه التغيرات.و بما أن الدالة" $\ln$ " متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

فإن الدالة" $\log$ " متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

يستنتج التمثيل البياني للدالة " $\log$ " انطلاقا من التمثيل البياني للدالة " $\ln$ ".

نتيجة: إذا كان x عددا حقيقيا حيث $10^n \le x \le 10^{n+1}$ فإن $n \le \log x \le n+1$

مثال: نعتبر العدد الحقيقي x بحيث $x = 3{,}87 \times 10^7$.

لدينا $10^7 < x < 10^8$ و منه $\log 10^7 < \log x < \log 10^8$

نجد هكذا أن $7 < \log x < 8$

ملاحظة:

لدالة اللوغاريتم العشري تطبيقات عديدة و هامة في مختلف المواد و بصفة خاصة في الفيزياء، الكيمياء و الجغرافيا.

4. تمارين

تمرين 1: نعتبر العدد الطبيعي n حيث: $n = 3^{10518}$

1. عين باستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log n$.
2. استنتج الحصر التالي: $10^{5018} \le n < 10^{5019}$.
3. حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد n.

الحل:

1. لدينا $\log(3^{10518}) = 10518 \log 3$. تعطي الحاسبة:

. $E\left(10518\log 3\right)=5018$

2. من $E\left(\log n\right)=5018$ نستنتج الحصر: $5018\leq \log n<5019$

و يمكن كتابة هذا الحصر كما يلي: $\log\left(10^{5018}\right)\leq \log n<\log\left(10^{5019}\right)$

و بما أن الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فإن $10^{5018}\leq n<10^{5019}$.

3. يثبت الحصر السابق أن الكتابة العشرية للعدد n تتكون من 5019 رقما.

تمرين 2 : التركيز المولي (المولارية) بشوارد H^+ لمحلول و الذي نرمز إليه بـِ $\left[H^+\right]$ هو عدد مولات H^+ في 1 لتر من هذا المحلول. نعبر غالبا عن هذا التركيز بأس عشري سالب: $\left[H^+\right]=10^{-pH}$ إلا أنه يفضل استعمال pH المعرف بالعلاقة: $pH=-\log\left[H^+\right]$.

1. ما قيمة pH محلول يحتوي على $5\times10^{-8}\,moles$ من شوارد H^+ في اللتر الواحد ؟
2. ما هو التركيز المولي بشوارد H^+ لمحلول متعادل $\left(pH=7\right)$ ؟

الحل:

1. لدينا $\left[H^+\right]=5\times10^{-8}$ و منه $pH=-\log\left[5\times10^{-8}\right]$ أي $pH=-\left[\log 5+\log\left(10^{-8}\right)\right]$

و بالتالي: $pH=-\log 5+8$. نجد هكذا: $pH\approx 7,3$.

2. $\left(pH=7\right)$ يعني $-\log\left[H^+\right]=7$ أي $\log\left[H^+\right]=-7$ و منه $\left[H^+\right]=10^{-7}\,moles$.

تمرين 3: حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$\log x=2\ \ (1)$ $\qquad\qquad$ $\log x\leq -4\ \ (2)$ $\qquad\qquad$ $\log x>3\ \ (3)$

الحل:

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x=2$ تعني $\log x=\log\left(10^2\right)$ أي $x=10^2$. إذن مجموعة الحلول هي: $S=\left\{10^2\right\}$.

2. تكون المتراجحة (2) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x\leq -4$ تعني $\log x\leq \log\left(10^{-4}\right)$ و بما أن الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

فإن $x\leq 10^{-4}$. إذن مجموعة الحلول هي: $S=\left]0;10^{-4}\right]$.

3. تكون المتراجحة (3) معرفة من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

$\log x>3$ تعني $\log x>\log\left(10^3\right)$ و بما أن الدالة " $\log$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

فإن $x>10^3$. إذن مجموعة الحلول هي: $S=\left]10^3;+\infty\right[$.

التاريخ: 2014/11/20 **المستوى:** ثالثة علوم تجريبية **المـدة:** 05 ساعات

المجال التعليـمـي: التحليل.

الـوحدة التعليمية (01): الدوال العددية.

مـوضوع الدرس: الدوال القوى والجذر النوني والتزايد المقارن

الوسـائل التعليـميـة: السبورة ، الكتاب المدرسي، الآلة الحاسبة البيانية

الـمـراجـع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة

- معرفة و تفسير النهايات الشهيرة الخاصة بالدوال الأسية و اللوغاريتمية.
- حل مشكلات بتوظيف دوال القوى.

نشاط أول

- **تعريف القوى الحقيقية للعدد 3**

- ليكن n عددا صحيحا نسبيا.

أكتب العدد $\ln(3^n)$ بكيفية أخرى ثم استنتج أن $3^n = e^{n\ln 3}$.

الدستور $3^n = e^{n\ln 3}$ يمنحنا فكرة تمديد مفهوم القوى. هذا التمديد يفرض علينا طرح السؤال التالي:

كيف يمكن تعريف 3^x من أجل كل عدد حقيقي x ؟

نضع، تعريفا، من أجل كل عدد حقيقي x، $3^x = e^{x\ln 3}$

- عين، باستعمال حاسبة، المدور إلى 10^{-2} لكل عدد من الأعداد التالية:

$$3^{\frac{1}{3}} \quad ، \quad 3^e \quad ، \quad 3^{-\frac{2}{5}} \quad ، \quad 3^{\sqrt{2}}$$

- **بعض الدساتير**

- بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n،

أ) $3^x \times 3^y = 3^{x+y}$ ب) $\left(3^x\right)^n = 3^{nx}$ جـ) $\dfrac{3^x}{3^y} = 3^{x-y}$

تعريف: تسمى الدالة $x \mapsto 3^x$ " الدالة الأسية ذات الأساس 3.

نشاط ثان

1. دراسة الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x) = x^3$
   - أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
   - أرسم (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس.
2. المعادلة $x^3 = 3$
   - بين أن المعادلة $x^3 = 3$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$.
   - باستعمال حاسبة بيانية عين حصرا سعته 10^{-2} للعدد α.

نتيجة: العدد α هو إذن العدد الموجب الوحيد الذي يحقق: $\alpha^3 = 3$.

يسمى العدد α الجذر التكعيبي للعدد 3 و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[3]{3}$.

تعريف: يمكن تعميم التعريف السابق للحصول على التعريف التالي:
نسمي الجذر التكعيبي للعدد الموجب a العدد الموجب الوحيد الذي مكعبه يساوي a و نرمز غليه بالرمز $\sqrt[3]{a}$.

خمن الأوضاع النسبية للمنحنين السابقين من أجل القيم الموجبة للمتغير x. يمكنك تغيير النافذة للحصول على وضعيات أخرى.

3. نعتبر الدوال $x \mapsto x$ ، $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto \ln x$
- بعد تمثيل هذه الدوال على شاشة حاسبة بيانية ضع تخمينات حول أوضاعها النسبية.
- قارن بين $\ln x$ و x ثم بين $\ln x$ و x^2 من أجل قيم كبيرة للمتغير x.

I. قوى عدد حقيقي موجب تماما

تمهيد: ليكن a عددا حقيقيا موجبا تماما و ليكن n عددا صحيحا نسبيا.
نعلم أن $\ln(a^n)=n\ln a$ و بالتالي $a^n=e^{n\ln a}$.
وبما أن $\ln e=1$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x=e^{x\ln e}$.

1. تعاريف

تعريف1: نضع $a^b=e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي.
ملاحظة: يقرأ a^b: " a أس b " أو " a قوى b "
مثال: $2^{\sqrt{3}}=e^{\sqrt{3}\ln 2}\approx 3,3219$

تعريف2: a عدد حقيقي موجب تماما.
تسمى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=a^x=e^{x\ln a}$ ، الدالة الأسية ذات الأساس a.

2. قواعد الحساب

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a، b و من أجل كل عددين حقيقيين x، y لدينا:

$\ln(a^x)=x\ln a$ (1) $\quad a^x a^y=a^{x+y}$ (2) $\quad a^{-y}=\dfrac{1}{a^y}$. (3) $\quad \dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$. (4)

$(a^x)^y=a^{xy}$. (5) $\quad (ab)^x=a^x b^x$. (6) $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$. (7)

البرهان: أنظر التمرين رقم 6(يتم إنجاز مختلف البراهين باستعمال العلاقة $a^x=e^{x\ln a}$).

3. الدالة " الجذر النوني "

x	0	$+\infty$
x^n	0 ↗	$+\infty$

تمهيد: الدالة $f_n : x \mapsto x^n$ ، حيث n عدد طبيعي غير معدوم، مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ كما أن $f_n(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$. إذن من أجل كل عدد حقيقي موجب a، المعادلة $x^n=a$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0;+\infty[$.

مبرهنة وتعريف: من أجل كل عدد حقيقي موجب a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، يوجدعدد حقيقي
موجب وحيد b يحقق $b^n=a$. يسمى b الجذر النوني للعدد a و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[n]{a}$.
تسمى الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ حيث $x \mapsto \sqrt[n]{x}$، الدالة الجذر النوني.
مثال: $\sqrt[n]{0}=0$ ، $\sqrt[n]{1}=1$ ، $\sqrt[3]{8}=2$ ، $\sqrt[4]{81}=3$ ، $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$.

خاصية1: من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

البرهان: نعلم أن $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$ و بما أن $\sqrt[n]{a}$ هو الحل الموجب الوحيد للمعادلة $x^n=a$ فإن $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

ملاحظة: نضع اصطلاحا: $0^{\frac{1}{n}}=0$.

4. تمارين

تمرين1: اختزل كتابات الأعداد التالية:

$a=256^{\frac{1}{4}}$ $\qquad$ $b=(0,25)^{1,5}$ $\qquad$ $c=3^{-\frac{1}{3}}\times 9^{\frac{2}{3}}$

الحل:

- $a=256^{\frac{1}{4}}=\left(2^8\right)^{\frac{1}{4}}=2^{8\times\frac{1}{4}}=2^2=4$.
- $b=(0,25)^{-1,5}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(2^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}=2^{(-2)\left(-\frac{3}{2}\right)}=2^3=8$
- $c=3^{-\frac{1}{3}}\times 9^{\frac{2}{3}}=3^{-\frac{1}{3}}\times\left(3^2\right)^{\frac{2}{3}}=3^{-\frac{1}{3}}\times 3^{2\times\frac{2}{3}}=3^{-\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{4}{3}}=3^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}=3$

تمرين 2:

1. عين الدالة المشتقة للدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f_n(x)=\sqrt[n]{x}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty;-1[$ بـ $g(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$.

الحل:

1. من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f_n(x)=x^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln x}$.

الدالة f_n هي مركب الدالة $x\mapsto\frac{1}{n}\ln x$ متبوعة بالدالة الأسية وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا:

$f_n'(x)=\frac{1}{n}\times\frac{1}{x}e^{\frac{1}{n}\ln x}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{x}\times x^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\times x^{\frac{1}{n}-1}$. نلاحظ أن طريقة الحساب تبقى نفسها المطبقة بالنسبة لدوال القوى ذات أس صحيح.

من الواضح أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f_n'(x)>0$ و منه فالدالة الجذر النوني متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

2. نلاحظ أن الدالة g هي مركب الدالتين $u:x\mapsto x^2-1$ متبوعة بالدالة f_3. و بما أن الدالة u متناقصة تماما على $]-\infty;-1[$ و الدالة f_3 متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;-1[$.

تمرين3: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$3^x+2\times 3^{-x}=3\ \ (1)$ $\qquad$ $(0,31)^{2x}<3\ \ (2)$

الحل:

1. (1) تعني $3^x+\frac{2}{3^x}=3$ أي $3^{2x}-3\times 3^x+2=0$. بوضع $X=3^x$ نحصل على $X^2-3X+2=0$ ذات الحلين 1 و2. $3^x=1$ تعني $\ln 3^x=\ln 1$ أي $x\ln 3=0$ و بالتالي $x=0$.

أما $3^x=2$ فتعني $x\ln 3=\ln 2$ أي $x=\frac{\ln 2}{\ln 3}$. و منه مجموعة الحلول هي $S=\left\{0;\frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$.

2. $(0,31)^{2x}<3$ تعني $\ln\left[(0,31)^{2x}\right]<\ln 3$ أي $2x\ln(0,31)<\ln 3$ و هذا يعني أن $x>\frac{\ln 3}{2\ln(0,31)}$ لأن $\ln(0,31)<0$ و بالتالي مجموعة الحلول هي $\left]\frac{\ln 3}{2\ln(0,31)};+\infty\right[$.

II. دراسة الدوال: $x\mapsto a^x$ و $x\mapsto \sqrt[n]{x}$

1. الدالة $x\mapsto a^x$

نضع من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و مختلف عن 1 و من أجل x من $\mathbb{R}$،

$f_a(x)=a^x=e^{x\ln a}$

- اتجاه التغير: الدالة f_a هي مركب الدالة $u:x\mapsto x\ln a$ متبوعة بالدالة الأسية. و بما أن الدالتين u

و"$\exp$" قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة f_a قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$f_a'(x)=\ln a\times e^{x\ln a}=(\ln a)a^x$.

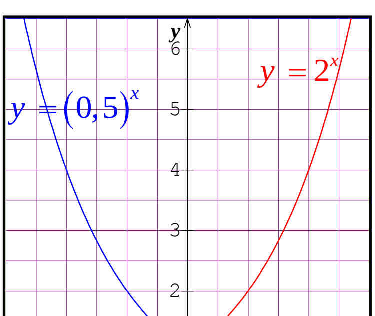
نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $a^x>0$ و بالتالي فإشارة $f_a'(x)$ من نفس إشارة $\ln a$. و منه النتائج التالية:

* إذا كان $0<a<1$ فإن $\ln a<0$ و منه الدالة f_a متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.
* إذا كان $a>1$ فإن $\ln a>0$ و منه الدالة f_a متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- النهايات: نميز حالتين حسب إشارة $\ln a$

* إذا كان $0<a<1$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}x\ln a=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f_a(x)=+\infty$
* إذا كان $0<a<1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln a=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f_a(x)=0$
* إذا كان $a>1$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}x\ln a=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f_a(x)=0$
* إذا كان $a>1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln a=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f_a(x)=+\infty$

- جدول التغيرات و التمثيل البياني:



$\boxed{\begin{array}{l}f_a(1)=a\\ f_a(0)=1\end{array}}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_a(x)$ $0<a<1$	$+\infty$	

	0
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f_a(x)$ $a>1$	$0 \nearrow +\infty$

ملاحظة : إذا كان $a=1$ فإن $f_1(x)=1$ و منه الدالة f_1 ثابتة.

2. الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، و من أجل x من $[0;+\infty[$ ، $g_n(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$.

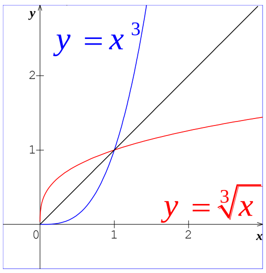
g_n قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $g_n'(x)=\frac{1}{n}\times x^{\frac{1}{n}-1}$ و منه $g_n'(x)>0$. إذن g_n متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g_n'(x)$	$\|\|$ $\quad$ $+$
$g_n(x)$	$0 \nearrow +\infty$

ملاحظة

الدالة g_n غير قابلة للاشتقاق عند 0.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln x}=+\infty$$



3. تمارين

تمرين 1:

1. أرسم في معلم متعامد و متجانس المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين على التوالي للدالتين f و g حيث:

$$f(x)=4^x \quad \text{و} \quad g(x)=(0,25)^x$$

2. بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب (yy').

طريقة: لإثبات أن المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى (yy') يمكننا أن نبين أن: $g(-x)=f(x)$ أو $f(-x)=g(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

الحل:

1. الدالتان f و g معرفتان على $\mathbb{R}$.

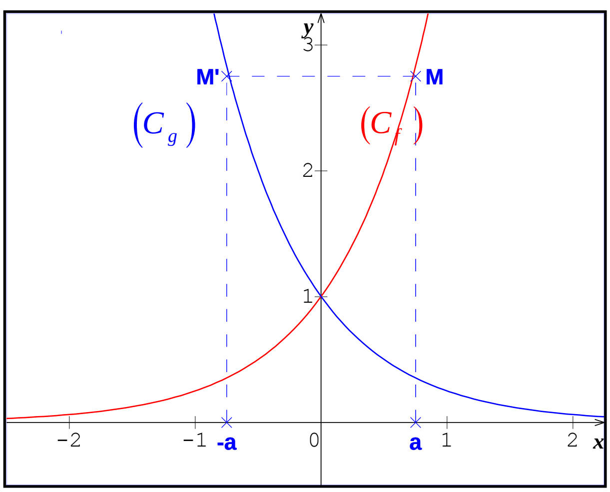
الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

2. من أجل كل a من $\mathbb{R}$ لدينا:



$g(-a)=(0,25)^{-a}=e^{-a\ln(0,25)}$ و منه

$g(-a)=e^{-a\ln\frac{1}{4}}=e^{a\ln 4}=4^a$. إذن $g(-a)=g(a)$. و منه (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى (yy').

تمرين 2:أكتب العبارات التالية بواسطة أس ناطق.

(1) $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$ (2) $g(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+1}$ (3) $h(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+1}}$

الحل:

1. $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}=(x-1)(x-1)^{\frac{1}{2}}=(x-1)^{1+\frac{1}{2}}=(x-1)^{\frac{3}{2}}$.

2. $g(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+1}=(x^2+2x+1)^{\frac{1}{3}}=\left[(x+1)^2\right]^{\frac{1}{3}}=(x+1)^{2\times\frac{1}{3}}=(x+1)^{\frac{2}{3}}$.

3. $h(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+1}}=\dfrac{x+1}{(x+1)^{\frac{1}{4}}}=(x+1)(x+1)^{-\frac{1}{4}}=(x+1)^{1-\frac{1}{4}}=(x+1)^{\frac{3}{4}}$.

تمرين 3: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين: (1) $\sqrt[3]{x}=4$ (2) $\sqrt[5]{x+1}\le 2$

الحل:

1. مجموعة تعريف (1) هي $[0;+\infty[$.

من أجل كل x من $[0;+\infty[$، (1) تعني $x=4^3$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\{4^3\}$.

2. مجموعة تعريف (2) هي $[-1;+\infty[$.

من أجل كل x من $[-1;+\infty[$، (2) تعني $x+1\le 2^5$ أي $x\le 2^5-1$ و بالتالي $x\le 31$.

مجموعة الحلول هي إذن: $S=[-1;31]$.

III التزايد المقارن

1. التزايد المقارن للدالتين $x\mapsto e^x$ و $x\mapsto x$

خواص: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

البرهان:

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$. لدينا من أجل كل x من $[0;+\infty[$،

$f'(x)=e^x-x$ و $f''(x)=e^x-1$. بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f''(x)\ge 0$ فإن الدالة f' متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و علما أن $f'(0)=1$ فإن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)\ge 0$ و منه فالدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و علما أن $f(0)=1$ فإن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f(x)\ge 0$.

نستنتج أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $e^x-\dfrac{x^2}{2}\ge 0$ و بالتالي فإن من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\dfrac{e^x}{x}\ge\dfrac{x}{2}$. باستعمال النهايات بالمقارنة و علما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ كما نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.

2. نضع $X=-x$. إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}X=+\infty$ و منه: $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=\lim\limits_{X\to+\infty}-Xe^{-X}=\lim\limits_{X\to+\infty}-\dfrac{X}{e^X}=0$

2. التزايد المقارن للدالتين $x\mapsto\ln x$ و $x\mapsto x$

خواص: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و (2) $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$

البرهان:

1. من أجل $x>0$ نضع $X=\ln x$ و منه $x=e^{X}$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty} X=+\infty$ و

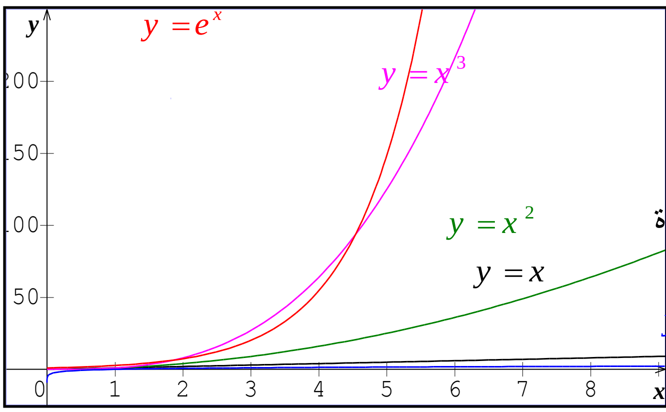
بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^{X}}=0$

2. نضع $X=\frac{1}{x}$ و منه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} X=+\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to0} x\ln x=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\ln\frac{1}{X}=\lim\limits_{X\to+\infty}-\frac{\ln X}{X}=0$

3. التزايد المقارن مع الدالة $x\mapsto x^{n}$ $\left(n\in\mathbb{N}^{*}\right)$

خواص: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$ (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}=0$ (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{n}}=0$ (2) $\lim\limits_{x\to0}x^{n}\ln x=0$

البرهان: أنظر التمرين رقم 39



خلاصة: كل الدوال $x\mapsto e^{x}$ ، $x\mapsto\ln x$ و $x\mapsto x^{n}$ $\left(n\in\mathbb{N}^{*}\right)$ تؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$ إلا أن سلوكها مختلف. عند اللانهاية تتفوق الدالة الأسية على الدالة قوة و تتفوق الدالة قوة على الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

4. تمارين

تمرين 1: أحسب النهايتين التاليتين:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}-x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{x}$

طريقة: لرفع حالات عدم التعيين يمكننا استعمال النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$

الحل:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^{x}}{x}-1\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$ و من ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x}}{x}-1\right)=+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2xe^{x}-e^{x}\right)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$.

تمرين 2: أحسب النهايتين التاليتين:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to0}(x+2)\ln x$

طريقة: لرفع حالات عدم التعيين يمكننا استعمال النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$

الحل:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[1-\frac{\ln x}{x}\right]=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و من ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-\frac{\ln x}{x}\right]=1$.

2. $\lim\limits_{x\to0}(x+2)\ln x=\lim\limits_{x\to0}\left(x\ln x+2\ln x\right)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ و $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$.

تمرين 3: أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to 0}\left(x^2+x\right)\ln x$ (4 $\lim_{x\to -\infty}\left(x^3+2x-1\right)e^x$ (3 $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{2x^2-x+3}$ (2 $\lim_{x\to +\infty}\frac{2e^x}{x^2+x+1}$ (1

الحل:

.1 $\lim_{x\to +\infty}\frac{2e^x}{x^2+x+1}=\lim_{x\to +\infty}2\frac{e^x}{x^2}\times\frac{x^2}{x^2+x+1}=+\infty$ لأن $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}=1$ و $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$.

.2 $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{2x^2-x+3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^2}\times\frac{x^2}{2x^2-x+3}=0$ لأن $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2x^2-x+3}=\frac{1}{2}$ و $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$.

.3 $\lim_{x\to -\infty}\left(x^3+2x-1\right)e^x=\lim_{x\to -\infty}\left(x^3e^x+2xe^x-e^x\right)=0$ لأن $\lim_{x\to -\infty}x^ne^x=0$ و $\lim_{x\to -\infty}e^x=0$.

.4 $\lim_{x\to 0}\left(x^2+x\right)\ln x=\lim_{x\to 0}\left(x^2\ln x+x\ln x\right)=0$ لأن $\lim_{x\to 0}x^n\ln x=0$.

تمرين 4: أحسب النهاية التالية: $\lim_{x\to +\infty}\left[(2x-1)e^x-3e^{2x}\right]$

الحل:

$$\lim_{x\to +\infty}\left[(2x-1)e^x-3e^{2x}\right]=\lim_{x\to +\infty}e^{2x}\left(2\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}-3\right)=-\infty$$

لأن $\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x}=0$ ، $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^x}=0$ و $\lim_{x\to +\infty}e^{2x}=+\infty$.

التاريخ: 2014/11/26 **المستوى:** ثالثة علوم تجريبية **المـدة:** 06 ساعات

المجال التعليـمـــي: التحليل.

الـوحدة التعليمية (02): الهندسة في الفضاء.

مـوضـوع الدرس: الجداء السلمي وتطبيقات له.

الوسـائل التعليـمية: السبورة ، الكتاب المدرسي، البرمجيات (cabri 3d)

الـمـراجــــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة

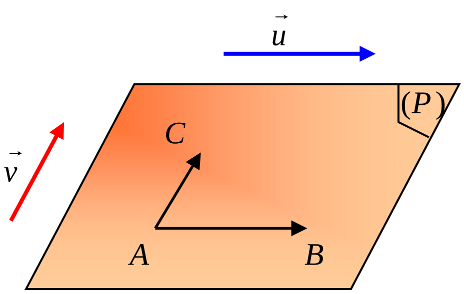
توظيف خواص الدالة الأسية النيبيرية.

حل مشكلات بتوظيف الدوال الأسية

I . نشاط تمهيدي

II . الجداء السلمي في الفضاء

1. تعريف :



$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء . A ، B و C ثلاث نقط

حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

يوجد على الأقل مستو (P) يشمل النقط A ، B و C بحيث

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للشعاعين

$\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ في المستوي (P)

2. العبارة الشعاعية للجداء السلمي :

$\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ شعاعان من المستوي (P) لدينا:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$$

- ملاحظة : في المستوي لدينا : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|^2\right)$

و هي عبارة مستقلة عن تمثيل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وبالتالي مستقلة عن المستوي (P)

3. خواص الجداء السلمي: (كل خواص الجداء السلمي في المستوي تطبق على الأشعة من نفس المستوي في الفضاء)

$\vec{u}$، $\vec{v}$ $\vec{w}$ أشعة من الفضاء ، k عدد حقيقي

لدينا : (المربع السلمي) $\vec{u}.\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2$ ، $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ ، $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$

، $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$

$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

4. تعامد شعاعين

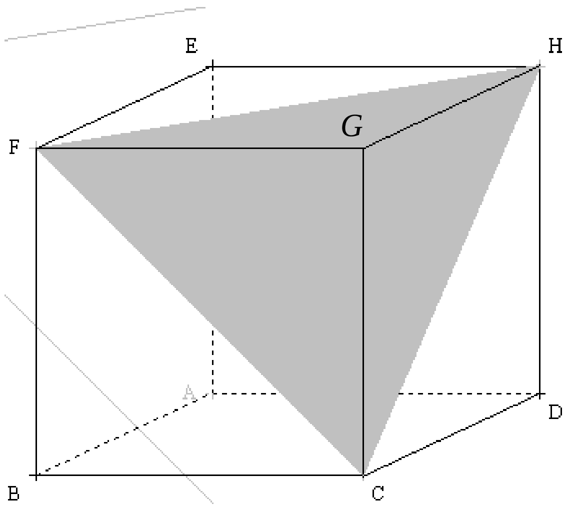
- تعريف : يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين إذا و فقط إذا كان $\vec{u}.\vec{v} = 0$

- ملاحظة : $\vec{0}$ عمودي على كل شعاع من الفضاء.

5. العبارة التحليلية للجداء السلمي في الفضاء:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ليكن $\vec{u}\,(x\;\;y\;\;z,)$ ($\vec{v}\,(x\,',y\,',z\,')$

لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=x.x\,'+y.y\,'+z.z\,'$



تمرين 1 :

نعتبر ABCDEFGH مكعب طول حرفه 1

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$

- عين احداثيات النقط $H;G;F;E;D;C;B;A$
- احسب $\overrightarrow{HF}$ ، $\overrightarrow{HC}$ ، $\overrightarrow{FC}$
- احسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{HF}.\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{AG}$
- بين النقاط $H;F;C$ تشكل مستويا
- استنتج ان المستقيم (AG) عمودي على المستوي (FHC)

تمرين 2:

في معلم متعامد و متجانس من الفضاء لدينا النقط ***A(-1; -2; 0)* , *B(3; 1; -2)* , *C(-2; 0; 1)* , *D(2; -1; 0)***

1) هل المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان ؟

2) هل المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان ؟

الحل : لدينا $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=16-3+2=15\neq 0$

و بالتالي (AB) و (CD) ليسا متعامدين

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-4+6-2=0$

و بالتالي (AB) و (AC) متعامدان

III . التعامد :

1. تعريف :

ا) الإسقاط العمودي في الفضاء

ليكن (P) مستو ، M نقطة من الفضاء .

المستقيم العمودي على (P) و الذي يشمل M يقطع يقطع (P) في نقطة وحيدة 'M .

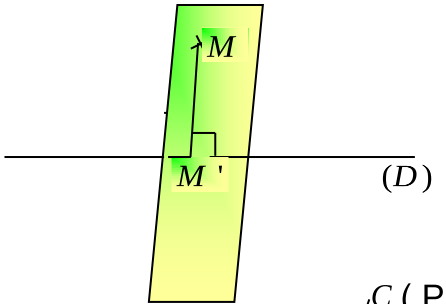
'M هو المسقط العمودي للنقطة M على (P)

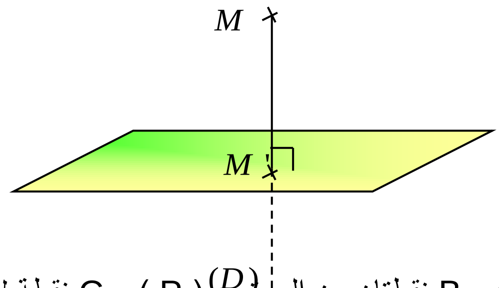
ب) الإسقاط العمودي على مستقيم

(D) مستقيم ، M نقطة من الفضاء .

المستوي العمودي على (D) و الذي يشمل M يقطع (D) في نقطة وحيدة 'M .

'M هو المسقط العمودي لـ M على (D)



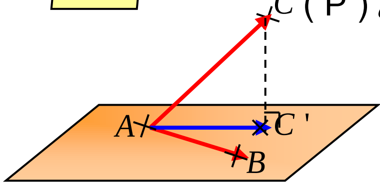


2. نتائج :

➢ A ، B نقطتان من المستوي (P) و C نقطة لا تنتمي إلى (P)

لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$

حيث 'C المسقط العمودي لـ C على (P)

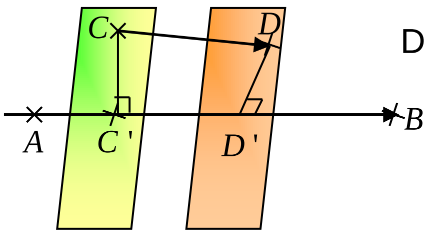


➢ $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ و $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

حيث 'C و 'D المسقطان العموديان للنقطتين C و D

على الترتيب على المستقيم (AB)

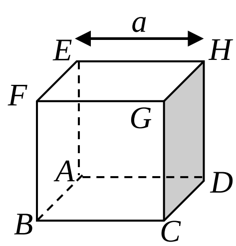


تمرين 3:

في المكعب ABCDEFGH الذي ضلعه a .

أحسب الجداءات السلمية التالية:

- $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{GC}$
- $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HC}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$



الحل:

لتكن B المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (FGC)

و بالتالي $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{FB}.\overrightarrow{GC}$ لأن $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CD}$

$$= \overrightarrow{FB}.\overrightarrow{FB} = \left\|\overrightarrow{FB}\right\|^2$$

$$= a^2$$

لتكن D المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (AEH)

و بالتالي $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HD}$ لأن $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CD}$

$$= -\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE} = -\left\|\overrightarrow{AE}\right\|^2$$ (AE) و (CD) من مستويين متعامدين

$$= -a^2$$

لتكن F المسقط العمودي للنقطة G على المستوي (FAB)

و بالتالي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF}$ لأن $\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CD}$

$$=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$$

$$=a^2$$

IV. تطبيقات الجداء السلمي

1. المسافة بين نقطتين في الفضاء

لتكن النقطتين $(A\ x_A\ y_A\ z_A)$ $B(x_B,y_B,z_B)$ في معلم متعامد و متجانس من الفضاء لدينا :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

2. كتابة معادلة سطح كرة :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ ، $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ ، $\Omega\left(x_0;y_0;z_0\right)$

- معادلة سطح كرة مركزها $\Omega\left(x_0;y_0;z_0\right)$ ونصف قطرها R هي :

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2=R^2$$

- مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء التي تحقق : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي سطح كرة

تمرين 3 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

1) نعتبر (S) سطح الكرة التي مركزها W(2 , 1 , 0) و نصف قطرها $\sqrt{2}$. أكتب معادلة ديكارتية لـ(S)

2)ا) نعتبر (S') سطح الكرة التي قطرها [AB] حيث A (1 , 0 , -2) ، B(0 , - 1 , 2)، أكتب معادلة ديكارتية لـ (S')

ب) عين قيمتي العدد الحقيقي a حتى تكون النقطة C(a , 1 , 0) نقطة من (S') .

الحل:

1) لتكن M(x , y , z) نقطة من (S) أي أن $WM=\sqrt{2}$

(S) : $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=2$

أو $x^2+y^2+z^2-4x-2y+3=0$ معادلة ديكارتية لـ (S)

2) لتكن M(x , y , z) نقطة من (S') أي أن $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

الشعاعان $\overrightarrow{MA}$ ، $\overrightarrow{MB}$ يكتبان $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\-y\\-2-z\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-x\\-1-y\\2-z\end{pmatrix}$

M نقطة من (S') يعني $(x-1)x+y(y+1)+(z+2)(z-2)=0$

أو $x^2+y^2+z^2-x+y-4=0$ معادلة ديكارتية لـ (S')

3. المعادلة الديكارتية لمستو

ا) تعريف :

كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من مستو (P) هو شعاع عمودي على (P)

نتيجة : إذا كان $\vec{n}$ شعاعا ناظميا (عموديا) على (P) فإن $\vec{n}$ عمودي على كل شعاع من المستوي (P) .
و بالتالي كل مستقيم موجه بالشعاع $\vec{n}$ هو مستقيم عمودي على (P) .

ب) تمييز مستو :

$\vec{u}$ شعاع غير معدوم . A نقطة من الفضاء

مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ هي المستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له

برهان : نعتبر المستقيم (D) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع توجيه له ، والمستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له . إذا كانت M نقطة من (P) فإن $\overrightarrow{AM}$ شعاع من (P) وبالتالي $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

و بالعكس نعتبر نقطة M من الفضاء حيث $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$. لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (D)

وبالتالي $\vec{n}.\overrightarrow{AH}=0$ لأن $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ لكن $\overrightarrow{AH}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا ، إذن $\overrightarrow{AH}=\vec{0}$ لأن $(\vec{n}\neq\vec{0})$ و بالتالي A = H ، المسقط العمودي لـ M على (D) هو A أي أن M نقطة من (P)

ج) خاصية : كل مستو، $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له يقبل معادلة ديكارتية من الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث d عدد حقيقي

و بالعكس فإن مجموعة النقط M(x ; y ; z) التي تحقق $ax+by+cz+d=0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقة غير معدومة معا هي مستو و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له .

برهان : $A(x_A;y_A,z_A)$ نقطة من المستوي (P) و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي لـ (P)

تكون النقطة M(x ; y ; z) من (P) إذا و فقط إذا $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ أي :

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

و بوضع $d=-ax_A-by_A-cz_A=0$ نجد $ax+by+cz+d=0$

$\vec{n}$ شعاع ناظمي فإن a ، b ، c ليست كلها معدومة

و بالعكس : نعتبر (E) مجموعة النقط M(x ; y ; z) من الفضاء حيث $ax+by+cz+d=0$

بما أن a ، b ، c ليست كلها معدومة ، نأخذ مثلا $a\neq0$ و نعتبر النقطة $A(-\frac{d}{a};0;0)$. A نقطة من (E)

و لدينا $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع غير معدوم . من أجل كل نقطة M(x ; y ; z) من الفضاء لدينا

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a(x+\frac{d}{a})+by+cz=ax+by+cz+d$$

M نقطة من (E) يعني $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ و بالتالي (E) هو المستوي الذي يشمل A و $\vec{n}$ ناظمي له .

● حالات خاصة

➢ معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$ هي $z=0$	(P) و (P') مستويان $\vec{n}$، $\vec{n}'$ ناظميان لهما على الترتيب

➢ معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$ هي $x=0$ ➢ (P) يوازي (P') معناه يوجد k حقيقي حيث $\vec{n}=k.\vec{n}'$

➢ معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$ هي $y=0$ ➢ (P) عمودي على (P') معناه $\vec{n}.\vec{n}'=0$

تمرين 5 : في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر النقط A(-2 ; 0 ; 1) ، B(1 ; 0 ; -3) ، C(1 ; - 1 ; 2) .

1. بين أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا .
2. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
3. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له .

الحل:

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ نلاحظ أن $x_{\overrightarrow{AB}}=x_{\overrightarrow{AC}}$ و لكن $y_{\overrightarrow{AB}}\neq y_{\overrightarrow{AC}}$

و بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا أي أن النقط A ، B ، C تعين مستويا

2) نبحث عن شعاع ناظمي للمستوي (ABC) . ليكن $\vec{n}$ هذا الشعاع عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$

و بالتالي $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ ، $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$. مركبات الشعاع $\vec{n}$ هي حل للجملة : $\begin{cases}3a-4c=0\\3a-b+c=0\end{cases}$

نأخذ $a = 4$ فيكون $c = 3$ و $b = 15$ أي $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\14\\3\end{pmatrix}$

3) تكون M(x ; y ; z) نقطة من (ABC) إذا و فقط إذا $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

أي $4(x+2)+15y+3(z-1)=0$ أو $4x+15y+3z+5=0$ و هي معادلة ديكارتية لـ (P)

تمرين 6 : في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر النقط A(1 ; 0 ; 0) ، B(0 ; 1 ; 0) ، C(0 ; 0 ; 1) .

1) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل النقط A ، B ، C

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي (ABC) و يشمل النقطة O

الحل:

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا لـ (ABC) إذن $\begin{cases}-a+b=0\\-a+c=0\end{cases}$ أي a = b = c

نأخذ a = 1 مثلا فيكون $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

M(x ; y ; z) نقطة من (ABC) إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ أي أن $x-1+y+z=0$

أو $x+y+z-1=0$ و هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2) تكون النقطة M(x ; y ; z) نقطة من (P) إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{OM}.\vec{n}=0$

أي أن $x+y+z=0$ و هي معادلة ديكارتية للمستوي (P)

4. بعد نقطة عن مستو

في معلم متعامد و متجانس ، نعتبر المستوي (P) حيث $ax+by+cz+d=0$ ، $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ معادلة ديكارتية له . A نقطة إحداثياتها $(x_A;y_A;z_A)$.

البعد بين A و (P) هو العدد الحقيقي الموجب $\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

تمرين 7:

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $3x-2y+5z-4=0$.

1) عين بعد النقطة A(1 ; -2 ; 7) عن المستوي (P) .

2) عين بعد النقطة B(2 ; 1 ; 0) عن المستوي (P) . ماذا تستنتج ؟

الحل:

1) $d_1=\dfrac{|3(1)-2(-2)+5(7)-4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+5^2}}=\sqrt{38}$

2) $d_2=0$ نستنتج أن النقطة B هي نقطة من المستوي (P)

V . المرجح في الفضاء

1. تعريف 1 : (تذكير)

مرجح النقط $A_1 , A_2 , \dots , A_n$ مرفقة بالمعاملات $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n$ حيث: $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n\neq 0$ هي النقطة الوحيدة G التي تحقق: $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\dots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$.

G تسمى أيضا مركز المسافات المتناسبة للجملة :

$$\{(A_1,\alpha_1);(A_2,\alpha_2);\dots;(A_n,\alpha_n)\}$$

مثال 1:

إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ فإن $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

ومنهI مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1)\}$

مثال 2:

إذا كان G مركز ثقل المثلث ABC أي $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

فإن G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$

ملاحظة :

إذا كان: $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=0$ فإن الجملة : $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\dots,(A_n,\alpha_n)\}$ لا تقبل مرجحا .

2. مبرهنة 1:

ا) إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\dots,(A_n,\alpha_n)\}$

فإنه من أجل كل نقطة M من الفضاء لدينا :

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\dots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}=(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha)\overrightarrow{MG}$$

ب) إذا كان H مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

وكان K مرجح الجملة $\{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$. $(\alpha + \beta \neq 0)$

فإن H مرجح الجملة $\{(K, \alpha+\beta) ; (C, \gamma)\}$

3. مبرهنة 2 : لتكن A,B,C ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى و ليست في استقامية و α و β و γ ثلاث أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

4. ملاحظات:

- مجموعة مراجح الجملة $\{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$ عندما تمسح α β كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي المستقيم (AB) كاملا.
- مجموعة مراجح الجملة $\{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$ عندما تمسح α β كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وتكون من نفس الإشارة هي القطعة $[AB]$.
- مجموعة مراجح الجملة $\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$ عندما تمسح α و β و γ كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي كل المستوى (ABC)
- مجموعة مراجح الجملة $\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$ عندما تمسح α و β و γ كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ و تكون من نفس الإشارة هي الجزء من المستوي المحدد بالمثلث ABC .
- تكون اربع نقط من الفضاء تنتمي الى نفس المستوي إذا وفقط إذا كانت إحدى هذه النقط مرجحا لبقية النقط.

5. احداثيات مرجح

إذا كان الفضاء منسوب إلى معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ وكان G مرجح الجملة $\{(A_1, \alpha_1) ; (A_2, \alpha_2) ; (A_n, \alpha_n)\}$ بحيث:

$$A_n(x_n; y_n; z_n), ..., A_2(x_2; y_2; z_2), A_1(x_1; y_1; z_1), G(x_G; y_G; z_G)$$

فإن المبرهنة (1) $\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{OA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\overrightarrow{OG}$

و هذا بوضع M = O ومنه:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}$$

وعليه :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} \\ y_G = \dfrac{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} \\ z_G = \dfrac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + ... + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} \end{cases}$$

التاريخ: 2014/12/14 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 06 ساعات

المجال التعليــمـــي: التحليل .

الـوحدة التعليميـة (02): الهندسة في الفضاء .

مــوضــوع الدرس: المستقيمات و المستويات في الفضاء

الوسـائل التعليـميـة: السبورة ، الكتاب المدرسي،

الكفاءات المستهدفة

- استعمال التمثيلات الوسيطية لحل مسائل الاستقامية ، التلاقي ، انتماء أربع نقط إلى نفس مستو.
- الانتقال من جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم أو معادلة ديكارتية لمستوي إلى تمثيل وسيطي و العكس
- تحديد الوضع النسبي لمستويين ، لمستقيم ومستوي ، لمستقيمين .
- تعيين تقاطع مستويين ، لمستقيم ومستوي ، لمستقيمين .

1. التمثيل الوسيطي لمستقيم و لمستو :

فيمايلي الفضاء منسوب إلى معلم $\left(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}\right)$

أ- التمثيل الوسيطي لمستقيم :

مبرهنة :

(D) مستقيم يشمل النقطة $A\left(\alpha ; \beta ; \gamma\right)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(a ; b ; c)$. لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء.

تكون M نقطة من (D) إذا وفقط إذا حققت إحداثيي M

العلاقات التالية : $\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$ حيث t عدد حقيقي.

البرهان :

هذه الجملة تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .

النقطة $M(x ; y ; z)$ هي نقطة من المستقيم (D) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

ومنه نحصل على : $\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$ من تساوي إحداثيات شعاعين

تعريف :

الجملة $\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$ تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل

النقطة $A(\alpha ; \beta ; \gamma)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(a ; b ; c)$ و العدد الحقيقي t هو وسيط.

تمرين 1

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(-1 ; 3 ; -4)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(4 ; -1 ; 3)$.

الحل :

تكون نقطة $\mathbf{M(x ; y ; z)}$ من الفضاء نقطة من (D) إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$

ومنه $\begin{cases} x + 1 = 4t \\ y - 3 = -t \\ z + 4 = 3t \end{cases}$

و منه التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) هو :

$\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -t + 3 \\ z = 3t - 4 \end{cases}$ حيث : t وسيط حقيقي.

مثال 2 :

ماذا تمثل الجملة : $\begin{cases} x = -t + 5 \\ y = 4t - 1 \\ z = \frac{1}{2}t + 5 \end{cases}$

الحل :

هذه الجملة تمثل تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $\mathbf{A(5 ; -1 ; 5)}$ و شعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1 ; 4 ; \frac{1}{2}\right)$

<u>تمرين 2:</u>

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

- أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث (3 - ; 2 ; 2+)A و (0 ; 1 - ; 1)B
- هل النقطة (2 ; 3 ; 1)C تنتمي إلى المستقيم (AB) ؟

الحل: شعاع توجيه لـ (AB) هو $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ +3 \end{pmatrix}$ و بالتالي $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$ مع $t \in \mathbb{R}$ هذه الجملة هي التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

تنتميC إلى (AB) إذا وفقط وجد t يحقق $\begin{cases} 2 - t = 1 \\ 2 - 3t = 3 \\ -3 + 3t = 2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} \\ t = \frac{5}{3} \end{cases}$ ومنه C لا تنتمي الى (AB)

<u>**ب- التمثيل الوسيطي لمستو :**</u>

<u>مبرهنة :</u>

M نقطة من المستوى (P) المزود بمعلم $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ بحيث $A(\alpha_1 ; \beta ; \gamma)$ و $\vec{u}(a ; b ; c)$ و $\vec{u}(a' ; b' ; c')$

إذا وفقط إذا كانت إحداثياها $(x ; y ; z)$ تحقق الجملة :

$$\begin{cases} x = at + a't' + \alpha \\ y = bt + b't' + \beta \\ z = ct + c't' + \gamma \end{cases}$$ حيث t و t' حقيقيان.

البرهان :

تكون $M(x ; y ; z)$ نقطة من المستوى (P) إذا وفقط إذا وجد عددان

حقيقيان t و t' بحيث : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{u'}$

و من تساوي احداثيات شعاعين نجد : $$\begin{cases} x = at + a't' + \alpha \\ y = bt + b't' + \beta \\ z = ct + c't' + \gamma \end{cases}$$

تعريف :

نقول أن الجملة $\begin{cases} x = at + a't' + \alpha \\ y = bt + b't' + \beta \\ z = ct + c't' + \gamma \end{cases}$ تشكل تمثيلا وسيطيا للمستو (p) الذي يشمل النقطة $A(\alpha ; \beta ; \gamma)$ و

شعاعي توجيهه $\vec{u}(a ; b ; c)$ و $\vec{v}(a' ; b' ; c')$ و t و t' وسيطين حقيقيين .

مثال :

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوى (P) المعين بالنقطة A(1 ; -3 ; 4) و بالشعاعين $\vec{u}(2 ; -1 ; 5)$ و

$\vec{v}(3 ; 2 ; 1)$

الحل :

الشعاعان $\vec{u}$ $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا وعليه $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ معلم للمستوي (P) .

تكون النقطة M من الفضاء نقطة من (P) إذا وفقط إذا حققت إحداثياتها $(x ; y ; z)$ الجملة :

$$\begin{cases} x - 1 = 2t + 3t' \\ y + 3 = -t + 2t' \\ z - 4 = 5t + t' \end{cases}$$ ومنه : $$\begin{cases} x = 2t + 3t' + 1 \\ y = -t + 2t' - 3 \\ z = 5t + t' + 4 \end{cases}$$ ويشكل تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) .

2. التمثيل الديكارتي لمستقيم :

مبرهنة :

(P) مستقيم يشمل النقطة $A(\alpha ; \beta ; \gamma)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(a ; b ; c)$. إذا كانت الأعداد a,b,c غير معدومة جميعا فإن نقطة M من الفضاء تنتمي إلى (D) إذا حققت إحداثياها ما يلي :

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c}$$

البرهان :التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) هو $$\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$$

وعليه : $\begin{cases} x - \alpha = at \\ y - \beta = bt \\ z - \gamma = ct \end{cases}$ ومنه : $\dfrac{x-\alpha}{a} = \dfrac{y-\beta}{b} = \dfrac{z-\gamma}{c} = t$

تعريف :

العبارة $\dfrac{z-\gamma}{c} = \dfrac{y-\beta}{b} = \dfrac{x-\alpha}{a}$ تسمى تمثيلا ديكارتيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(\alpha ; \beta ; \gamma)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(a ; b ; c)$ وهذا إذا كانت الأعداد a وb و c غير معدومة جميعا.

إذا كان أحد الأعداد a,b,c معدوما فإن بسطه يكون معدوما أيضا.

مثال : اكتب تمثيلا ديكارتيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(-1 , 3 , 4)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(3 ; 2 ; 4)$

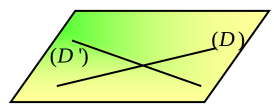
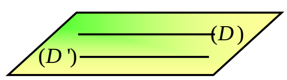
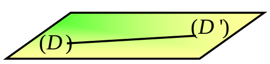
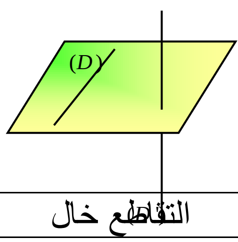
الحل : التمثيل الديكارتي للمستقيم (D) هو : $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{4}$

3. تقاطع المستقيمات و المستويات

(P) و (P') مستويان ، $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ ناظميان لهما على الترتيب . (D) و (D') مستقيمان موجهان بالشعاعين $\vec{u}$ $\vec{u}'$ على الترتيب

ا) تقاطع مستقيمين :

يمكن للمستقيمين (D) و (D') أن يكونا

من نفس المستوي			من مستويين مختلفين
متقاطعين	متوازيين		
	متوازيين و مختلفين	منطبقين	
			
التقاطع نقطة	التقاطع خال	التقاطع مستقيم	التقاطع خال

تمرين 3:

نعتبر المستقيمات d_1، d_2، d_3 ممثلة وسيطيا على الترتيب

$d_1 : \begin{cases} x = -2+5t \\ y = -1-t \\ z = 3+4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ ، $d_2 : \begin{cases} x = 1-t' \\ y = 4+3t' \\ z = 5-t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$ ، $d_3 : \begin{cases} x = -7+7t'' \\ y = -3t'' \\ z = 2t'' \end{cases} \quad t'' \in \mathbb{R}$

- أدرس تقاطع d_1 و d_2 ثم d_1 و d_3

الحل : $\vec{u_1}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ، $\vec{u_2}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ، $\vec{u_3}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ أشعة توجيه لـ d_1، d_2، d_3 على الترتيب

➢ نلاحظ أن $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطيا و بالتالي d_1 و d_2 غير متوازيين ، فهما إما متقاطعان أو لا ينتميان لنفس المستوي . و عليه نحل الجملة $\begin{cases} -2+5t = 1-t' \\ -1-t = 4+3t' \end{cases}$ نجد $\begin{cases} t = 1 \\ t' = -2 \end{cases}$

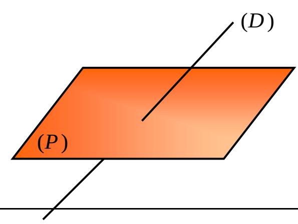
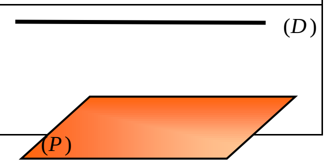
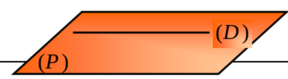
النقطة من d_1 من أجل t = 1 هي (3 ; -2 ;7) و النقطة من d_2 من أجل t' = -2 هي (3 ; -2 ; 7)
و بالتالي فالمستقيمان d_1 و d_2 يتقاطعان في (3 ; -2 ; 7) .

➢ $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_3}$ غير مرتبطين خطيا نستخلص نفس الملاحظة

لحل الجملة $\begin{cases}-2+5t=-7+7t''\\ -1-t=-3t''\end{cases}$ نجد $\begin{cases}t=-1\\ t''=0\end{cases}$ النقطة من d_1 من أجل t = -1 هي (-7 ; 0 ; -1) و
النقطة من d_2 من أجل t'' = 0 هي (-7 ; 0 ; 0) إذن المستقيمان d_1 و d_2 ليسا من نفس المستوي .

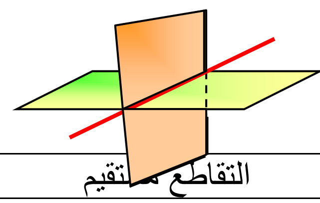
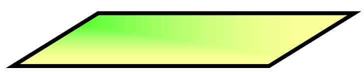
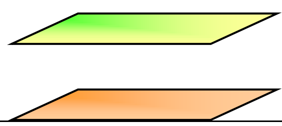
ب) تقاطع مستقيم و مستو:

نلخص الوضعيات فيما يلي:

(D) يوازي (P)		(D) يقطع (P)
(D) يوازي (P) " تقاطع خال "	(D) محتوا في (P)	
		

ج) تقاطع مستويين :

الوضعيات الممكنة هي :

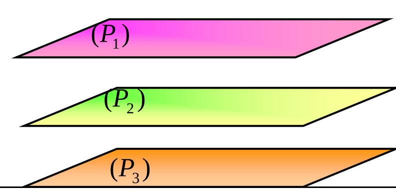
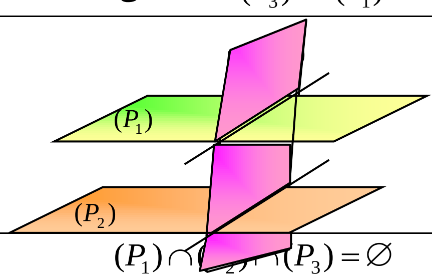
متقاطعان	متوازيان	
	منطبقان	تقاطع خالي
		
التقاطع مستقيم	التقاطع مستو	التقاطع خال

خاصية : مستقيم في الفضاء معرّف بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين

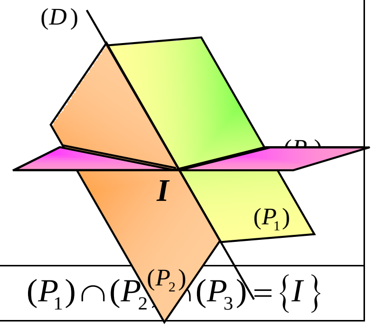
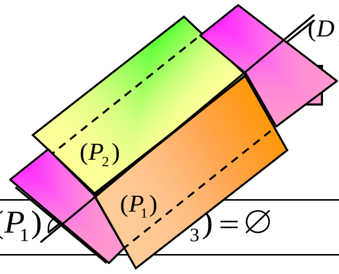
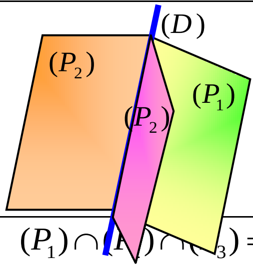
د) تقاطع ثلاث مستويات :

(P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات $\overrightarrow{n_1}$ ، $\overrightarrow{n_2}$ ، $\overrightarrow{n_3}$ أشعة ناظمية لها .

➢ الوضعيات النسبية 1) (P_1) ، (P_2) متوازيان

(P_1) ، (P_3) متوازيان	(P_1) ، (P_3) متقاطعان
	
$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$

➢ الوضعيات النسبية 2) (P_1) ، (P_2) يتقاطعان و تقاطعهما المستقيم (D)

(D) لا يقطع (P_3)	(D) يوازي (P_3)	
	(D) يوازي (P_3) بتقاطع خال	(D) محتو في (P_3)
		
$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\{I\}$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=\varnothing$	$(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=(D)$

تمرين 4 :

(P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات التي معادلات ديكارتية لها على الترتيب

$2x-y-2z-1=0$ ، $-x+4y+z-3=0$ ، $4x-2y-4z-5=0$

أدرس الوضعية النسبية لـ

a) (P_1) ، (P_2) b) (P_1) ، (P_3)

الحل: $\vec{n_1}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ ، $\vec{n_2}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ ، $\vec{n_3}\begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix}$ أشعة ناظمية لـ (P_1) ، (P_2) ، (P_3) على الترتيب

a) $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطيا ، إذن (P_1) و (P_2) ليسا متوازيين فهما يتقاطعان على المستقيم (D) .

للحصول على تمثيله الوسيطي نكتب مثلا x و y بدلالة z (z وسيط)

$\begin{cases}2x-y-2z-1=0\\-x+4y+z-3=0\end{cases}$ بعد الحساب نجد $t\in\mathbb{R};\begin{cases}x=t+1\\y=1\\z=t\end{cases}$

b) $\vec{n_3}=2\vec{n_1}$ أي $\vec{n_1}$ و $\vec{n_3}$ مرتبطان خطيا ، إذن (P_1) ، (P_3) متوازيان . نختار نقطة من (P_1) و لتكن A(0 ; - 1 ; 0) (0 + 2 - 0 - 5 = - 3 $\neq$ 0) ، A ليست نقطة من (P_3) و بالتالي تقاطع (P_1) ، (P_3) خال

تمرين 5:

نعتبر المستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3) بالمعادلات ديكارتية على الترتيب

$4x+y+z+10=0$ ، $2x+y+3=0$ ، $2x-y+2z-1=0$

أدرس تقاطع (P_1) ، (P_2) و (P_3)

الحل: $\vec{n_1}\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ ، $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{n_3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ أشعة ناظمية لـ (P_1) ، (P_2) ، (P_3) على الترتيب

ليست مرتبطة خطيا مثنى مثنى و بالتالي فالمستويات متقاطعة مثنى مثنى وفق مستقيم

تقاطع (P_1) ، (P_2) ، ليكن (D) مستقيم تقاطعهما $\begin{cases}4x+y+z+10=0\\2x+y+3=0\end{cases}$

نضع z = t لنحصل على تمثيلا وسيطيا لـ (D) و هو $t \in \mathbb{R};\begin{cases} x = t \\ y = -3-2t \\ z = -7-2t \end{cases}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ (D) ($\vec{u}.\overrightarrow{n_3} = 0$) إذن (D) يوازي (P_3) . A(0 ; -3 ; -7) نقطة من (D)

$\left(A \notin (P_3)\right)$ و بالتالي $(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3) = \varnothing$

المـدة: 05 ساعات   المستوى: ثالثة علوم تجريبية   التاريخ: 2015/01/11

المجال التعليـمـــي: الحساب.

الـوحدة التعليمـية (03): الأعداد المركبة.

مــوضـوع الدرس: الحساب في الأعداد المركبة.

الوسـائل التعليـميـة: السبورة ، الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة

الـمـراجـــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة

- إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة.
- استعمال خواص مرافق عدد مركب.
- حساب الطويلة و عمدة لعدد مركب غير معدوم.

I. نشاط تمهيدي

α عدد حقيقي ، ولتكن المعادلة : $(1)........x^2=\alpha$

1. حل وناقش ، حسب قيم α المعادلة (1)
2. نضع $\alpha=-1$

أ) نفرض أن للمعادلة (1) حل هو العدد i حيث $i\notin IR$، ما هو الشرط الذي يحققه العدد i ؟

ب) احسب مايلي : i^3 ، i^4 ، $(-i)^2$ ، $(i+1)^2$ ، $(i+1)^{2012}$

II. الأعداد المركبة

1. تعريف :نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2=-1$

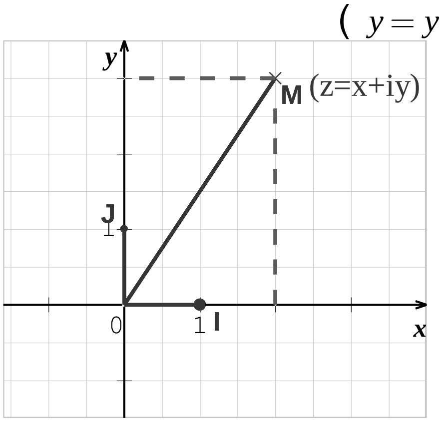
2. ملاحظات و ترميز:

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ : $\mathbb{C}$.
- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ، و نرمز $\mathrm{Re}\ z$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ، و نرمز $\mathrm{Im}\ z$.
- إذا كان $y=0$ نقول أن العدد z حقيقي.
- إذا كان $x=0$ نقول أن العدد z تخيلي صرف (أو تخيلي محض أو تخيلي بحت) .
- يكون العدد المركب z معدوما إذا و فقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما و جزؤه التخيلي معدوما.
  أي $z=0$ يعني $x=0$ و $y=0$.
- الكتابة $z=x+iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z .

3. تساوي عددين مركبين .

تعريف: يكون عددان مركبان z و z' متساويين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

نصع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$: $z=z'$ معناه $(x=x'$ و $y=y')$



4. التمثيل الهندسي لعدد مركب.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

- إلى كل عدد مركب $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ ، $y\in\mathbb{R}$ و $i^2=-1$)
نرفق النقطة M إحداثياها $x;y$ ، النقطة

M تسمى صورة العدد المركب z و الشعاع $\overrightarrow{OM}$

يسمى كذلك صورة للعدد المركب z .

- كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z=x+iy$ ، نقول أن z لاحقة النقطة M و الشعاع $\overrightarrow{OM}$.
- محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي ،لأن الأعداد الحقيقية هي لواحق نقط محور الفواصل.
- محور التراتيب يسمى المحور التخيلي لأن كل عدد تخيلي صرف هو لاحقة نقطة من محور التراتيب .
- المستوي يسمى المستوي المركب.

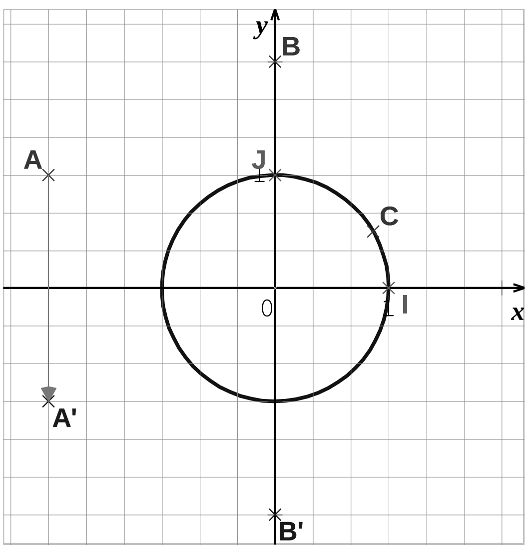
تمرين 1: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

لتكن النقط A ، B ، C من المستوي التي لواحقها $-2+i$ ، $2i$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ على الترتيب .

1) أنشئ النقط A ، B ، C في المعلم $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

2) عين لاحقة النقطة B' نظيرة B بالنسبة إلى O . أنشئ B' .

3) عين لاحقة النقطة A' نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل ، ثم عين لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AA'}$. أنشئ A' .



الحل: 1) A صورة العدد $-2+i$ إذن $A\ -2;1$.

B صورة العدد $2i$ إذن $B\ 0;2$.

C صورته العدد $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ إذن $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

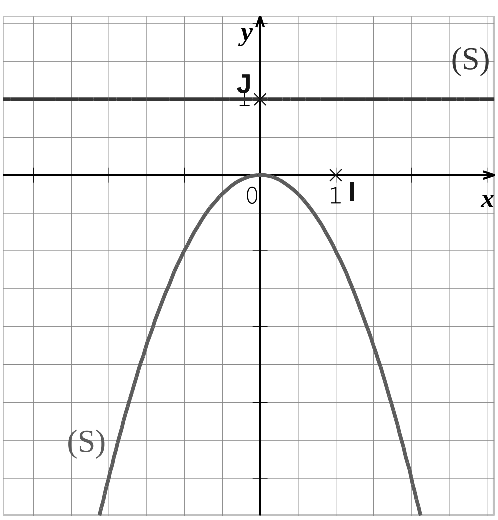
لإنشاء النقطة C يمكن الملاحظة أنها تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 1 و ترتيبها $\frac{1}{2}$.

2) B' نظيرة B بالنسبة إلى O إذن $\overrightarrow{OB'}=-\overrightarrow{OB}$. و منه $B'\ 0;-2$ و لاحقة B' هي $-2i$.

3) A' نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل إذن A' و A لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن $A'\ -2;-1$ و لاحقة A' هي $-2-i$. $\overrightarrow{AA'}\ 0;-2$ و منه لاحقة $\overrightarrow{AA'}$ هي $-2i$

تمرين 2: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$. x و y عددان حقيقيان.

لتكن المجموعة S مجموعة النقط $M\ x;y$ من المستوي حيث $z=x^2+y\ 1+i\ -i$.



عين ثمّ أنشئ المجموعة S في الحالتين الآتيتين .

1) z عدد حقيقي .   2) z عدد تخيلي صرف .

الحل: $z=x^2+y+i\ y-1$.

1) z عدد حقيقي إذا و فقط إذا كان $\operatorname{Im}\ z$ أي $y-1=0$.

إذن المجموعة S في هذه الحالة هي المستقيم ذو المعادلة $y-1=0$.

S مرسوم باللون الأحمر في هذه الحالة .

2) z عدد تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان $\operatorname{Re}\ z$ أي $x^2+y=0$. إذن المجموعة S في هذه الحالة هي القطع المكافئ ذو المعادلة $y=-x^2$.

S مرسوم باللون الأخضر في هذه الحالة .

III. العمليات في مجموعة الأعداد المركبة.

1. مجموع وجداء عددين مركبين.

تعريف: z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$) و z' عدد مركب حيث $z'=x'+iy'$ ($x'\in\mathbb{R}$ و $y'\in\mathbb{R}$) .

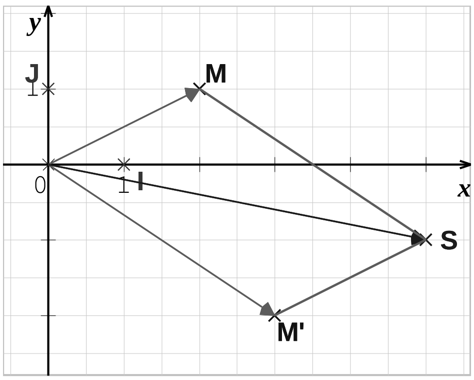
مجموع العددين z و z' هو العدد المركب $z+z'=x+x'+i\ \ y+y'$.

جداء العددين z و z' هو العدد المركب $z.z'=xx'-yy'+i\ \ xy'+x'y$.

ملاحظة: قواعد الحساب المعروفة في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$.

أمثلة :
- $2-i\ +\ -7+4i\ =\ 2-7\ +i\ -1+4\ =-5+3i$.
- $3-2i\ \ -4-7i\ =-12-21i+8i+14i^2=-26-13i$

2. التفسير الهندسي لمجموع عددين مركبين.



المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

$z=x+iy$ عدد مركب و $z'=x'+iy'$ عدد مركب .

المجموع $z+z'$ هو لاحقة النقطة S حيث: $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$.

$\overrightarrow{OS}$ هي محصلة الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$.

ملاحظات:
- إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان z' لاحقة الشعاع $\vec{v}$، فإن $z+z'$ هو لاحقة $\vec{u}+\vec{v}$.
- إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان λ عددا حقيقيا فإن λz هو لاحقة $\lambda\vec{u}$.
- شعاعان متساويان لهما نفس اللاحقة .

تمرين 3: أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

1) $z_1=\ 1-i\ ^4$ ، 2) $z_2=\ -2+i\sqrt{3}\ \ 3-5i\ +\left(1-\dfrac{1}{2}i\right)\left(\dfrac{3}{2}+4i\right)$ ، 3) $z_3=\ -7-2i\ \ 6-4i\ ^2$.

الحل: 1) $z_1=\ 1-i\ ^4$ و منه $z_1=\ 1-i\ ^2\ \ 1-i\ ^2=\ -2i\ \ -2i$ إذن $z_1=4i^2=-4$.

2) $z_2=\ -2+i\sqrt{3}\ \ 3-5i\ +\left(1-\dfrac{1}{2}i\right)\left(\dfrac{3}{2}+4i\right)$.

و منه $z_2=-6+3i\sqrt{3}+10i-5i^2\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{4}i+4i-2i^2$ إذن $z_2=-\dfrac{5}{2}+5\sqrt{3}+\left(\dfrac{53}{4}+3\sqrt{3}\right)i$.

3) $z_3=\ -7-2i\ \ 6-4i\ ^2$ و منه $z_3=\ -7-2i\ \ 20-48i\ =\ -7-2i\ \ 36-48i+16i^2$

إذن $z_3=-140+336i-40i+96i^2=-236+296i$.

تمرين 4: أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

1) $z_1=\dfrac{5}{1-2i}$ ، 2) $z_2=\dfrac{-7+4i}{4-7i}$ ، 3) $z_3=\dfrac{3+2i}{1+i\ \ -6-5i}$.

الحل: 1) $z_1=\dfrac{5}{1-2i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_1=\dfrac{5\ 1+2i}{1-2i\ \ 1+2i}$ أي $z_1=\dfrac{5\ 1+2i}{5}=1+2i$.

2) $z_2=\dfrac{-7+4i}{4-7i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_2=\dfrac{-7+4i}{4-7i}\cdot\dfrac{4+7i}{4+7i}=\dfrac{-28+16i-49i+28i^2}{16+49}$ أي $z_2=\dfrac{-56-33i}{65}=-\dfrac{56}{65}-\dfrac{33}{65}i$.

3) $z_3=\dfrac{3+2i}{(1+i)(-6-5i)}$ نقوم أولا بكتابة المقام على الشكل الجبري :

$z_3=\dfrac{3+2i}{-6-6i-5i-5i^2}=\dfrac{3+2i}{-1-11i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_3=\dfrac{(3+2i)(-1+11i)}{(-1-11i)(-1+11i)}=\dfrac{-3+33i-2i+22i^2}{1+121}$ أي $z_3=\dfrac{-25+31i}{122}=-\dfrac{25}{122}+\dfrac{31}{122}i$

تمرين 5: n عدد طبيعي غير معدوم .

1) أكتب على الشكل الجبري كل من : i^3 ، i^4 ، i^5 ، i^6 ، i^7 ، i^8 .

2) ناقش تبعا لقيم n كتابة i^n على الشكل الجبري .

الحل: 1) $i^3=i^2\times i=-i$ ، $i^4=i^2\times i^2=1$ ، $i^5=i^4\times i=i$ ، $i^6=-1$ ، $i^7=-i$ ، $i^8=1$.

2) نلاحظ أن $i^4=1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k : $i^{4k}=1$.

كذلك : $i^{4k+1}=i^{4k}\times i=i$.

$i^{4k+2}=i^{4k}\times i^2=-1$.

$i^{4k+3}=i^{4k}\times i^3=-i$.

كل عدد طبيعي n يكتب على أحد الأشكال التالية : $4k$ ، $4k+1$ ، $4k+2$ و $4k+3$.

3. لاحقة شعاع ؛ لاحقة مرجح .

خاصية: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

A و B نقطتان من المستوي، z_A لاحقة A و z_B لاحقة B .

- z_B-z_A هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$.
- α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha+\beta\neq 0$ ، G مرجح الجملة $\{(A,\alpha)\ ;\ (B,\beta)\}$ ، $\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$ هي لاحقة النقطة G .

البرهان: مباشر لأن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$.

ملاحظة: تستعمل نفس الطريقة في حساب لاحقة مرجح عدة نقط .

4. مقلوب عدد مركب.

مبرهنة: كل عدد مركب غير معدوم z له مقلوب في $\mathbb{C}$ يرمز له $\dfrac{1}{z}$.

البرهان: ليكن z عددا مركبا غير معدوم يوجد عدد مركب z' وحيد حيث $zz'=1$.

بوضع $z=x+iy$ نحصل على $z'=\dfrac{x}{x^2+y^2}+i\dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

IV. مرافق عدد مركب

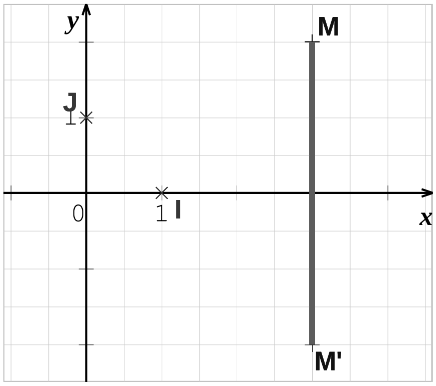
1. تعريف

z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$).

العدد المركب $x-iy$ و الذي نرمز له $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z .

ملاحظة: للحصول على مرافق عدد مركب z ، نغير إشارة الجزء التخيلي.

أمثلة : • $\overline{2+8i}=2-8i$ ، • $\overline{3-11i}=3+11i$ ، • $\overline{4i}=-4i$ ، • $\overline{-2}=-2$.



2.التفسير الهندسي لمرافق عدد مركب.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

z عدد مركب حيث $z=x+iy$.

لتكن M صورة z و M' صورة $\overline{z}$ ، M و M' لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن M و M' متناظرتان بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

3.خواص مرافق عدد مركب.

ا) خواص مباشرة من التعريف:

- $\overline{\overline{z}}=z$.
- $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$.
- $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$.
- $z\overline{z}=\left(\operatorname{Re}(z)\right)^2+\left(\operatorname{Im}(z)\right)^2$.

ب) المرافق و العمليات : z عدد مركب و مرافقه $\overline{z}$ ، z' عدد مركب و مرافقه $\overline{z'}$.

- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{zz'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$.
- $\overline{z^n}=\overline{z}^n$. $n\in\mathbb{N}^*$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$. مع $z\neq 0$.
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$. مع $z'\neq 0$.

البرهان: z و z' عددان مركبان حيث : $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$.

- $z+z'=x+x'+(y+y')i$ و منه $\overline{z+z'}=x+x'-(y+y')i$ أي $\overline{z}+\overline{z'}=x-iy+x'-iy'$

إذن $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$.

- $z\cdot z'=xx'-yy'+(xy'+x'y)i$ و $\overline{z}\cdot\overline{z'}=(x-iy)(x'-iy')$ و $\overline{z\cdot z'}=xx'-yy'-(xy'+x'y)i$

إذن $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$.

- $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ نستعمل الخاصية $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$ و الاستدلال بالتراجع.
- للبرهان على $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$ نحسب $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}$ و نحسب $\dfrac{1}{\overline{z}}$ و نقارن . نفس الطريقة بالنسبة لِـ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

تمرين 6: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z في الحالتين الآتيتين :

1) $(2-3i)z-26=0$.

2) $z-21i=-14+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}z$.

الحل: 1) $(2-3i)z-26=0$ أي $(2-3i)z=26$ و بالتالي $z=\dfrac{26}{2-3i}$.

بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على $z=\dfrac{26(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=4+6i$

لتكن S مجموعة الحلول $S=\{4+6i\}$.

2) $z-21i=-14+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}z$. نضرب الطرفين في 2 نحصل على $2z-42i=-28+i\sqrt{3}z$

$2z-i\sqrt{3}z=-28+42i$ أي $z\left(2-i\sqrt{3}\right)=-28+42i$

وبالتالي $z=\dfrac{-28+42i}{2-i\sqrt{3}}$

بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على $z=\dfrac{(-28+42i)(2+i\sqrt{3})}{(2-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})}$

$$z=(-4+6i)(2+i\sqrt{3})=(-8-6\sqrt{3})+(12-4\sqrt{3})i$$

لتكن S' مجموعة الحلول $S'=\{(-8-6\sqrt{3})+(12-4\sqrt{3})i\}$.

تمرين 7: ليكن كثير الحدود P للمتغير المركب z المعرف كما يلي :

$$P(z)=z^3+z^2-2$$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z : $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$.

2) أحسب $P(1)$ و $P(-1-i)$.

3) استنتج جذرا آخر لِـ $P(z)$.

الحل: 1) $\overline{P(z)}=\overline{z^3+z^2-2}$.

$\overline{P(z)}=\overline{z^3}+\overline{z^2}-\overline{2}$ بتطبيق خاصية المجموع .

$\overline{P(z)}=(\overline{z})^3+(\overline{z})^2-2$ بتطبيق خاصية الأس .

إذن $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$.

2) $P(1)=0$.

$$P(-1-i)=(-1-i)^3+(-1-i)^2-2$$

$P(-1-i)=2i(-1-i)+2i-2=0$.

3) $P(-1-i)=0$ و منه $\overline{P(-1-i)}=0$ وبالتالي $P(\overline{-1-i})=0$ أي $P(-1+i)=0$

إذن $(-1+i)$ جذر لِـ $P(z)$.

V . طويلة و عمدة عدد مركب.

1.طويلة عدد مركب.

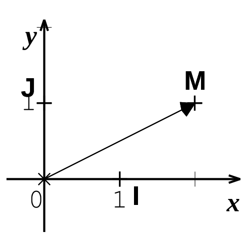
ا) تعريف: z عدد مركب حيث: $z=x+iy$ (x و y عددان حقيقيان).

نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$ حيث $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

ب) أمثلة : • $|2+8i|=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}$ ، • $|-4-3i|=\sqrt{16+9}=5$ ، • $|-7i|=\sqrt{49}=7$

ملاحظات: • إذا كان z عددا حقيقيا فإن طويلة z هي القيمة المطلقة للعدد z .

• $z=0$ يعني $|z|=0$. • $|z|^2=x^2+y^2$.



ج) التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

z عدد مركب حيث $z=x+iy$ إذا كانت M صورة z فإن $OM=|z|$

د) خواص طويلة عدد مركب.

خواص: من أجل كل عددين مركبين z و z' .

- $|\overline{z}|=|z|$.
- $|-z|=|z|$.
- $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$.
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$. مع $z'\neq 0$
- $|z^n|=|z|^n$.
- $|z+z'|\leq|z|+|z'|$. (المتباينة الثلاثية).

البرهان: مباشر.

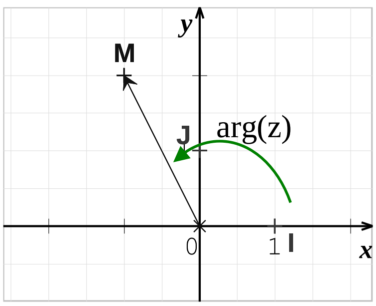
ملاحظة: A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب : $AB=|z_B-z_A|$.

2.عمدة عدد مركب غير معدوم.

تعريف: z عدد مركب غير معدوم حيث: $z=x+iy$ (x و y عددان حقيقيان).

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$ لتكن M صورة z.

نسمي عمدة العدد المركب z و نرمز $\arg\ z$ كل قيس بالراديان للزاوية الموجهة $\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}$.



ملاحظات: • كل عدد مركب غير معدوم z له عدد غير منته من العمدات .

إذا كان θ عمدة لِـ z فإن $\theta+2k\pi\quad k\in\mathbb{Z}$ عمدة لِـ z.

و نكتب $\arg\ z\ \equiv\theta\ 2\pi$.

• A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب.

$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\ =\ \overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\ -\ \overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}$ أي $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\ =\arg\ z_B\ -\arg\ z_A$

• $\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}\ =\ \arg\ z_B-z_A$.

تمرين 8: عين طويلة العدد المركب z في كل حالة من الحالات الآتية.

1) $z=\ 2+i\ \ -5+3i$ ، 2) $z=\dfrac{3-4i}{\sqrt{3}-i}$ ، 3) $z=\ -3+4i\ ^4$ ، 4) $z=\left(\dfrac{1-i\ ^6}{-8-6i\ ^2}\right)^3$.

الحل: 1) $z=\ 2+i\ \ -5+3i$

$|z|=|\ 2+i\ \ -5+3i\ |=|2+i||-5+3i|$ أي $|z|=\sqrt{5}\times\sqrt{34}=\sqrt{170}$.

2) $z=\dfrac{3-4i}{\sqrt{3}-i}$

$|z|=\left|\dfrac{3-4i}{\sqrt{3}-i}\right|=\dfrac{|3-4i|}{|\sqrt{3}-i|}$ أي $|z|=\dfrac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{3+1}}=\dfrac{5}{2}$.

3) $z=\ -3+4i\ ^4$

$|z|=|\ -3+4i\ ^4|=|-3+4i|^4$ أي $|z|=\ \sqrt{9+16}\ ^4=5^4=625$.

4) $z=\left(\dfrac{1-i\ ^6}{-8-6i\ ^2}\right)^3$

$|z|=\left|\left(\dfrac{1-i\ ^6}{-8-6i\ ^2}\right)^3\right|=\left(\dfrac{|\ 1-i\ ^6|}{|\ -8-6i\ ^2|}\right)^3=\left(\dfrac{|\ 1-i\ |^6}{|\ -8-6i\ |^2}\right)^3$ أي $|z|=\left(\dfrac{8}{100}\right)^3=\dfrac{8}{15625}$.

تمرين 9: z عدد مركب حيث $z=x+iy$ و M صورته في المستوي المركب منسوب إلى معلم

متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

نضع $a=\left|\,1-i\ \ z-2i\right|$

عين المجموعة S مجموعة النقط M من المستوي حتى يكون $a=2$.

الحل: $a=2$ يعني $\left|1-i\ \ z-2i\right|=2$ نعوض z بِـ $x+iy$ نحصل على :

$\left|1-i\quad x+iy\ -2i\right|=2$ معناه $\left|x+iy-ix-i^2y-2i\right|=2$

أي $\left|x+y+i\ \ -x+y-2\ \right|=2$. لنحسب $\left|x+y+i\ \ -x+y-2\ \right|$.

$$\left|x+y+i\ \ -x+y-2\ \right|=\sqrt{\ x+y\ ^2+\ -x+y-2\ ^2}$$

أي $\left|x+y+i\ \ -x+y-2\ \right|=\sqrt{x^2+2xy+y^2+x^2+y^2-2xy+4x-4y+4}$

أي $\left|x+y+i\ \ -x+y-2\ \right|=\sqrt{2x^2+2y^2+4x-4y+4}$

و بالتالي $\sqrt{2x^2+2y^2+4x-4y+4}=2$ نربع الطرفين $2x^2+2y^2+4x-4y+4=4$

أي $\ x+1\ ^2+\ y-1\ ^2=2$

إذن المجموعة S هي الدائرة التي مركزها $\omega\ \ -1,1$ و نصف قطرها $r=\sqrt{2}$

3. التفسير الهندسي لطويلة و عمدة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

أ) التفسير الهندسي لطويلة $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$:

$$\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|}=\frac{\left|z_{\overrightarrow{AC}}\right|}{\left|z_{\overrightarrow{AB}}\right|}=\frac{AC}{AB}$$

ب) التفسير الهندسي لعمدة $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$:

$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg\left(z_C-z_A\right)-\arg\left(z_b-z_A\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AC}\right)-\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IO}\right)+\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

ج) نتائج:

- $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ حقيقي معناه النقاط C,B,A في استقامية
- $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ تخيلي صرف معناه المثلث ABC قائم في A
- $\begin{cases} \dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{\pi}{3}+k\times 2\pi \\ \left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1 \end{cases}$ معناه المثلث ABC متقايس الأضلاع
- $\begin{cases} \dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\neq\dfrac{\pi}{3}+k\times 2\pi \\ \left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1 \end{cases}$ معناه المثلث ABC متقايس الساقين
- $\begin{cases} \dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{\pi}{2}+k\times \pi \\ \left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1 \end{cases}$ معناه المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين

تمرين 10:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

نعتبر النقاط M,B,A ذات اللواحق $z,i,\dfrac{1}{2}$ حيث $z\neq i$ على الترتيب ، نضع: $Z=\dfrac{1-2z}{1+iz}$

1. ا) بين ان $|Z|=2\dfrac{AM}{BM}$

ب) (E) مجموعة النقط من المستوي التي تحقق : $|Z|=2$

- عين ثم أنشئ المجموعة (E)

2. (F) مجموعة النقط من المستوي بحيث يكون Z حقيقي

- عين ثم أنشئ المجموعة (F)

تمرين 11:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

نعتبر النقاط C,B,A ذات اللواحق $z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $z_C=\dfrac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$

1. ا) احسب طويلة الأعداد المركبة z_A-z_B ، z_A-z_C ، z_B-z_C

ب)استنتج طبيعة المثلث ABC

2. ا) اكتب العدد المركب Z على الشكل الاسي حيث $Z=\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$

ب)استنتج قيس الزاوية الوجهة $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$

التاريخ:2015/01/20 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 05 ساعات

المجال التعليـمـــي: الحساب.

الـوحدة التعليمية (03): الأعداد المركبة.

مــوضــوع الدرس: الشكل المثلثي و الاسي لعدد مركب.

الوسـائل التعليميـة: السبورة ، الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة

الــمـراجـــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة

- طويلة وعمدة عدد مركب
- الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي و العكس.
- التعبير عن خواص لأشكال هندسية باستعمال الأعداد المركبة.
- توظيف دستور موافر لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة.
- توظيف خواص الطويلة والعمدة لحل مسائل في الأعداد المركبة وفي الهندسة.

I . طويلة و عمدة عدد مركب.

1.طويلة عدد مركب.

ا) تعريف: z عدد مركب حيث: $z=x+iy$ (x و y عددان حقيقيان).

نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$حيث $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

ب) أمثلة : • $|2+8i|=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}$ ، • $|-4-3i|=\sqrt{16+9}=5$ ، • $|-7i|=\sqrt{49}=7$

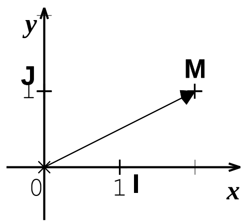
ملاحظات: •إذا كان z عددا حقيقيا فإن طويلة z هي القيمة المطلقة للعدد z .

• $z=0$ يعني $|z|=0$. • $|z|^2=x^2+y^2$.

ج) التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

z عدد مركب حيث $z=x+iy$ إذا كانت M صورة z فإن $OM=|z|$



د) خواص طويلة عدد مركب.

من أجل كل عددين مركبين z و z' .

- $|\overline{z}|=|z|$
- $|-z|=|z|$
- $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$. مع $z'\neq 0$
- $|z^n|=|z|^n$
- $|z+z'|\leq|z|+|z'|$. (المتباينة الثلاثية).
- $Z\in\mathbb{R}$ تكافئ $Z=\overline{Z}$
- Z تخيلي صرف يكافئ : $Z=-\overline{Z}$

البرهان: مباشر.

ه) نتائج : A و B و C ثلاث نقط متمايزة و z_A و z_B و z_C على الترتيب

- $|z_B-z_A|=AB$
- $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|}=\frac{|z_{\overrightarrow{AC}}|}{|z_{\overrightarrow{AB}}|}=\frac{AC}{AB}$

تمرين 1:عين طويلة العدد المركب z في كل حالة من الحالات الآتية.

(1 $z=(2+i)(-5+3i)$ ، (2 $z=\frac{3-4i}{\sqrt{3}-i}$ ، (3 $z=(-3+4i)^4$ ، (4 $z=\left(\frac{(1-i)^6}{(-8-6i)^2}\right)^3$.

الحل: 1) $z=\ 2+i\ \ -5+3i$

أي $|z|=|\ 2+i\ \ -5+3i\ |=|2+i||-5+3i|$ $|z|=\sqrt{5}\times\sqrt{34}=\sqrt{170}$.

2) $z=\frac{3-4i}{\sqrt{3}-i}$

أي $|z|=\left|\frac{3-4i}{\sqrt{3}-i}\right|=\frac{|3-4i|}{|\sqrt{3}-i|}$ $|z|=\frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{3+1}}=\frac{5}{2}$.

3) $z=\ -3+4i\ ^4$

أي $|z|=|\ -3+4i\ ^4|=|-3+4i|^4$ $|z|=\ \sqrt{9+16}\ ^4=5^4=625$.

4) $z=\left(\frac{1-i\ ^6}{-8-6i\ ^2}\right)^3$

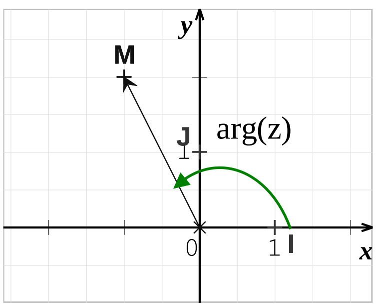
أي $|z|=\left|\left(\frac{1-i\ ^6}{-8-6i\ ^2}\right)^3\right|=\left(\frac{|1-i\ ^6|}{|-8-6i\ ^2|}\right)^3=\left(\frac{|1-i|^6}{|-8-6i|^2}\right)^3$ $|z|=\left(\frac{8}{100}\right)^3=\frac{8}{15625}$.

2.عمدة عدد مركب غير معدوم.

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\vec{OI},\vec{OJ}$. تعلم نقطة M بإحداثيتيها الديكارتية $x;y$

أو بإحداثيتيها القطبية $r;\theta$ ، $OM=r$ و $\vec{OI},\vec{OM}\ =\theta$ ، و لدينا $x=r\cos\ \theta$ و $y=r\sin\ \theta$

إذن: $\cos\ \theta\ =\frac{x}{r}$ و $\sin\ \theta\ =\frac{y}{r}$



ا) تعريف: z عدد مركب غير معدوم حيث: $z=x+iy$

(x و y عددان حقيقيان)، لتكن $M(x;y)$ صورة z في المعلم $O;\vec{OI},\vec{OJ}$

نسمي عمدة العدد المركب z و نرمز $\arg\ z$ كل قيس

بالراديان للزاوية الموجهة $\vec{OI},\vec{OM}\ =\theta$.

ب) ملاحظة:

- كل عدد مركب غير معدوم z له عدد غير منته من العمدات .

إذا كان θ عمدة لـ z فإن $\theta+2k\pi\ \ k\in\mathbb{Z}$ عمدة لـ z . و نكتب $\arg\ z\ \equiv\theta\ 2\pi$.

تمرين2: عين طويلة و عمدة كل من الأعداد المركبة التالية: ، $z_1=1+i$ ، $z_2=3i$; $z_3=-1+i\sqrt{3}$

، $z_4=1-i\sqrt{3}$

$z_5=3$; $z_6=-2-i2\sqrt{3}$

ج) نتائج : A و B و C ثلاث نقط متمايزة و z_A و z_B و z_C لواحقها على الترتيب

$$\arg(z_B)-\arg(z_A)=\left(\vec{OI};\vec{OB}\right)-\left(\vec{OI};\vec{OA}\right)$$

- $$=\left(\vec{OA};\vec{OI}\right)+\left(\vec{OI};\vec{OB}\right)$$

$$=\left(\vec{OA};\vec{OB}\right)$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A)$$
$$= \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}\right)$$
$$= \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IO}\right) + \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AC}\right)$$
$$= \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$$

II. الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم.

تعريف: z عدد مركب غير معدوم حيث: $z = x + iy$.

العدد المركب z يكتب على الشكل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث: $r = |z|$ و $\theta = \arg(z)$.

هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لـ z.

2. خواص عمدة عدد مركب غير معدوم.

خواص: z و z' عددان مركبان غير معدومين.

- $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)$ $n \in \mathbb{N}^*$
- Z حقيقي موجب يكافئ: $\arg(Z) = 0 + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$
- Z حقيقي سالب يكافئ: $\arg(Z) = \pi + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$
- $\mathrm{Im}(Z) > 0$ و $\mathrm{Re}(Z) = 0$ يكافئ: $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$
- $\mathrm{Im}(Z) < 0$ و $\mathrm{Re}(Z) = 0$ يكافئ: $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$
- $Z = Z'$ يكافئ: $|Z| = |Z'|$ و $\arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

البرهان(استعمال الشكل المثلثي): نضع $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ و $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

- $z.z' = rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)\right]$

بتطبيق دساتير الجمع: نحصل على $z.z' = rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$

إذن $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$.

- $$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\left[\frac{\left[(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta'\cos\theta)\right]}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\right]$$

بتطبيق دساتير الجمع: نحصل على $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta'))$

إذن $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$.

- للبرهان على الخاصية $\arg(z^n) = n\arg(z)$ نستعمل الخاصية $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$ و الاستدلال بالتراجع.

تمرين3:

ا) ليكن العددان المركبان $z = 1 + i$ و $z' = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$

- أكتب على الشكل المثلثي كل من z و z'

ب) ليكن العددان المركبان $Z_1 = (1+i)(-1-i\sqrt{3})$ و $Z_2 = \frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}$

- أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الجبري.
- أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل المثلثي.

الحل: ا) $z=1+i$. $|z|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. ليكن θ عمدة لِـ z .

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و منه $\frac{\pi}{4}$ عمدة لِـ z أي $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2) $z=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$. $|z|=\left|\sqrt{2}-i\sqrt{6}\right|=\sqrt{\sqrt{2}^{\,2}+\ -\sqrt{6}^{\,2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ليكن θ عمدة لِـ z .

$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ و $\sin\theta=\frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ عمدة لِـ z أي $z=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

ب) $Z_1=\ 1+i\ \ -1-i\sqrt{3}\ =-1+\sqrt{3}+i\ \ -1-\sqrt{3}$.

$Z_2=\frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}=\frac{1+i\ \ -1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}\ \ -1+i\sqrt{3}}=\frac{-1-\sqrt{3}+i\ \ -1+\sqrt{3}}{4}$. $Z_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$.

2) $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ، $-1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$.

$Z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$.

$Z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)+\sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right)$.

III . الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم.

1.الشكل الأسي لعدد مركب طويلته 1.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$. z_0 عدد مركب طويلته 1 و M_0 صورته، لتكن θ

عمدة لِـ z_0 . $z_0=\cos\theta+i\sin\theta$ ، لتكن f الدالة التي بكل عدد حقيقي θ ترفق العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له. أي $f\ \theta\ =\cos\theta+i\sin\theta$.

θ و θ' عددان حقيقيان لنحسب $f\ \theta+\theta'$ و $f\ \theta\cdot f\ \theta'$.

$f\ \theta+\theta'\ =\cos\ \theta+\theta'\ +\sin\ \theta+\theta'$

أي $f\ \theta+\theta'\ =\ \cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\ +i\ \sin\theta\cos\theta'+\sin\theta'\cos\theta$

. $f\ \theta\cdot f\ \theta'\ =\ \cos\theta+i\sin\theta\ \ \ \cos\theta'+i\sin\theta'$

أي $f\ \theta\cdot f\ \theta'\ =\ \cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta'\ +i\ \sin\theta\cos\theta'+\sin\theta'\cos\theta$

ونستنتج أن $f\ \theta+\theta'\ =f\ \theta\cdot f\ \theta'$

بما أن الدالة الأسية تحول مجموع عددين إلى جداء صورتيهما تم التفكير في الترميز الأسي للعدد z_0.

نضع. $z_0=e^{i\theta}$.

تعريف: العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له يكتب $e^{i\theta}$. حيث $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

هذا الترميز يسمى ترميز أولر.

2.الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم.

تعريف: العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له يكتب $z=re^{i\theta}$. هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z.

3. قواعد الحساب على الشكل الأسي.

θ و θ' عددان حقيقيان.

- $e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'}$.
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$.
- $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$.

أمثلة : • $z_1=1+i$ يكتب $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، • $z_1=-1-i\sqrt{3}$ يكتب $z_1=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

• $z_1=1-i$ يكتب $z_1=\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، • $z_1=-\sqrt{3}+i$ يكتب $z_1=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

4. دستور موافر

خاصية: z عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا:

$\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$.

ملاحظة : يمكن تعميم الخاصية السابقة على الأعداد المركبة من الشكل $z=re^{i\theta}$ أي : $\left(re^{i\theta}\right)^n=r^ne^{in\theta}$

تمرين 4: 1) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الجبري :

• $z_0=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ • $z_1=8e^{-i\frac{\pi}{4}}$ • $z_2=5e^{i\frac{\pi}{2}}$ • $z_3=6e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الأسي :

• $z_0=-7i$ • $z_1=-3-3i$ • $z_2=\left(1-i\right)^8$ • $z_3=\left(\sqrt{3}+i\right)^6$

الحل: 1) • $z_0=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

أي $z_0=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$.

• $z_1=8e^{-i\frac{\pi}{4}}=8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

أي $z_1=8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}$.

• $z_2=5e^{i\frac{\pi}{2}}=5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

أي $z_2=5\left(0+i\left(1\right)\right)=5i$.

• $z_3=6e^{i\frac{2\pi}{3}}=6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

أي $z_3=6\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3+3i\sqrt{3}$

2) • $z_0=-7i=7e^{-i\frac{\pi}{2}}$

• $z_1=-3-3i=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

أي $z_1=3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

• $z_2=\left(1-i\right)^8=\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^8$.

أي $z_2=\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^8=\left(\sqrt{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right)^8=16e^{-2i\pi}$.

• $z_3=\left(\sqrt{3}+i\right)^6=\left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^6$.

أي $z_3=2^6\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^6=64\left(\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{6}\right)\right)=64\left(\cos\left(\pi\right)+i\sin\left(\pi\right)\right)$.

إذن $z_3=64e^{i\pi}$.

IV. تطبيقات (توظيف خواص الطويلة والعمدة في حل مسائل في الأعداد المركبة والهندسة).

تمرين 1: في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ ، لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A=-i\sqrt{3}$ ، $z_B=3+2i\sqrt{3}$ ، $z_C=-3+2i\sqrt{3}$.

1. احسب طويلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.
2. استنتج طبيعة المثلث ABC .

الحل: 1) • $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=\frac{\left|z_B-z_A\right|}{\left|z_C-z_A\right|}=\frac{AB}{AC}$. • $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\arg\left(z_B-z_A\right)-\arg\left(z_C-z_A\right)$

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$.

2) $\frac{AB}{AC}=1=\left|\frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}\right|=\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|$ و منه $AB=AC$. $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\arg\left(\frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}\right)$

و منه $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{\pi}{3}$ إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

تمرين 2:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

نعتبر النقاط M,B,A ذات اللواحق $z_A=1-2i$ ، $z_B=i$ حيث $z\neq i$ على الترتيب ، نضع: $Z=\frac{1-2z}{1+iz}$

1. ا) بين ان $\left|Z\right|=2\frac{AM}{BM}$

ب) (E) مجموعة النقط من المستوي التي تحقق : $\left|Z\right|=2$

• عين ثم أنشئ المجموعة (E)

2. (F) مجموعة النقط من المستوي بحيث يكون Z حقيقي

• عين ثم أنشئ المجموعة (F)

تمرين 3: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

نعتبر النقاط C,B,A ذات اللواحق $z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$

1. ا) احسب طويلة الأعداد المركبة z_A-z_B ، z_A-z_C ، z_B-z_C

ب)استنتج طبيعة المثلث ABC

2. ا) اكتب العدد المركب Z على الشكل الاسي حيث: $Z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$

ب)استنتج قيس الزاوية الوجهة $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$

تمرين 4 ليكن العدد المركب $z=4+4i\sqrt{3}$.

1. أكتب على الشكل المثلثي، ثم على الشكل الاسي كل من الاعداد المركبة التالية:

. z^{2015} ، z^{1436} ، z^2 ، z

2. استنتج الشكل الجبري لكل من الأعداد المركبة السابقة .

3. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب z^n :

ا) حقيقي سالب

ب) تخيلي صرف

تمرين 5: نعتبر العدد المركب $z=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

1. احسب z^2 ثم عين طويلة وعمدة للعدد المركب z^2

2. عين طويلة وعمدة للعدد المركب z

3. استنتج ان : $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

تمرين 7: في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$ ، لتكن النقط A ،

B و التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1+i$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$

1. اكتب على الشكل المثلثي، ثم الاسي العددين المركبين z_A ، z_B

2. ا)اكتب على الشكل الجبري، ثم الاسي العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$

ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

3. ا) n عدد طبيعي،عين قيم n بحيث يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقيا

ب) عين قيمة العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{456}$

تمرين 6: في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$ ، لتكن النقط A ،

B و M التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، z .

1. اكتب على الشكل الاسي العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ ، ثم استنتج نوع المثلث OAB

2. n عدد طبيعي ليس من مضاعفات العدد 3

- بين انه من اجل كل n لدينا : $z_A^n-z_B^n=i$

3. (E) مجموعة النقط من المستوي حيث: $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+ke^{i\frac{4\pi}{3}}$

- عين المجموعة (E) لما يمسح k مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

4. (F) مجموعة النقط من المستوي حيث: $z=-2+i+2e^{i\theta}$

- عين المجموعة (F) لما يمسح θ مجموعة الأعداد الحقيقية

التاريخ: 2015/01/26 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 03 ساعات

المجال التعليمي: الحساب.

الوحدة التعليمية (03): الأعداد المركبة.

موضوع الدرس: المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$.

الوسائل التعليمية: السبورة ، الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة

المراجع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة

- ايجاد الجذران التربيعيان لعدد مركب
- حل معادلات من الدرجة الثانية في المجموعة $\mathbb{C}$
- حل معادلات يؤول حلها الى حل معادلات من الدرجة الثانية في المجموعة $\mathbb{C}$

1.الجذران التربيعيان لعدد مركب.

تعريف: ω عدد مركب .يسمى حلا المعادلة $z^2=\omega$ في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين للعدد ω .

أمثلة :

- الجذران التربيعيان للعدد -9 هما $-3i$ و $3i$.

ملاحظة: كل عدد مركب له جذران تربيعيان متناظران .

تمرين 1: عين الجذرين التربيعيين للعدد $z=-8+6i$:

الحل: ليكن $\omega=x+iy$ جذرا تربيعيا لِـ z . أي $z=\omega^2$.

$\omega^2=x^2-y^2+2xyi$.

$|\omega^2|=|\omega|^2=x^2+y^2$ ، $|z|=|-8+6i|=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10$

$z=\omega^2$ يعني $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2-y^2=-8 \\ 2xy=6 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2x^2=2 \\ y^2=10-x^2 \\ xy=3 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=9 \\ xy=3 \end{cases}$

أي $(x=1$ و $y=3)$ أو $(x=-1$ و $y=-3)$ لأن $xy>0$

إذن $\omega=1+3i$ أو $\omega=-1-3i$.

2. المعادلات من الدرجة الثانية .

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2+bz+c=0 \;....\; (1)$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية و $a\neq 0$.

$az^2+bz+c=a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ بوضع $\Delta=b^2-4ac$ نحصل على

$az^2+bz+c=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$. حل المعادلة (1) يئول إلى حل المعادلة $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$.

مبرهنة: لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z: $az^2+bz+c=0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية و $a\neq 0$.

$\Delta=b^2-4ac$ مميزها .

- إذا كان $\Delta = 0$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا $z = -\frac{b}{2a}$.
- إذا كان $\Delta \neq 0$ ، المعادلة تقبل حلين متمايزين :

$$z' = \frac{-b-\omega}{2a} \quad \text{و} \quad z'' = \frac{-b+\omega}{2a}$$

حيث ω جذر تربيعي لِـ Δ.

ملاحظة: إذا كان z' و z'' حلي المعادلة فإن من أجل كل عدد مركب z :

$$a z^2 + b z + c = a\ z - z'\ \ z - z''$$

تمرين 2:

1. حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة(1) ذات المجهول المركب z

$z^2 - z + 1 = 0$ .... (1)

2. نرمز الى z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب z_2 الحل الآخر للمعادلة (1)

أ) اكتب الشكل المثلثي، ثم الشكل الاسي لـ z_1 و z_2

ب) بين العدد $z_1^{2010} + z_2^{2010}$ حقيقي.

تمرين 3:

1. حل في $\mathbb{C}$، المعادلة: $z^2 + z + 1 = 0$

2. استنتج حلول المعادلة ذات المجهول: $\left(\bar{z} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\bar{z} - \frac{1}{2}\right) + 1 = 0$

تمرين 4:

1. حل في $\mathbb{C}$، المعادلة : $z^2 - 2(\sin\theta)z + 1 = 0$ ....(1) ، حيث θ عدد حقيقي .

2. اكتب الشكل المثلثي، ثم الشكل الاسي لـ حلي المعادلة (1)

تمرين 5:

ليكن P كثير حدود للمتغير المركب z .المعرف كمايلي:

$$P(z) = z^3 + 2z^2 - 16$$

1. برر أن العدد 2 هو جذر لـ P .

2. جد العددين الحقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد مركب z ،

$P(z) = (z-2)(z^2 + az^2 + b)$.

3. حل في $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z) = 0$.

تمرين 6:

ليكن Q كثير حدود للمتغير المركب z .المعرف كمايلي:

$$Q(z) = 2z^3 - 3z^2 + 2z - 1$$

1. احسب $Q(1)$ ماذا تستنتج؟

2. اوجد كثير حدود P للمتغير المركب z الذي يحقق: $Q(z) = (x-1)P(z)$

3. حل في $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z) = 0$.

التاريخ:2015/01/27 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 05 ساعات

المجال التعليــمـــي: الحساب.

الـوحدة التعليمية (03): الأعداد المركبة.

مــوضـوع الدرس: الأعداد المركبة و التحويلات النقطية.

الوسـائل التعليـميـة: السبورة ، الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة

الـمـراجــــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

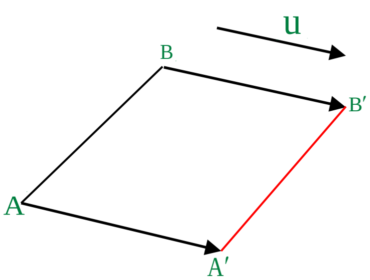
الكفاءات المستهدفة

- تعيين الكتابة المركبة للتحويلات المألوفة (الانسحاب، التحاكي، الدوران).
- التعرف عن تحويل انطلاقا من كتابته المركبة.
- حل مسائل هندسية تتطلب استعمال انسحابات، تحاكيات أو دورانات بواسطة الأعداد المركبة.
- توظيف الأعداد المركبة لبرهان خواص الانسحاب، الدوران والتحاكي.

I . تذكير حول التحويلات النقطية المألوفة

1. الانسحاب .

تعريف: الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$



أ) خواص:

- الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل أية نقطة صامدة و الانسحاب الذي شعاعه $\vec{0}$ هو التحويل الثابت.
- الخاصة المميزة: صورة ثنائية A, B هي ثنائية A', B' تحقق $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$.
- الانسحاب تقايس.

ب) تمرين 1: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ليكن التحويل النقطي f الذي إلى كل نقطة $M(x,y)$ يرفق النقطة $M'(x',y')$ حيث $\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y+2 \end{cases}$

أثبت أن التحويل f انسحاب .

الحل: لتكن $M(x,y)$ و $M'(x',y')$ نقطتان من المستوي .

$\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y+2 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} x'-x=-1 \\ y'-y=2 \end{cases}$ ولدينا $\overrightarrow{MM'}(x'-x, y'-y)$ إذن $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ مع $\vec{u}(-1,2)$.

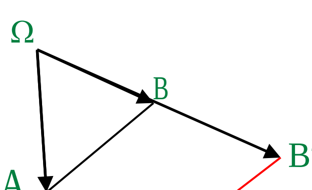
إذن التحويل f هو انسحاب شعاعه $\vec{u}$.

2. التحاكي.

أ) تعريف: Ω نقطة ثابتة و k عدد حقيقي غير معدوم. التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{\Omega M'}=k.\overrightarrow{\Omega M}$
$k \in \mathbb{R}^* - 1$

ب) خواص:

- إذا اختلفت M عن Ω فإن M' تختلف عن Ω و النقط Ω ، M و M' على استقامية.
- التحاكي الذي مركزه Ω و k نسبته له نقطة صامدة وحيدة هي المركز Ω.
- الخاصة المميزة: صورة ثنائية A, B بالتحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هي الثنائية A', B' التي تحقق: $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$
- التحاكي ليس تقايسا (إذا كان $|k|\neq 1$ فإن $A'B'\neq AB$)



تمرين 2: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

ليكن التحويل النقطي g الذي إلى كل نقطة $M(x,y)$ يرفق النقطة $M'(x',y')$ حيث

$$\begin{cases} x'=-\frac{1}{2}x-4 \\ y'=-\frac{1}{2}y+1 \end{cases}.$$

أثبت أن التحويل g تحاك يطلب عناصره المميّزة .

الحل: نعتبر النقطة $\omega(x,y)$ حيث هي صامدة بالتحويل g ومنه :

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}x-4 \\ y=-\frac{1}{2}y+1 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} \frac{3}{2}x=-4 \\ \frac{3}{2}y=+1 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x=-\frac{8}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases} \text{ إذن } \omega\left(-\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right)$$

لتكن $M(x,y)$ و $M'(x',y')$ نقطتين من المستوي .

$$\begin{cases} x'=-\frac{1}{2}x-4 \\ y'=-\frac{1}{2}y+1 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} x'+\frac{8}{3}=-\frac{1}{2}x-\frac{4}{3} \\ y'-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{3} \end{cases} \text{ ومعناه } \begin{cases} x'+\frac{8}{3}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{8}{3}\right) \\ y'-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(y+\frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

إذن $\overrightarrow{\omega M'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\omega M}$ وبالتالي g تحاك مركزه ω ونسبته $-\frac{1}{2}$.

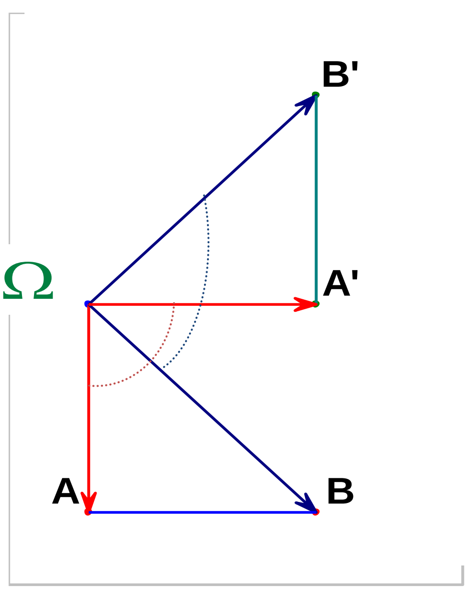
3. الدوران

أ) تعريف: ω نقطة من المستوي الموجه و θ عدد حقيقي

الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ هو التحويل النقطي الذي يرفق النقطة Ω بنفسها و يرفق بكل نقطة M تختلف عن Ω النقطة M' حيث: $\Omega M'=\Omega M$ و $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta$

ب) خواص:

- الدوران الذي مركزه Ω و زاويته غير معدومة له نقطة صامدة وحيدة هي المركز Ω.
- الخاصة المميزة: صورة كل ثنائية A,B بالدوران الذي مركزه ω و زاويته θ هي ثنائية A',B' تحقق ما يلي: $A'B'=AB$ و $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)=\theta$ تبين هذه النتيجة أن الدوران تقايس.



تمرين 3: المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

ليكن التحويل النقطي g الذي إلى كل نقطة $M(x,y)$ يرفق النقطة $M'(x',y')$ حيث $\begin{cases} x'=-y \\ y'=x \end{cases}$.

1. أثبت أن $OM=OM'$.

2. بيّن $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$.
3. ما هي طبيعة التحويل g ؟

الحل:

1. $OM=x^2+y^2$ ، $OM'=x'^2+y'^2=y^2+x^2=OM$

2 . $\overrightarrow{OM}=(x,y)$ ، $\overrightarrow{OM'}=(x',y')$ ولدينا $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}=xx'+yy'=-xy+yx=0$ إذن $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$

3. g هو دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

II. الأعداد المركبة و التحويلات النقطية.

1. دراسة التحويل النقطي: $z'=az+b$

في كل ما يأتي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$

f تحويل نقطي من المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=az+b$ مع $a\in\mathbb{R}^*$ أو $a\in\mathbb{C}$ و $|a|=1$.ونكتب $f(M)=M'$ يعني $z'=az+b$.

أ) الحالة الأولى. $a=1$.

$f(M)=M'$ يعني $z'=z+b$. و بالتالي $z'-z=b$ و بما أن $z'-z$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ فإن $\overrightarrow{MM'}=\vec{U}$ حيث $\vec{U}$ صورة العدد المركب b و بالتالي التحويل f هو الانسحاب الذي شعاعه $\vec{U}$ ذو اللاحقة b.

- خاصية1:التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=z+b$
(b عدد مركب) هو انسحاب شعاعه $\vec{U}$ صورة b.
- العبارة المركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{U}$ ونسبته a: $z'=z+z_{\vec{u}}$
- تمرين 1: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

$t_{\vec{u}}$ الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-2;1)$

1) عين العبارة المركبة للانسحاب $t_{\vec{u}}$.

2) A النقطة التي لاحقتها $3-i$ ، عين لاحقة النقطة A' صورة A بالانسحاب $t_{\vec{u}}$.

الحل: 1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالانسحاب $t_{\vec{u}}$.

$t_{\vec{u}}(M)=M'$ يعني $z'=z-2+i$.

2) $t_{\vec{u}}(A)=A'$ يعني $z_{A'}=z_A-2+i$ و منه $z_{A'}=3-i-2+i=1$.

ب) الحالة الثانية. $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$.

$f(M)=M'$ يعني $z'=az+b$. لتكن Ω لاحقتها ω نقطة صامدة بالتحويل f و منه $f(\Omega)=\Omega$.

$f(\Omega)=\Omega$ يعني $\omega=a\omega+b$ أي $(1-a)\omega=b$ بما أن $a\neq1$ فإن $\omega=\frac{b}{1-a}$ و Ω وحيدة .

بطرح المساوتين طرفا بمن طرف $z'=az+b$ و $\omega=a\omega+b$ نحصل على $z'-\omega=a(z-\omega)$.

من $z'-\omega=a(z-\omega)$ و a عدد حقيقي، نستنتج أن $\overrightarrow{\Omega M'}=a\overrightarrow{\Omega M}$.

و بالتالي f هو التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته a .

- خاصية2:التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب ، هو التحاكي الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ونسبته a.
- العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه Ω ونسبته a: $z'-z_{\Omega}=a(z-z_{\Omega})$

- تمرين 2: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

h التحاكي الذي مركزه A ذات اللاحقة $-1+2i$ و نسبته 3 .

1) عين العبارة المركبة للتحاكي h .

2) B النقطة التي لاحقتها $-3-2i$ ، عين لاحقة النقطة B' صورة B بالتحاكي h .

الحل: 1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالتحاكي h .

$h\ M\ =M'$ يعني $z'=3z+b$. بما أن النقطة A هي مركز التحاكي فإن $h\ A\ =A$ و منه $z_A=3z_A+b$.

أي $-1+2i\ +b=3\ -1+2i$ و منه $b=2-4i$. إذن $z'=3z+2-4i$.

2) $h\ B\ =B'$ يعني $z_{B'}=3z_B+2-4i$ و منه $z_{B'}=3\ -3-2i\ +2-4i=-7-10i$.

ج) الحالة الثالثة. $a\in\mathbb{C}$ و $|a|=1$.

$f\ M\ =M'$ يعني $z'=az+b$. لتكن Ω ذات اللاحقة ω نقطة صامدة بالتحويل f أي $f\ \Omega\ =\Omega$

يعني $\omega=a\omega+b$ أي $\omega\ 1-a\ =b$ وبما أن $a\neq1$ فإن $\omega=\dfrac{b}{1-a}$ وبالتالي Ω وحيدة .

بطرح المساوتين طرفا من طرف $z'=az+b$ و $\omega=a\omega+b$ نحصل على $z'-\omega=a\ z-\omega$ ،

أي $a=\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$. نستنتج أن $\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=|a|=1$ و $\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)=\arg\ a$.

أي $\Omega M'=\Omega M$ و $\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\ =\arg\ a$

و بالتالي f هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\arg\ a$.

- خاصية3: التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب ، هو الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\dfrac{b}{1-a}$ ، وزاويته $\arg\ a$.

- العبارة المركبة للدوران r الذي مركزه Ω ، وزاويته θ ، $\left(\arg(a)=\theta\right)$: $z'-z_\Omega=e^{i\theta}(z-z_\Omega)$

تمرين 3: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

r الدوران الذي مركزه A ذات اللاحقة $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ و زاويته θ حيث $\dfrac{\pi}{3}$ أحد أقياسها .

1) عين العبارة المركبة للدوران r.

2) B النقطة التي لاحقتها $1-i\sqrt{3}$ ، عين لاحقة النقطة B' صورة B بالدوران r.

الحل: 1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالدوران r.

$r\ M\ =M'$ يعني $z'=az+b$ حيث $|a|=1$ و $\arg\ a\ =\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$. $k\in\mathbb{Z}$

و منه $a=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}}$

بما أن النقطة A هي مركز التحاكي فإن $h\ A\ =A$ و منه $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}z_A+b$

نعلم أن $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{4\pi}{3}}$ و منه $e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}+b=e^{i\frac{5\pi}{3}}+b=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\ +b$

إذن $b=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\ =-1$ أي $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-1$.

3) $r\ B\ =B'$ يعني $z_{B'}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_B-1$ أي $z_{B'}=1$.

III . تطبيقات

تمرين 1

t تحويل نقطي في المستوي يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z'=\alpha z+\beta$.

في كل من الحالات المقترحة أدناه ، عيّن طبيعة التحويل t مع ذكر عناصره المميّزة .

أ) $\alpha=1$ و $\beta=3+i$.

ب) $\alpha=i$ و $\beta=1-i$.

ج) $\alpha=\dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$ و $\beta=0$.

د) $\alpha=\dfrac{5}{2}$ و $\beta=\dfrac{2i}{5}$.

تمرين 2

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{U};\vec{V})$

نعتبر النقطة I ذات اللاحقة $z_I=i$

1.ا) بين أن النقطة A ذات اللاحقة $z_A=\sqrt{3}+i2$ تنتمي إلى الدائرة (C) ذات المركز I وطول نصف القطر $r=2$

ب) أنشئ الدائرة (C) واستنتج إنشاء النقطة A

2. لتكن النقطة B ذات اللاحقة $z_B=-1+i(\sqrt{3}+1)$

أ) اكتب $\dfrac{z_B-z_I}{z_A-z_I}$ على الشكل الأسي

ب) استنتج أن B صورة A بدوران R يطلب تعيين عناصره المميزة.

ج) أنشئ النقطة B

3. لتكن النقطة C صورة A بالدوران R' الذي مركزه I وزاويته π

أ) احسب اللاحقة z_C

ب) ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

تمرين 3

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{U};\vec{V})$

نعتبر النقط A ، B ، C لواحقها على الترتيب : $z_A=1+i$ ، $z_B=1-i$ ، $z_C=-i\sqrt{3}$

1.أ) علّم النقط A ، B ، C

ب) النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة B ، بين أن: $z_D=2+i(\sqrt{3}-2)$

2. نعتبر الدوران R الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ والانسحاب T لاحقة شعاعه $2i$

أ) اكتب العبارة المركبة لكل من R ، T

ب) عين z_E و z_G لاحقتي النقطتين E و G صورتي C و D بالدوران R على الترتيب.

ج) عين z_H و z_F لاحقتي النقطتين H و F صورتي C و D بالانسحاب T على الترتيب.

3. **أ)** بين أن A منتصف $[HF]$ هي منتصف $[EG]$

ب) بين أن : $\dfrac{z_G - z_A}{z_F - z_A} = i$

ج) استنتج طبيعة الرباعي $EFGH$.

التاريخ:2015/02/08 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 05 ساعات

المجال التعليـمـــي: الحساب.

الـوحدة التعليميـة (03): الأعداد المركبة.

مــوضـوع الدرس: التشابه المباشر.

الوسـائل التعليـميـة: السبورة ، الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة

الـمـراجـــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة

- التعرّف على تشابه مباشر.
- التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة.
- تركيب تشابهين مباشرين.
- تعيين التحليل القانوني لتشابه مباشر بواسطة الأعداد المركبة.
- توظيف التحليل القانوني لتشابه مباشر بواسطة الأعداد المركبة.
- توظيف خواص التشابهات المباشرة لحل مسائل هندسية.

I. التشابه المباشر.

في كل ما يأتي،المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

1. تعريف .

القول أن التحويل النقطي S تشابه مباشر معناه أن S يحافظ على نسب المسافات و على أقياس الزوايا الموجهة أي من أجل كل نقط M,N,P,Q من المستوي و $M\neq N$ ، صورها M',N',P',Q' بتشابه مباشر S على الترتيب فإن: $\frac{P'Q'}{M'N'}=\frac{PQ}{MN}$ و $\left(\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{P'Q'}\right)=\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{PQ}\right)$.

2. نسبة تشابه مباشر .

ا)خاصية: إذا كان S تشابها مباشرا فإن S يضرب المسافات في عدد حقيقي موجب تماما k.

العدد k يسمى نسبة التشابه S .

البرهان: ليكن S تشابها مباشرا، من أجل كل نقط M,N,P,Q من المستوي و $M\neq N$ ، صورها M',N',P',Q' على الترتيب لدينا $\frac{P'Q'}{M'N'}=\frac{PQ}{MN}$ و منه $\frac{P'Q'}{PQ}=\frac{M'N'}{MN}$ و بالتالي النسبة $\frac{M'N'}{MN}$ تساوي عددا ثابتا k حيث k عدد حقيقي موجب تماما . و منه $M'N'=kMN$.

ب) حالة خاصة: إذا كان $k=1$ نقول عن التشابه المباشر S أنه تقايس موجب أو إزاحة أي S انسحاب أو دوران .

2. زاوية تشابه مباشر .

تعريف: S تشابه مباشر من المستوي . S يحافظ على الزوايا الموجهة $\left(\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{P'Q'}\right)=\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{PQ}\right)$.

و منه الزاوية $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}\right)$ زاوية ثابتة مستقلة عن اختيار النقطتين M و N هذه الزاوية $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}\right)$ تسمى زاوية التشابه المباشر S.

3. التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة .

ا) خاصية: كل تشابه مباشر من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z'=az+b$ حيث a و b عددان مركبان و $a\neq 0$.

البرهان: O هي نقطة لاحقتها 0، I نقطة لاحقتها 1 و M نقطة لاحقتها z

$O'\ p'$,$L'\ q'$,$M'\ z'$ صور O,I,M على الترتيب بالتشابه المباشر S

من $\frac{O'M'}{O'I'}=\frac{OM}{OI}$ و $\overrightarrow{O'I'},\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}$ (مع $M\neq 0$)

و منه نستنتج $\left|\frac{z'-p'}{q'-p'}\right|=\left|\frac{z-0}{1-0}\right|$ و $\arg\left(\frac{z'-p'}{q'-p'}\right)=\arg\left(\frac{z-0}{1-0}\right)$ و بالتالي

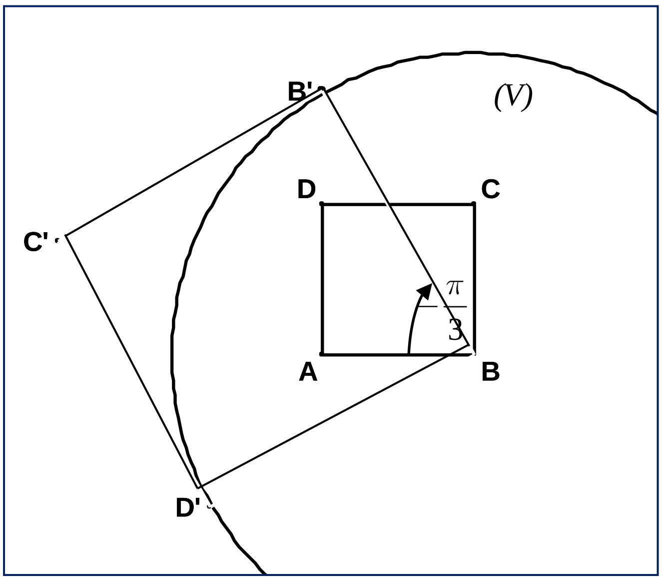
$z' = q'-p'\ z+p'$

بوضع $a=q'-p'$ ($O\neq I$ و بالتالي $p'\neq q'$ و $a\neq 0$) و $b=p'$ يمكن التأكيد أن الصيغة المركبة لِـ S هي $z'=az+b$ مع $a\neq 0$.

تمرين 1: $ABCD$ مربع مباشر من المستوي .

S التشابه المباشر الذي نسبته 2 و زاويته $\frac{2\pi}{3}$. نفرض $S\ A = B$.

أنشئ النقط B' ، C' ، D' صور B ، C ، D على الترتيب بالتشابه المباشر S



طريقة: لإنشاء صور نقط بتشابه مباشر S يمكن:

- استعمال المحافظة على الزوايا .
- استعمال النسبة k و الزاوية θ لِـ S. أي

$$\begin{cases} M'N' = k\ MN \\ \overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'} = \theta \end{cases}$$

الحل: النقطة B' معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} BB' = 2AB \\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{BB'} = \frac{2\pi}{3}+2\pi t \end{cases}$$ حيث t عدد صحيح

أي النقطة B' تنتمي إلى الدائرة V التي مركزها B و نصف قطرها $2AB$ وكذلك $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BB'} = \frac{2\pi}{3}$

أي $\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BB'} = -\frac{\pi}{3}$ يعني النقطة B' تنتمي إلى نصف المستقيم Bl الذي يكوّن الزاوية $-\frac{\pi}{3}$ مع المستقيم BA . بما أن $ABCD$ مربع و التشابه المباشر يحافظ على نسب المسافات و الزوايا الموجهة فإن $BB'C'D'$ مربع و هذا يجعلنا ننشئ C' و D'

تمرين 2: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

ليكن S التشابه المباشر الذي بكل نقطة M لاحقتها z يرفق النقطة M' لاحقتها z' حيث:

$z' = 1+i\ z-2i$.

1) عين A' صورة النقطة $A\ 1,-1$.

2) عين B' صورة النقطة $B\ 0,1$.

3) عين k نسبة التحويل S.

الحل: 1) $S\ A = A'$ و منه $z_{A'} = 1+i\ \ 1-i\ -2i = 2-2i$ أي $A'\ 2,-2$.

2) $S(B)=B'$ و منه $z_{B'}=(1+i)(i)-2i=-1-i$ أي $B'(-1,-1)$.

3) التشابه المباشر يحافظ على نسب المسافات ومنه $k=\dfrac{|z_{B'}-z_{A'}|}{|z_B-z_A|}=\dfrac{A'B'}{AB}$.

إذن $k=\dfrac{|-1-i-2+2i|}{|i-1+i|}=\dfrac{|-3+i|}{|-1+2i|}=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$

II. خواص التشابه المباشر

في كل ما يأتي،المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

1. تحويل نقطي كتابته المركبة $z'=az+b$.

أ) خاصية: a و b عددان مركبان حيث $a\neq 0$.
إذا كان S تحويلا نقطيا من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z'=az+b$ ، فإن S تشابه مباشر نسبته $|a|$. زاويته $\theta=\arg a$

البرهان:
M ، N ، P ، Q نقط كيفية من المستوي لواحقها m ، n ، p ، q على الترتيب .
M' ، N' ، P' ، Q' صور M ، N ، P ، Q على الترتيب بالتحويل S .
m' ، n' ، p' ، q' لواحق M' ، N' ، P' ، Q' على الترتيب .
$m'=am+b$ ، $n'=an+b$ ، $p'=ap+b$ ، $q'=aq+b$.

- $M'N'=|n'-m'|=|an+b-am-b|$ و منه $M'N'=|a|\times MN$ و منه $\dfrac{M'N'}{MN}=|a|$

بنفس الطريقة $\dfrac{Q'P'}{QP}=|a|$ و بالتالي $\dfrac{Q'P'}{QP}=\dfrac{M'N'}{MN}$ أي $\dfrac{MN}{QP}=\dfrac{M'N'}{Q'P'}$.
و منه S يحافظ على نسب المسافات.

- بفرض $M\neq N$ و $P\neq Q$ لدينا $\dfrac{q'-p'}{n'-m'}=\dfrac{aq+b-ap-b}{an+b-am-b}$ و منه $\dfrac{q-p}{n-m}=\dfrac{aq-ap}{an-am}=\dfrac{q'-p'}{n'-m'}$

و منه $\arg\left(\dfrac{q-p}{n-m}\right)=\arg\left(\dfrac{q'-p'}{n'-m'}\right)$ أي $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PQ}\right)=\left(\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{P'Q'}\right)$.
و منه S يحافظ على الزوايا.
S يحافظ على نسب المسافات و يحافظ على الزوايا إذن S تشابه مباشر . وبما أن $M'N'=|a|\times MN$ فإن $|a|$
هي نسبة التشابه المباشر S.

ب) ملاحظة: لا توجد تشابهات أخرى كتابتها المركبة تختلف عن $z'=az+b$ مع $a\in\mathbb{C}^*$ و $b\in\mathbb{C}$.

2.حالات خاصة.

1) الانسحاب تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z'=z+b$ و هو من الشكل $z'=az+b$ مع $a=1$. نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي 1 .

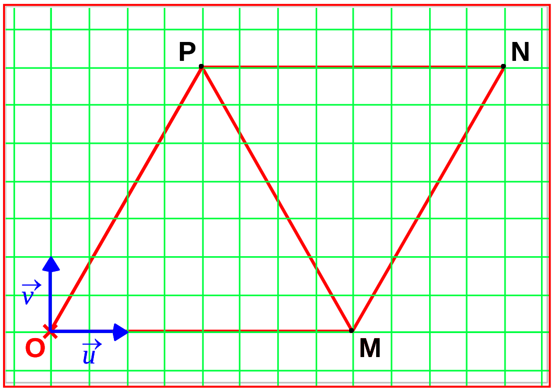
2) التحاكي تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z'=az+b$ حيث a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 . نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي $|a|$.

3) الدوران تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z'=az+b$ حيث a عدد مركب غير حقيقي ، طويلته تساوي1 . نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي 1 . زاوية التشابه المباشر في هذه الحالة هي زاوية الدوران أي $\arg a$.

تمرين 3: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\vec{u},\vec{v}$.

من أجل كل نقطة M من المستوي ، نعتبر المعين المباشر $OMNP$ حيث $MP=OM$.
أثبت أن النقطة N صورة النقطة M بتشابه مباشر يطلب تعيين نسبته .

طريقة: للبرهان على أن تحويل نقطي تشابه مباشر يكفي إيجاد كتابته المركبة من الشكل :
$z'=az+b$ مع a و b عددان مركبان حيث $a\neq 0$.
نسبة التشابه المباشر هي $|a|$



الحل: المثلث OMP مثلث متقايس الأضلاع مباشر إذن P هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ليكن r هذا الدوران . الكتابة المركبة للدوران r هي $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z$.
$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}$ ، إذن $z_N=z_M+z_P$.
$r\ M\ =P$ و منه $z_P=e^{i\frac{\pi}{3}}z_M$.
و بالتالي : $z_N=z_M+e^{i\frac{\pi}{3}}z_M=\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)z_M=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}z_M$.
إذن N صورة M بالتحويل النقطي الذي كتابته المركبة $z'=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}z$ و وهي الكتابة المركبة للتشابه المباشر
الذي نسبته $\sqrt{3}=\left|\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right|$.

تمرين4: أذكر طبيعة التحويل S المعرف بكتابته المركبة في كل حالة من الحالات الآتية:
1) $z'=iz+1-i$ 2) $z'=3z-5i$.
3) $z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-1$ 4) $z'=\ 1+i\ \ z+i$.
5) $z'=z-1+5i$ 6) $z'=\ 1-i\ \ z+i-3$.

الحل: 1) $|i|=1$ إذن S دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$.
2) $a=3$ عدد حقيقي إذن S تحاكي نسبته 3 .
3) $\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1$ إذن S دوران زاويته $-\frac{\pi}{3}$.
4) $|a|=|1+i|=\sqrt{2}$ إذن S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$.
5) $a=1$ إذن S انسحاب شعاعه $\vec{u}\ -1;5$.
4) $|a|=|1-i|=\sqrt{2}$ إذن S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$.

3. تركيب تشابهين مباشرين .

خاصية: تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين و زاويته مجموع الزاويتين

البرهان: S تشابه مباشر عبارته المركبة $z'=az+b$ حيث a و b عددان مركبان و $a\neq 0$.

L تشابه مباشر عبارته المركبة $z'=a'z+b'$ حيث a' و b' عددان مركبان و $a'\neq 0$.
M' و N' صورتا M و N على الترتيب بالتحويل S .
M_1 و N_1 صورتا M' و N' على الترتيب بالتحويل L .
إذن M_1 و N_1 صورتا M و N على الترتيب بالتحويل $L\circ S$.

- $M'N'=|a|\times MN$ و $M_1N_1=|a'|\times M'N'$. وبالتالي $M_1N_1=|a'|\times|a|\times MN$
- $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}\ =\arg\ a$ و $\overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{M_1N_1}\ =\arg\ a'$.

و بالتالي $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}\ +\ \overrightarrow{M'N'},\overrightarrow{M_1N_1}\ =\arg\ a\ +\arg\ a'$ أي $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M_1N_1}\ =\arg\ a\ +\arg\ a'$.

إذن $L\circ S$ تشابه مباشر نسبته $|a'|\times|a|$ وزاويته $\arg\ a\ +\arg\ a'$. و $L\circ S=S\circ L$

4.التحليل القانوني لتشابه مباشر.

خاصية: S تشابه مباشر نسبته k $k\in\mathbb{R}_+^*$ و زاويته θ $\theta\in\mathbb{R}$.

- إذا كان $k=1$ و $\theta=0$ التشابه S انسحاب .
- في الحالات الأخرى S يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω لاحقتها ω و $S=h\circ r=r\circ h$ ، حيث h هو التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k و r هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ .

البرهان: S تشابه مباشر كتابته المركبة $z'=az+b$ أي $z'=ke^{i\theta}z+b$ حيث a و b عددان مركبان و $a\neq 0$.

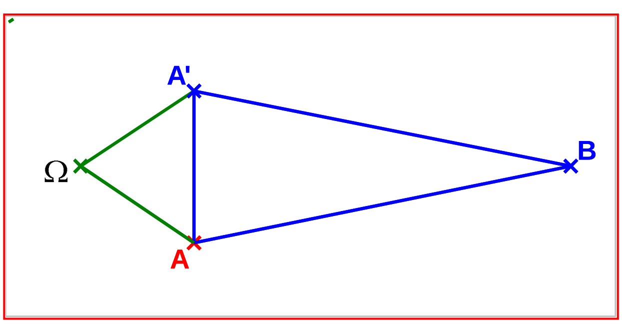
- $k=1$ و $\theta=0$ معناه $a=1$ و الكتابة المركبة تصبح $z'=z+b$ إذن S انسحاب شعاعه $\vec{U}$ حيث $\vec{U}$ صورة العدد المركب b (إذا كان زيادة على هذا $b=0$ فإن S التحويل المطابق).
- $k\neq 1$ $a\neq 1$. لتكن M نقطة صامدة بالتشابه S .

$S\ M\ =M$ يعني $z=az+b$ ومنه $z=\dfrac{b}{1-a}$ إذن S يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω لاحقتها $\omega=\dfrac{b}{1-a}$.

h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k كتابته المركبة $z'=kz+b$. وبالتالي $z'-\omega=k\ \ z-\omega$.
r الدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ كتابته المركبة $z'=e^{i\theta}z+b$. وبالتالي $z'-\omega=e^{i\theta}\ \ z-\omega$.
M' صورة M بالتحاكي h و M_1 صورة M' بالدوران r. إذن M_1 صورة M بالدوران $h\circ r$.
أي $z_{M'}-\omega=k\ \ z_M-\omega$ و $z_{M_1}-\omega=e^{i\theta}\ \ z_{M'}-\omega$
و بالتالي $z_{M_1}-\omega=e^{i\theta}\ \ k\ \ z_M-\omega\ +\omega-\omega$ أي $z_{M_1}-\omega=ke^{i\theta}\ \ z_M-\omega$.
و منه M_1 صورة M بالتحويل S وبالتالي $h\circ r=S$. بنفس الطريقة نثبت أن $r\circ h=S$.
S تشابه مباشر مركزه Ω نسبته k و زاويته θ .

تمرين 5: لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوي .
ليكن الدوران r_1 الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ و ليكن الدوران r_2 الذي مركزه B و زاويته $-\dfrac{\pi}{6}$.

نضع $f=r_2\circ r_1$.
1) أثبت أن f دوران يطلب تعيين زاويته.
2) أ نشئ النقطة A' صورة A بالتحويل f و Ω مركز الدوران f .



الحل:1) f تركيب تشابهين مباشرين (الدوران

تشابه مباشر نسبته1) إذن فهو تشابه مباشر نسبته 1(جداء النسبتين) و زاويته $\frac{\pi}{3}$ (مجموع الزاويتين $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$).

بما أن الزاوية غير معدومة f ليس انسحاب و بالتالي f له مركز ليكن Ω هذا المركز .

ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 1 (التطبيق المطابق) و r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

$f=r\circ h=r$ إذن f دوران مركزه Ω زاويته $\frac{\pi}{3}$.

2) $f(A)=r_2\circ r_1(A)=A'$ بما أن $r_1(A)=A$ (A مركز الدوران r_1) فإن $A'=r_2(A)$

إذن لدينا $BA'=BA$ و $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA'})=-\frac{\pi}{6}$. و منه إنشاء النقطة A' .

$f(A)=A'$ و منه لدينا $\Omega A'=\Omega A$ و $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A'})=\frac{\pi}{3}$. إذن المثلث $AA'\Omega$ مثلث مباشر متقايس الأضلاع و منه إنشاء Ω .

تمرين6: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

S_1 التشابه المباشر الذي كتابته المركبة $z'=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\right)z+3i$

S_2 التشابه المباشر الذي كتابته المركبة $z'=(\sqrt{3}+i)z+3-3\sqrt{3}i$.

عين طبيعة التحويل $S_1\circ S_2$.

الحل: $S_1\circ S_2(M)=S_1(S_2(M))=S_1(M_1)=M'$.

$S_1(M_1)=M'$ يعني $z_{M'}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\right)z_{M_1}+3i$.

$S_2(M)=M_1$ يعني $z_{M_1}=(\sqrt{3}+i)z_M+3-3\sqrt{3}i$.

$z_{M'}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\right)\left((\sqrt{3}+i)z_M+3-3\sqrt{3}i\right)+3i$ و منه $z_{M'}=z_M$.

و بالتالي $S_1\circ S_2$ هو التطبيق المطابق .

5. تعيين تشابه مباشر .

خاصية: إذا كان S تشابها مباشرا مركزه Ω نسبته k $\left(k\in\mathbb{R}_+^*-\{1\}\right)$ و زاويته θ فإن :

- $S(\Omega)=\Omega$.
- من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن Ω

$S(M)=M'$ تعني $\begin{cases}\Omega M'=k\,\Omega M\\ (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\theta\end{cases}$

البرهان: ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k و r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ .

نعلم أن $S=h\circ r=r\circ h$

- $S(\Omega)=h\circ r(\Omega)=h[r(\Omega)]=h(\Omega)=\Omega$.

• لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن Ω و M_1 صورتها بالدوران r و M' صورة M_1 بالتحاكي h .

$$S(M) = h \circ r(M) = h[r(M)] = h(M_1) = M'$$

$h(M_1) = M'$ يعني $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M_1}$ و منه $\Omega M' = |k|\Omega M_1$ وبما أن $k > 0$ فإن $\Omega M' = k\Omega M_1$.

$r(M) = M_1$ يعني $\Omega M_1 = \Omega M$ و $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1}) = \theta$

من $\Omega M' = k\Omega M_1$ و $\Omega M_1 = \Omega M$ نستنتج $\Omega M' = k\Omega M$

بما أن $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M_1}$ و $k > 0$ نستنتج أن $\overrightarrow{\Omega M'}$ و $\overrightarrow{\Omega M_1}$ متوازيان و لهما نفس الاتجاه ، و منه $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1}) = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$.

6.التشابه المباشر و نقط المستوي.

خاصية: إذا كانت A ، B ، A' و B' أربع نقط حيث $A \neq B$ و $A' \neq B'$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A إلى A' و يحول B إلى B' .

البرهان: ليكن S تشابها مباشرا كتابته المركبة $z' = az + b$ مع $a \neq 0$. z_A ، z_B ، $z_{A'}$ و $z_{B'}$ لواحق A ، B ، A' و B' على الترتيب حيث $A \neq B$ و $A' \neq B'$.

$\begin{cases} S(A) = A' \\ S(B) = B' \end{cases}$ معناه $\begin{cases} z_{A'} = a z_A + b \\ z_{B'} = a z_B + b \end{cases}$ و التالي $a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ و $b = z_{A'} - \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} z_A$.

بما أن $A' \neq B'$ فإن $a \neq 0$ و التشابه S وحيد .

نتائج: • S هو التشابه المباشر الذي يحول A إلى A' و يحول B إلى B' .

• إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ فإن S هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AA'}$ لأن $a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} = 1$

• إذا كان $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ فإن S هو تشابه مباشر نسبته $\dfrac{A'B'}{AB}$ و زاويته $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$. مركزه النقطة الصامدة.

تمرين 7: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن النقط A ، B ، C و D التي لواحقها $z_A = 1$ ، $z_B = -3 - 5i$ ، $z_C = -4 + 5i$ و $z_D = -3$ على الترتيب .

عين التشابه المباشر الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D . ثم عين عناصره المميزة .

الحل: ليكن S التشابه المباشر المطلوب .

الكتابة المركبة للتحويل S هي $z' = az + b$ حيث a عدد مركب غير معدوم و b عدد مركب .

لدينا $z_B = a z_A + b$ و $z_D = a z_C + b$.

أي $\begin{cases} -3 - 5i = a + b \\ -3 = (-4 + 5i)a + b \end{cases}$ بالطرح طرفا من طرف $a(-5 + 5i) = 5i$

ومنه $a = \dfrac{5i}{-5 + 5i} = \dfrac{i}{-1 + i} = \dfrac{i(-1 - i)}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

من المعادلة $-3 - 5i = a + b$ نستخرج b ، $b = -3 - 5i - a$.

وبالتالي $b = -3 - 5i - (\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i) = -\dfrac{7}{2} - \dfrac{9}{2}i$.

. $z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)z-\frac{7}{2}-\frac{9}{2}i$ يعني $S\ M\ =M'$

لتكن النقطة Ω لاحقتها ω مركز S أي $\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-\frac{7}{2}-\frac{9}{2}i}{1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)}=\frac{-7-9i}{1+i}=\frac{-7-9i\quad 1-i}{2}$

وبالتالي $\omega=-8-i$ أي $\Omega\ -8,-1$. نسبة S هي $|a|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\arg\ a\ =-\frac{\pi}{4}$.

تمرين 8: المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\vec{u},\vec{v}$.

لتكن النقط A ، B ، C التي لواحقها $z_A=i$ ، $z_B=-2+3i$ ، $z_C=-4+5i$ على الترتيب .

عين التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول C إلى B .

الحل: ليكن S التشابه المباشر المطلوب .

الكتابة المركبة للتحويل S هي $z'=az+b$ حيث a عدد مركب غير معدوم و b عدد مركب .

لدينا $z_A=a\,z_A+b$ و $z_B=a\,z_C+b$.

أي $\begin{cases} i=ai+b \\ -2+3i=\ -4+5i\ \ a+b \end{cases}$ بالطرح طرفا من طرف $2-2i=\ 4-4i\ \ a$

و منه $a=\frac{2-2i}{4-4i}=\frac{1}{2}$.

من المعادلة $i=ai+b$ نستخرج b ، $b=i-ai$. وبالتالي $b=i-\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}i$.

$S\ M\ =M'$ يعني $z'=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}i$. و منه S تحاك .

ب - ضع $K\left(x\,;y\right)$ وحل في $\mathbb{R}^2$ الجملة $\begin{cases}\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{CK}=0\\ \overrightarrow{EK}.\overrightarrow{GK}=0\end{cases}$ حيث $\left(x\,;y\right)$ هي المجهول.

3. أ - ضع $z'=\alpha z+\beta$ ولتعيّين α و β حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة $\begin{cases}S'(A)=C\\ S'(E)=G\end{cases}$.

ب - لإيجاد العناصر المميّزة ، أكتب α على الشكل المثلّثي و $\frac{\beta}{1-\alpha}$ على الشكل الجبري.

التاريخ: 2015/02/22 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 03 ساعات

المجال التعليـمـــي: التحليل.

الـوحدة التعليميـة (04): المتتاليات العددية.

مــوضـوع الدرس: عموميات على المتتاليات العددية.

الوسـائل التعليميـة: السبورة ، الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة

الـمـراجـــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة

- التعرف على المتتالية العددية
- طرق توليد متتالية عددية.
- اتجاه تغير متتالية
- التمثيل البياني لمتتالية تراجعية

1. المتتالية العددية

أ) **تعريف:** متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$

ترميز: نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$. هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل .

ب) **مثال:** من اجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n = \sqrt{\dfrac{4n+3}{n+1}}$ ، من اجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n = 2^n$

2. طرق توليد متتالية عددية (يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها)

ا) توليد متتالية عددية بالحد العام:

- إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما . و لحساب حد u_{n_0} من الحدود يكفي تعويض n بالقيمة n_0 .

مثال: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n = -n^2+3$ معرفة بحدها العام. ويمكن حساب أي حد من الحدود .

ملاحظة: يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال دالة f و نكتب $u_n = f(n)$ حيث $f: x \mapsto -x^2+3$.

ب) توليد متتالية عددية بعلاقة تراجعية:

- لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x \in D$ فإن $f(x) \in D$. المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_{n_0} و العلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية. تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n \geq n_0$ الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية u.
- لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x \in D$ فإن $f(x) \in D$. المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_{n_0} و العلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية. تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n \geq n_0$ الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n).
- **مثال:** نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 3u_n$.
- لدينا $u_0 = 1$ و منه $u_1 = 3u_0 = 3$ ، $u_2 = 3u_1 = 9$ ، $u_3 = 3u_2 = 27$ و هكذا ...

تمرين 1

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=2$ من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=\dfrac{3}{2+u_n}$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، و u_3 .

2) أحسب u_{10} ، u_{11} و u_{12} .ثم ضع تخمينا

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . و من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $f(x)=\dfrac{3}{2+x}$. هذه الدالة معرفة على $[0,+\infty[$ وبما أن $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$

الحل:

1) $u_1=\dfrac{3}{2+u_0}=\dfrac{3}{4}$ ، $u_2=\dfrac{3}{2+u_1}=\dfrac{3}{2+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{12}{11}$ ، $u_3=\dfrac{3}{2+u_2}=\dfrac{3}{2+\dfrac{12}{11}}=\dfrac{33}{34}$.

2) الحاسبات تبين أن $u_{10}\approx 1$ ، $u_{11}\approx 1$ و $u_{12}\approx 1$.

نلاحظ أن (u_n) تستقر على القيمة 1 انطلاقا من $n=10$.

3. اتجاه تغير متتالية عددية

ا) تعاريف

- **متتالية متزايدة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}-u_n\geq 0$ ($u_{n+1}-u_n>0$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.
- **متتالية متناقصة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}-u_n\leq 0$ ($u_{n+1}<u_n$ على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.
- **متتالية ثابتة:** تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إبتداءا من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان $u_{n+1}-u_n=0$. من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.
- **متتالية رتيبة:** المتتالية الرتيبة على مجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) هي متتالية متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ أو متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) . .

ب) ملاحظة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) يمكن أن:

1) ندرس إشارة $u_{n+1}-u_n$

2) نقارن بين $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1 .

3) إذا وجدت دالة f حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f .

تمرين 2 : لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_0=2$ من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n-2n+8$.

- أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، و u_3.
- ادرس اتجاه تغير متتالية (u_n).

تمرين 3: لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = e^{2n}$

- أحسب v_0 ، v_1 ، v_2 ، v_3 .
- ادرس اتجاه تغير متتالية (v_n) .

4. التمثيل البياني لمتتالية عددية.

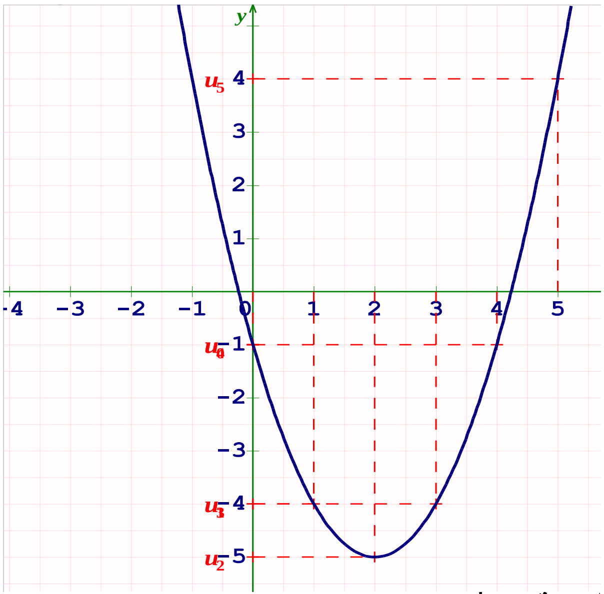
أ) متتالية معرفة بالحد العام:

- **يمكن تمثيل حدود متتالية عددية معرفة بحدها العام على محور**

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = (2)^n$.

$u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ ، $u_2 = 4$ ،............

- **يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحدها العام (ترفق هذه المتتالية بدالة f).**



مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي

$u_n = n^2 - 4n - 1$

(u_n) معرفة كذالك $u_n = f(n)$ حيث: $f : x \mapsto x^2 - 4x - 1$

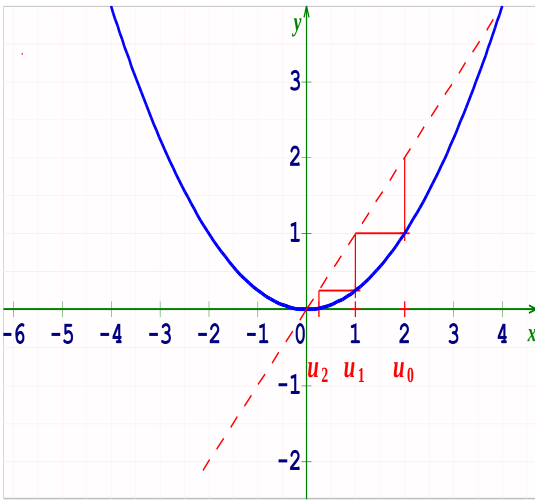
نعرف f على المجال $[0, +\infty[$ بما أن n عدد طبيعي.

في الرسم المقابل النقط الممثلة إحداثياها $(n, f(n))$

ب) متتالية معرفة بعلاقة تراجعية:

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$.

- مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O, I, J) .



حـل: (C_f) هو الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n). أي $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

نعرف الدالة f على المجال $]0, +\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

النقطة $M_0(u_0, u_1)$ أي $M_0(2, 1)$ هي أول نقطة نحصل عليها.

نسقط M_0 على (Δ) وفق (Ox) ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C_f)

وفق (Oy) وبهذا نحصل على النقطة $M_1(u_1, u_2)$ أي $M_1\left(1, \frac{1}{4}\right)$. نكرر

العملية للحصول على M_2 ثم M_3 إلى آخره.

تمرين 1:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n^2 + 1$.

1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_{20} و u_{134} .

2) أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2}

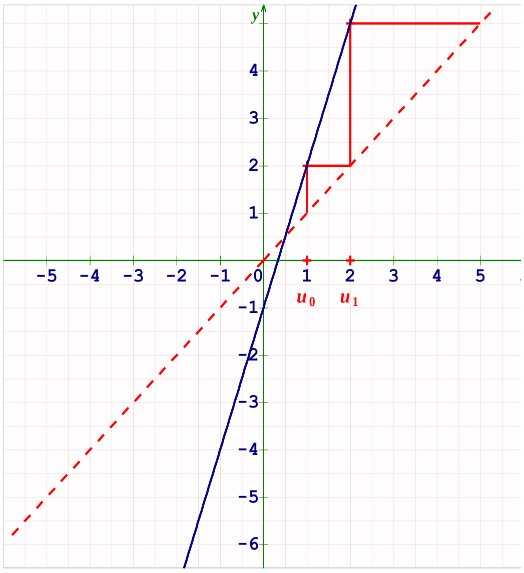
حـل: 1) $u_0 = -3(0)^2 + 1 = 1$ ، $u_1 = -3(1)^2 + 1 = -2$ ، $u_2 = -3(2)^2 + 1 = -11$ ، $u_3 = -3(3)^2 + 1 = -26$

$u_{20} = -3(20)^2 + 1 = -1199$ ، $u_{134} = -3(134)^2 + 1 = -53867$.

2) $u_{n+1} = -3(n+1)^2 + 1 = -3n^2 - 6n - 2$ ، $u_{2n} = -3(2n)^2 + 1 = -12n^2 + 1$

$u_{3n+2} = -3(3n+2)^2 + 1 = -27n^2 - 36n - 11$

تمرين2:



لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و

العلاقة التراجعية $u_{n+1} = 3u_n - 1$ حيث n عدد طبيعي .

- مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O, I, J) .

حـل: (C_f) هو الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n). أي $f(x) = 3x - 1$

نعرف الدالة f على المجال $]0, +\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

النقطة $M_0(u_0, u_1)$ أي $M_0(1, 4)$ هي أول نقطة نحصل عليها. نسقط M_0 على (Δ) وفق (Ox) ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C_f) وفق (Oy) وبهذا نحصل على النقطة $M_1(u_1, u_2)$ أي $M_1(4,13)$. نكرر العملية للحصول على M_2 ثم M_3 إلى آخره.

التاريخ: 2015/02/25 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 02 ساعات

المجال التعليـمـــي: التحليل.

الـوحدة التعليميـة (04): المتتاليات العددية.

مــوضـوع الدرس: المتتاليات الحسابية والهندسية

الوسـائل التعليـميـة: السبورة ، الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة

الـمـراجـــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة

- التعرف على المتتالية الحسابية وخواصها
- التعرف على المتتالية الهندسية وخواصها

1. المتتالية الحسابية :

أ – تعريف :

نقول عن متتالية (u_n) أنها متتالية حسابية حدها الأول u_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي ثابت r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n + r$ ؛ r : يسمى أساس المتتالية الحسابية .

ملاحظات :

- إذا كان $r = 0$ تكون المتتالية الحسابية ثابتة و كل حدودها تساوى الحد الأول u_0.
- إذا كان $r > 0$ تكون المتتالية الحسابية متزايدة تماما .
- إذا كان $r < 0$ تكون المتتالية الحسابية متناقصة تماما .

تمرين1 :

ادرس طبيعة المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $u_n = 10n + 7$

الحل :

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = [10(n+1) + 7] - [10n + 7] = 10$$

إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 10$ و حدها الأول $u_0 = 10 \times 0 + 7$ أي : $u_0 = 7$

ب – الحد العام لمتتالية حسابية :

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r الحد العام للمتتالية الحسابية (u_n) هو : $u_n = u_0 + nr$ من أجل كل عدد طبيعي n.

ج – مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r ، ليكن المجموع : $s = u_0 + u_1 + ... + u_n$

من أجل كل عدد طبيعي $s=\frac{n+1}{2}\left(u_0+u_n\right)$

إذن s يساوي نصف عدد الحدود مضروب في مجموع الحد الأول و الحد الأخير .

تمرين 2 :

$\left(u_n\right)$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0=3$ و أساسها $r=5$

- احسب المجاميع التالية :

1) $s_1=u_0+u_1+...+u_n$ 2) $s_2=u_0+u_1+...+u_{10}$ 3) $s_3=u_3+u_4+...+u_n$

الحل :

1) لدينا : $s_1=\frac{n+1}{2}\left(u_0+u_n\right)$

حيث : $u_n=u_0+nr$ و عليه : $u_n=3+5n$

و عليه : $s_1=\frac{n+1}{2}\left(3+3+5n\right)=\frac{n+1}{2}\left(6+5n\right)$

2) لدينا : $s_2=\frac{11}{2}\left(56\right)=308$.

3) لدينا : $s_3=\frac{n-2}{2}\left(u_3+u_n\right)=\frac{n-2}{2}\left(21+5n\right)$.

د) الوسط الحسابي :

$\left(u_n\right)$متتالية عددية .تكون المتتالية $\left(u_n\right)$ حسابية إذا و فقط إذا كان : $u_{n+1}=\frac{u_n+u_{n+2}}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي n . u_{n+1} يسمى الوسط الحسابي للحدين u_n و u_{n+2} .

تمرين 3: لتكن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=u_n-5n-1$.

لتكن المتتالية $\left(v_n\right)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_{n+1}-u_n$.

- أثبت أن المتتالية $\left(v_n\right)$متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- أحسب v_n بدلالة n ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية $\left(v_n\right)$.استنتج $\left(u_n\right)$ بدلالة n .

الحل: • الحد الأول للمتتالية $\left(v_n\right)$ هو v_0 ، $v_0=u_1-u_0=3-5(0)-1-3=-1$.

لدينا $u_{n+1}-u_n=-5n-1$.إذن : $v_n=-5n-1$

$v_{n+1}-v_n=-5(n+1)-1-(-5n-1)=-5$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-v_n=-5$.

و منه المتتالية $\left(v_n\right)$متتالية حسابية أساسها $r=-5$ و حدها الأول $v_0=-1$.

• من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-1-5n$. $S=v_0+v_1+...+v_{n-1}=\frac{n}{2}\ 5+5-5n\ =\frac{n}{2}\ -2-5n$.

$v_0=u_1-u_0$ ، $v_1=u_2-u_1$ ، ... ، $v_{n-1}=u_n-u_{n-1}$ بالجمع طرف بطرف نجد $u_n=S+u_0$

و منه $u_n=\frac{n}{2}\ -2-5n\ +3$.

2. المتتالية الهندسية :

أ – تعريف متتالية هندسية :

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n\times q$ حيث q : يسمى أساس المتتالية (u_n) .

ملاحظة : - إذا كان $q=1$ فإن المتتالية ثابتة جميع حدودها تساوي u_0

تمرين 2 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=e^{2n}$

أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب إعطاء حدها الأول u_0

الحل :

$$u_{n+1}=e^{2(n+1)}=e^{n+1}.e^2$$

و عليه : $u_{n+1}=u_n.e^2$ و منه : (u_n) متتالية هندسية .

أساسها $q=e^2$ و حدها الأول $u_0=e^{2\times 0}=1$

ب – الحد العام لمتتالية هندسية :

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية (u_n) يعطى بالعبارة : $u_n=u_0.q^n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ملاحظات :

- إذا كان u_1 هو الحد الأول للمتتالية الهندسية فإن $u_n=u_1\times q^{n-1}$
- بصفة عامة إذا كان u_p (p عدد طبيعي أصغر من n) الحد الأول فإن الحد العام : $u_n=u_p\times q^{n-p}$.
- تعيين الحد العام يؤول إلى كتابة u_n بدلالة n .
- اتجاه تغير المتتالية الهندسية يعتمد على إشارة أساسها وحدها الأول

ج – مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية :

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q . ليكن المجموع : $s=u_0+u_1+...+u_n$

- إذا كان $q=1$: $s=(n+1)u_0$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .
- إذا كان : $q\neq 1$: $s=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=u_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .

s هو جداء الحد الأول في النسبة $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ، حيث $n+1$ تمثل عدد الحدود في المجموع .

تمرين 2:

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=20$ و أساسها $q=2$

1- احسب حدها العام .

2- احسب المجاميع الآتية :

$s_1=u_0+u_1+...+u_n$ ؛ $s_2=u_0+u_1+...+u_{10}$ ، $s_3=u_{10}+u_{11}+...+u_{20}$

الحل :

1) الحد العام : $u_n=u_0\times q^n$ ومنه: $u_n=20\times 2^n$

2) حساب المجاميع :

* لدينا : $s_1=u_0+u_1+...+u_n$

ومنه : $s_1=u_0.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=20\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2}$

إذن : $s_1=20\left(2^{n+1}-1\right)$

* لدينا : $s_2=u_0+u_1+...+u_{10}$

عدد الحدود هو :11

ومنه : $s_2=u_0.\frac{1-q^{11}}{1-q}=20\times\frac{1-2^{11}}{1-2}=20\left(2^{11}-1\right)$

* لدينا : $s_3=u_{10}+u_{11}+...+u_{20}$

عدد الحدود هو : $20-10+1=11$

و منه : $s_3=u_{10}.\frac{1-q^{11}}{1-q}$ حيث : $u_{10}=20\times 2^{10}$

و عليه : $s_3=20\times 2^{10}\times\frac{1-2^{11}}{1-2}=20\times 2^{10}\left(2^{11}-1\right)$

د ــ الوسط الهندسي :

تكون المتتالية (u_n) هندسية إذا و فقط إذا كان : $u_n.u_{n+2}=\left(u_{n+1}\right)^2$ من أجل كل عدد طبيعي n .

u_{n+1} يسمى الوسط الهندسي للحدين u_n و u_{n+2} .

تمرين 3: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n-3$.

- أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- أحسب v_n بدلالة n ، استنتج u_n بدلالة n، ثم أحسب المجموع S مجموع n حد الأولى من المتتالية (v_n).
- ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n)؟
- أحسب نهاية v_n بدلالة n ثم أحسب نهاية S. استنتج نهاية (u_n).

الحل:

- $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3$

$v_{n+1}=\frac{1}{3}u_n-3=\frac{1}{3}v_n$ إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-1$.

- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $S=v_0+v_1+...+v_{n-1}=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

- $v_{n+1}-v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\frac{2}{3}$ إذن $v_{n+1}-v_n>0$ و منه (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

- $-1<\frac{1}{3}<1$ و منه $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ و بالتالي $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$. $\lim_{n\to+\infty}S=-\frac{3}{2}$. $\lim_{n\to+\infty}u_n=3$

التاريخ: 2015/03/08 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 01 ساعات

المجال التعليـمـي: التحليل.

الـوحدة التعليمية (04): المتتاليات العددية.

مـوضوع الدرس: الاستدلال بالتراجع

الوسـائل التعليـمية: السبورة ، الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة

الـمـراجـع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة

- إثبات خاصية باستعمال استدلال بالتراجع

تعريف الاستدلال بالتراجع

لتكن $p(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n. نقول عن الخاصية $p(n)$ أنها صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$: إذا تحقق ما يلي :

1) $p(n)$ صحيحة من أجل $n = n_0$.

2) نبرهن أن $p(n)$ وراثية أي نبرهن أنه إذا كانت $p(k)$ صحيحة فإن $p(k+1)$ صحيحة حيث k عدد طبيعي كيفي .

أو بعبارة أخرى :

1) نعوض n بأصغر قيمة تأخذها في $\mathbb{N}$ لنتأكد من صحة الخاصية.

2) نفرض صحة $p(k)$ ثم نبرهن صحة $p(k+1)$.

تمرين 1

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

الحل :

- من أجل $n = 0$ لدينا : $0 = 0$ و منه $p(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

الفرضية :

$$p(k):\ \ 1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

المطلوب : $p(k+1):\ 1+2+3+...+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

لدينا: $1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

و منه : $p(k+1)$ صحيحة .

إذن : $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

تمرين 2:

نعرّف متتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد n ، $u_n-2u_{n+1}=2n+3$.

- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{-n}-2n+1$.

تمرين 3:

نعرّف متتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد n ، $u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$

- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\prec u_n\leq 3$.

تمرين 4:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=3$, $u_{n+1}=\frac{u_n{}^2+7}{2u_n}$.

1. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2+7}{2x}$

أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$

ب) استنتج انه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ بحيث: $x\geq\sqrt{7}$ فان : $f(x)\geq\sqrt{7}$

2. برّر بالتراجع أن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$, $u_n\geq\sqrt{7}$
3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

التاريخ: 2015/03/09 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 05 ساعات

المجال التعليـمــي: التحليل.

الـوحدة التعليميـة (04): المتتاليات العددية.

مــوضـوع الدرس: تقارب متتالية عددية والمتتاليات العددية المحدودة

الوسـائل التعليميـة: السبورة ، الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة

الــمـراجـــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة

- دراسة سلوك التقاربي لمتتالية عددية
- التعرف على المتتاليات العددية المحدودة
- استعمال المتتاليات العددية المحدودة لدراسة سلوك التقاربي لمتتالية عددية
- المتتاليات العددية المتجاورة

1. نهاية متتالية عددية.

تذكير و تعريف: (u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي. نقول أن المتتالية (u_n) تقبل l كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداءً من رتبة معينة . و نكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$) في هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$ حيث α عدد حقيقي ، إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{-4n+1}{3n+2}$.

- عين نهاية المتتالية (u_n).

الحل: المتتالية (u_n) من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{-4x+1}{3x+2}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{4}{3}$ إذا $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{4}{3}$. إذن المتتالية (u_n) متقاربة .

ملاحظة: العكس غير صحيح :

مثال: لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x\cos(2\pi x)}{x+1}$ ، الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

نلاحظ فعلا بأن $u_n = f(n) = \dfrac{n}{n+1}$ حيث أن من أجل كل عدد طبيعي n : $\cos(2\pi n) = 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ (نطبق النظريات على النهايات) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ غير موجودة .

تعاريف: (u_n) متتالية عددية .

- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أنّ كل مفتوح $]\alpha,+\infty[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
- القول أنّ نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أنّ كل مجال مفتوح $]-\infty,\alpha[$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة . و نرمز: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.
- في هذه الحالتين نقول أن المتتالية (u_n) متباعدة.

تذكير: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_n=f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha,+\infty[$ و α عدد حقيقي .

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$. • إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

تمرين 1: u_n متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\dfrac{3n^2-5n+1}{n^2+5}$ ، عين نهاية هذه المتتالية .

الحل: لتكن f الدالة المرفقة بالمتتالية u_n و منه $f\ x\ =\dfrac{3x^2-5x+1}{x^2+5}$ و المعرفة على $\mathbb{R}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f\ x\ =3$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية u_n لها نفس النهاية مع الدالة المرفقة لها و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$.

تمرين 2: u_n متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=\sqrt{\dfrac{4n+3}{n+1}}$ ، عين نهاية هذه المتتالية .

الحل: المتتالية u_n من الشكل $u_n=f\ v_n$ حيث $v_n=\dfrac{4n+3}{n+1}$ و f الدالة العددية حيث $f\ x\ =\sqrt{x}$.

المعرفة على $0;+\infty$. الدالة المرفقة بالمتتالية v_n هي الدالة g حيث $g\ x\ =\dfrac{4x+3}{x+1}$ المعرفة على $0;+\infty$. و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g\ x\ =4$ (تطبيق النظريات على النهايات) فإن المتتالية v_n لها نفس النهاية مع الدالة المرفقة لها و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=4$. و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\sqrt{4}=2$.

تمرين 3: u_n متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=3$ و $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$.

- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_n\neq 1$.

لتكن v_n المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$.

- أثبت أن المتتالية v_n متتالية حسابية ثم استنتج نهاية u_n .

الحل: • نستعمل الاستدلال بالتراجع

المرحلة 1 : من أجل $n=0$ ، $u_0=3$ و الخاصية صحيحة.

المرحلة 2 :نفرض الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n كيفي موجب تماما. أي: $u_n\neq 1$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} \neq 1$ و نبرهن بالخلف . نفرض $u_{n+1} = 1$

أي $\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} = 1$ و نستنتج أن $u_n = 1$ و هذا تناقض مع فرضية التراجع .إذن من أجل كل عدد طبيعي n $u_n \neq 1$.

• $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1}$ و منه $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} - \frac{1}{u_n - 1}$ و بالتالي $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - 1}{3u_n - 3} = \frac{1}{3}$.

إذن v_n متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$. $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ لأن $r > 0$ و نستنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2. متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل ، متتالية محدودة.

تعريف: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$.

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n :

  $u_n \leq A$. نقول أن A عنصر حاد من الأعلى .

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n :

  $u_n \geq B$. نقول أن B عنصر حاد من الأسفل .

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل .

مثال1: لتكن المتتالية u_n المعرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = \frac{4n}{n+3}$

الجدول المقابل يعطي قيم المتتالية (u_n) من أجل قيم n من 1 إلى 14 و يعطي التمثيل البياني للمتتالية .

انطلاقا من هذا نخمن أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل و 1 هو عنصر حاد من الأسفل .

لنبرهن على صحة هذا التخمين.

لنقارن بين $4n$ و $n+3$. $4n - (n+3) = 3n - 3 = 3\ \ n-1$ وبما $n \geq 1$ فإن $4n - (n+3) \geq 0$.

و منه $4n \geq (n+3)$ و بالتالي $\frac{4n}{n+3} \geq 1$ إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n \geq 1$.

و المتتالية u_n محدودة من الأسفل .

مثال2: لتكن المتتالية u_n المعرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = \frac{2n+3}{n}$.

المتتالية u_n محدودة من الأعلى و 5 عنصر حاد من الأعلى .

المتتالية u_n محدودة من الأسفل و 2 عنصر حاد من الأسفل . و منه المتتالية u_n متتالية محدودة .

مبرهنة: تقبل بدون برهان .

- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

تمرين 4: u_n متتالية معرفة في $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \dfrac{n^2+n+9}{n}$ ، أثبت أن المتتالية u_n محدودة من الأسفل.

طريقة: لإثبات أن متتالية u_n معرفة على $\mathbb{N}$ محدودة من الأسفل بعدد حقيقي B (أو محدودة من الأعلى بعدد A)

يمكن إتباع إحدى الطرق الآتية .

- استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq B$ (أو لإثبات $u_n \leq A$) .
- المقارنة بين u_n و B (أو u_n و A) بدراسة إشارة $u_n - B$ (أو $u_n - A$) .
- إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة على المجال $]0;+\infty[$.

الحل: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ حيث:

$$f(x) = \frac{x^2+x+9}{x} \text{ .}$$

من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $f'(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2}$ ونحصل على التغيرات الآتية :

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖	↘	7	↗	

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن $f(x) \geq 7$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$u_n \geq 7$ ، و المتتالية u_n محدودة من الأسفل و 7 عدد حاد من الأسفل .

تمرين 5: u_n متتالية معرفة في $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+4}$، أثبت أن المتتالية u_n محدودة من الأعلى بالعدد 2.

الحل: نحسب الفرق $u_n - 2$.

$$u_n - 2 = \frac{2n^2+1}{n^2+4} - 2 \quad \text{و منه ،} \quad u_n - 2 = \frac{2n^2+1-2n^2-8}{n^2+4} \quad \text{أي} \quad u_n - 2 = \frac{-7}{n^2+4}$$

من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{-7}{n^2+4} \leq 0$ و بالتالي:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 2 \leq 0$.

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 2$.

إذن المتتالية u_n محدودة من الأعلى و 2 عنصر حاد من الأعلى .

3. متتاليتان متجاورتان.

تعريف: تكون متتاليتان عدديتان متجاورتين إذا كانت و فقط إذا إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة ، و الفرق بينهما يؤول إلى الصفر .

مثال: لتكن المتتالية u_n المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$.

لتكن المتتالية v_n المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

الجدول المقابل يعطي قيم المتتاليتين (u_n) و v_n من أجل قيم n من 1 إلى 10 و يعطي التمثيل البياني للمتتاليتين .انطلاقا من هذا نخمن أن المتتاليتين متجاورتان. لنبرهن على صحة هذا التخمين.

• $u_{n+1}-u_n = \left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)$

أي $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$ و منه (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$

• $v_{n+1}-v_n = u_{n+1}+\frac{1}{n+1}-\left(u_n+\frac{1}{n}\right)$ أي $v_{n+1}-v_n = u_{n+1}-u_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$ و منه:

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

أي $v_{n+1}-v_n = \frac{-1}{n(n+1)^2}$.

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ و منه (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$.

• $u_n - v_n = u_n - \left(u_n+\frac{1}{n}\right)$ و منه $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$.

إذن $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

بما أن (u_n) متزايدة ، (v_n) متناقصة و $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ فإن u_n و v_n متجاورتان .

مبرهنة: إذا كانت u_n و v_n متتاليتين عدديتين متجاورتين فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية .

تمرين 6: لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي : $u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4}$ ، نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول. أحسب w_n بدلالة n. ما هي نهاية (w_n)؟

2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n)؟

3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

4) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

الحل: 1) لدينا $w_{n+1} = u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$

$w_{n+1} = \dfrac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12} = \dfrac{u_n - v_n}{12}$ أي $w_{n+1} = \dfrac{1}{12} w_n$.

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{12}$ وحدها الأول $w_0 = 11$.

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 11\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$. بما أن $-1 < \dfrac{1}{12} < 1$ (w_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

2) $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = \dfrac{3(u_n + 2v_n)}{3} + \dfrac{8(u_n + 3v_n)}{4}$

أي $t_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 3u_n + 8v_n$ و منه $t_{n+1} = t_n$ و المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t_0 = 44$.

3) • $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \dfrac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3}$ و منه : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2(u_n - v_n)}{3} = -\dfrac{2}{3} w_n$

إذن: $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{22}{3}\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n < 0$ والمتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

• $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4}$ ومنه : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(u_n - v_n)}{4} = \dfrac{1}{4} w_n$

إذن: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{11}{4}\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1} - v_n > 0$ و المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ و أن $w_n = u_n - v_n$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

إذن (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة و الفرق بينهما يؤول إلى 0 . إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

4) المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية .

نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t_0 = 44$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} 3u_n + 8v_n = 44$

نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4$.

التاريخ: 2015/04/06 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 02 ساعات

المجال التعليـمــي: التحليل.
الـوحدة التعليمية (05): الدوال الاصلية والحساب التكاملي.
مـوضـوع الدرس: الدوال الاصلية.
الوسـائل التعليـمية: السبورة ، الكتاب المدرسي
الـمـراجــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة:

- تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة على مجال
- تعيين الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة معطاة للمتغير.

1. نشاط

نعتبر الدالتين f و F المعرفتين على $]-3;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{-x^2-6x}{(x+3)^2} \quad \text{و} \quad F(x)=\frac{2x-3}{x+3}-x$$

1. تحقق أنه من أجل كل x من $]-3;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$

2. اقترح دالة أخرى G بحيث من أجل كل x من $]-3;+\infty[$، $G'(x)=f(x)$

نقول أن F و G دالتان أصليتان للدالة f على $]-3;+\infty[$.

تعريف: f و F دالتان معرفتان على مجال I و f قابلة للاشتقاق على I.
إذا كان من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$ نقول أن:

- f هي الدالة المشتقة للدالة F.
- F دالة أصلية للدالة f على I.

2. الدالة الأصلية لدالة على مجال

تعريف: f دالة معرفة على مجال I.
نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f.
من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$

مثال: * الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=x^2-3x+1$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x-3$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $F'(x)=2x-3=f(x)$.
*الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=x^2-3x-\sqrt{2}$ هي كذلك دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f
لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $G'(x)=2x-3=f(x)$.

3. مجموعة الدوال الأصلية لدالة

خواص (دون برهان):
*إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I.
*إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال: $x\mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

نتيجة: دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=3x^2+4x-2$. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=x^3+2x^2-2x+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

4. الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I. x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي.

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$.

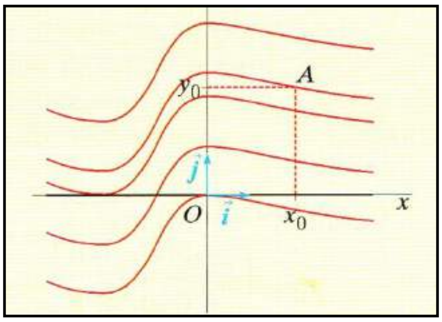
البرهان: بما أن الدالة f مستمرة على I فهي تقبل دوالا أصلية على I و لتكن G إحدى هذه الدوال الأصلية.

إذا كانت F دالة أصلية أخرى للدالة f على I فإن من أجل كل x من I، $F(x)=G(x)+k$ حيث k عدد حقيقي.

الشرط $F(x_0)=y_0$ يعني أن $G(x_0)+k=y_0$ أي أن $k=y_0-G(x_0)$. لقد تم هكذا تحديد العدد الحقيقي k.

توجد إذن دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$ و لدينا:

$$F(x)=G(x)+y_0-G(x_0)$$



التفسير البياني:

التمثيلات البيانية في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ للدوال الأصلية للدالة f

تستنتج من أحدها بواسطة انسحابات شعاعها $k\vec{j}$ حيث k عدد حقيقي.

واحد فقط من بين هذه التمثيلات البيانية يمر من النقطة $A(x_0;y_0)$.

5. تمارين

تمرين 1: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2} \quad \text{و} \quad F(x)=\frac{x-1}{x+1}-2x$$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

طريقة: لإثبات أن F دالة أصلية لـِ f على مجال I يكفي أن نثبت أن F قابلة للاشتقاق على I و أن من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$.

الحل: F دالة ناطقة معرفة على $]-1;+\infty[$ فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا:

$$F'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}-2=\frac{2}{(x+1)^2}-2$$

و منه:

$$F'(x)=\frac{2-2(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{2\left[1-(x+1)^2\right]}{(x+1)^2}=\frac{2\left[(1-x-1)(1+x+1)\right]}{(x+1)^2}=\frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

و بالتالي:

$$F'(x)=\frac{-2x^2-4x}{(x+1)^2}=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}=f(x)$$

و هكذا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$. إذن F دالة أصلية لـِ f على المجال $]-1;+\infty[$.

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=2x+\cos x$

1. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(\pi)=-1$.

الحل:

1. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x\mapsto x^2+\sin x+k$ حيث k عدد حقيقي.
2. لدينا من جهة $F(x)=x^2+\sin x+k$ و لدينا من جهة ثانية $F(\pi)=-1$.

$F(\pi)=-1$ يعني $\pi^2-0+k=-1$ و منه $k=-1-\pi^2$. نجد هكذا أن $F(x)=x^2+\sin x-1-\pi^2$

تمرين 3: نعتبر الدالتين F و G المعرفتين على $]2;+\infty[$ كما يلي:

$$F(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-2} \quad \text{و} \quad G(x)=\frac{2x-1}{x-2}+x$$

باستعمال طريقتين مختلفتين بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الحل: الطريقة الأولى: نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F'(x)=G'(x)$

من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ و $G'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

إذن من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F'(x)=G'(x)$. الدالتان هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الطريقة الثانية: نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F(x)-G(x)=k$ حيث k عدد حقيقي.

من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ، $F(x)-G(x)=\left(\frac{x^2-2x+3}{x-2}\right)-\left(\frac{2x-1}{x-2}+x\right)=\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$

التاريخ:2015/04/08 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 03 ساعات

المجال التعليـمـي: التحليل.

الـوحدة التعليمية (05): الدوال الاصلية و الحساب التكاملي.

مـوضـوع الدرس: حساب الدوال الأصلية.

الوسـائل التعليمية: السبورة ، الكتاب المدرسي

الـمـراجـــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة:

- تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة على مجال

تعيين الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة معطاة للمتغير.

1. الدوال الأصلية لدوال مألوفة

تم الحصول على النتائج الملخصة في الجدول الموالي انطلاقا من قراءة عكسية لمشتقات دوال مألوفة.

الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F. يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

$f(x)=$	$F(x)=$	$I=$
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+c$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k\in\mathbb{Z})$

2. خواص

*إذا كانت F وG دالتين أصليتين على الترتيب لـِ f و g على مجال I فإن $F+G$ دالة أصلية لـِ $f+g$ على I.

*إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I $(k\in\mathbb{R})$.

3. الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
$u'u^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$

$\dfrac{u'}{u^n}$ $(n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)>0$

4. تمارين

تمرين 1: عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

* $f(x)=x^3-3x+5$ و $I=\mathbb{R}$ * $g(x)=\dfrac{2}{x^2}$ و $I=]-\infty;0[$ * $h(x)=\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ و $I=]0;+\infty[$

الحل: * دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بِـ :

$$F(x)=\frac{1}{3+1}x^{3+1}-3\times\frac{1}{2}x^2+5x=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+5x$$

* دالة أصلية G للدالة g على $I=]-\infty;0[$ معرفة بِـ :

$$G(x)=2\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x}$$

* دالة أصلية H للدالة h على $I=]0;+\infty[$ معرفة بِـ :

$$H(x)=3\left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}}\right)-2\sqrt{x}=-\frac{3}{2x^2}-2\sqrt{x}$$

تمرين 2: عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

* $f(x)=(x+1)(x^2+2x+5)^2$ و $I=\mathbb{R}$ * $g(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $I=\mathbb{R}$

طريقة: لتعيين دالة أصلية على مجال I لدالة f يمكننا:

1. ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال $u'u^n$ أو $\dfrac{u'}{u^n}$ أو $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ مع تحديد عبارة $u(x)$.
2. حساب $u'(x)$ ثم تحديد عددا حقيقيا k بحيث $f=k\times u'u^n$ أو $f=k\times\dfrac{u'}{u^n}$ أو $f=k\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
3. تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

الحل:

- يظهر و أن الدالة f من الشكل $u'u^n$ مع $u(x)=x^2+2x+5$.

لدينا $u'(x)=2x+2$ أي أن $u'(x)=2(x+1)$ و منه $x+1=\dfrac{1}{2}u'(x)$

نجد هكذا أن: $f(x)=\dfrac{1}{2}u'(x)\times[u(x)]^2$ أي أن $f=\dfrac{1}{2}\times u'u^2$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}[u(x)]^3$ أي $F(x)=\dfrac{1}{6}(x^2+2x+5)^3$.

- يظهر و أن الدالة g من الشكل $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ مع $u(x)=x^2+1$.

لدينا $u'(x)=2x$ أي أن و منه $3x=\dfrac{3}{2}u'(x)$ نجد هكذا أن: $g(x)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ أي أن $g=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $G(x)=\dfrac{3}{2}\times 2\sqrt{u(x)}=3\sqrt{u(x)}$ أي $G(x)=3\sqrt{x^2+1}$.

5. الدوال الأصلية للدوال $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن:

- الدالة $f:x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.
- الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I.

تطبيق 1: عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1. $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ ، $I=]0;+\infty[$.   3. $f(x)=\left(-x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2-x-3}$ ، $I=\mathbb{R}$.

2. $f(x)=e^{ax+b}$ ، $I=\mathbb{R}$.   4. $f(x)=\cos(2x)e^{\sin(2x)}$ ، $I=\mathbb{R}$.

تطبيق2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=4xe^{2x}$

عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة F المعرفة بِـ $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية الدالة f على $\mathbb{R}$.

6. الدوال الأصلية للدوال $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن:

- الدالة $f:x\mapsto\ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.
- الدالة $x\mapsto\ln[u(x)]$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ على I.

تطبيق1: عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1. $f(x)=\frac{1}{x+2}$ ، $I=]-2;+\infty[$.   3. $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ ، $I=]0;\pi[$.

2. $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ ، $I=]1;+\infty[$.   4. $f(x)=\frac{-2e^x}{e^x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$.

تطبيق2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$ بِـ $f(x)=\frac{2x+3}{(x+2)^2}$

1. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $]-2;+\infty[$، $f(x)=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{(x+2)^2}$.
2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $]-2;+\infty[$.

تطبيق3: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بِـ $f(x)=\frac{e^x-2}{e^x-1}$

1. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x)=a+\frac{be^x}{e^x-1}$.
2. استنتج دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.

التاريخ: 2015/04/12 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 02 ساعات

المجال التعليـمــي: التحليل.
الـوحدة التعليمية (05): الدوال الاصلية والحساب التكاملي.
مــوضـوع الدرس: المعادلات التفاضلية
الوسـائل التعليـمية: السبورة ، الكتاب المدرسي
الـمـراجـــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.
الكفاءات المستهدفة:

- حل معادلات تفاضلية من الشكل $y'=f(x)$ و $y''=f(x)$.

1. تذكير: معادلة تفاضلية هي معادلة:

- المجهول فيها دالة غالبا ما نرمز إليها بالرمز y، z أو حرف آخر.
- تظهر فيها بعض مشتقات y (المشتقة الأولى y' أو مشتقات من رتبة أكبر y'' ...).
- نسمي حلا لمعادلة تفاضلية (E) في مجال I كل دالة φ تحقق (E) في I.

مثال: الدالة $y:x\mapsto 1+\sin x$ هي حل في $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية: $y'=\cos x$.

2. المعادلات التفاضلية من الشكل $y'=f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=F(x)+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

البرهان: من الواضح أن الدوال y التي تحقق $y'=f(x)$ هي الدوال الأصلية للدالة f على I و منه إذا كان F دالة أصلية لـِ f على I فإن كل الدوال الأصلية لـِ f على I هي الدوال $x\mapsto F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي.

مثال: حلول المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{x^2}$ في $]0;+\infty[$ هي الدوال y حيث: $y=-\frac{1}{x}+c$ مع c ثابت حقيقي.

3. المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و إذا كانت F دالة أصلية لها على I و كانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=G(x)+c_1x+c_2$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

البرهان: نعلم أن $y''=(y')'$ و منه $y''=f(x)$ تعني $(y')'=f(x)$ أي $y'=F(x)+c_1$ حيث: F دالة أصلية للدالة f على I و c_1 عدد حقيقي ثابت. لدينا من جهة ثانية: $y'=F(x)+c_1$ تعني $y=G(x)+c_1x+c_2$ حيث G دالة أصلية للدالة F على I. c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.
(الدالة F قابلة للاشتقاق على I فهي إذن مستمرة على هذا المجال و بالتالي فهي تقبل دوال أصلية على I)

مثال: حلول المعادلة التفاضلية $y''=\sin x$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=-\sin x+ax+b$. a، b ثابتان.

4. المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=-\omega^2y$

مبرهنة (دون برهان): إذا كان ω عددا حقيقيا غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=-\omega^2y$ هي الدوال y حيث: $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

ملاحظة: يمككنا ان نتأكد من أن الدوال y حيث: $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ ، مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان، حلول للمعادلة التفاضلية $y''=-\omega^2y$ و ذلك باشتقاق الدالة y مرتين.

مثال: حلول المعادلة التفاضلية $y''=-2y$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=c_1\cos\left(x\sqrt{2}\right)+c_2\sin\left(x\sqrt{2}\right)$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

5. تمارين

تمرين 1:

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E) $\quad y' = 3x^2 - 2x + 5$.
2. عين F حل المعادلة التفاضلية (E) بحيث: $F(1) = -2$.

الحل:

1. دالة أصلية للدالة $x \mapsto 3x^2 - 2x + 5$ هي الدالة $x \mapsto x^3 - x^2 + 5x$ و بالتالي فإن حلول المعادلة (E) هي الدوال y حيث: $y = x^3 - x^2 + 5x + c$ مع c عدد حقيقي ثابت.
2. لدينا $F(x) = x^3 - x^2 + 5x + c$ و $F(1) = -2$ و منه $1^3 - 1^2 + 5\times 1 + c = -2$ أي $c = -7$.

إذن الحل F الذي يحقق الشرط $F(1) = -2$ هي الدالة F حيث: $F(x) = x^3 - x^2 + 5x - 7$.

تمرين 2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E) $\quad y'' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

الحل:

دالة أصلية للدالة $x \mapsto 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ هي الدالة $x \mapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ و دالة أصلية للدالة $x \mapsto \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ هي الدالة $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ بالتالي فإن حلول المعادلة (E) هي الدوال y حيث: $y = -\frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + c_1 x + c_2$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

تمرين 3: نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E) $\quad y'' + \pi^2 y = 0$.

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E).
2. عين الحل F الذي يحقق الشرطين: $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$ و $F'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.

الحل:

1. نلاحظ أولا أن $y'' + \pi^2 y = 0$ تعني $y'' = -\pi^2 y$ و منه فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = -\pi^2 y$ هي الدوال y حيث: $y = c_1 \cos \pi x + c_2 \sin \pi x$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.
2. لدينا: $F(x) = c_1 \cos \pi x + c_2 \sin \pi x$ و $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$ و $F'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.

لدينا: $F'(x) = -\pi c_1 \sin \pi x + \pi c_2 \cos \pi x$ و بالتالي:

$$\begin{cases} F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \\ F'\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} c_1 \cos\frac{\pi}{2} + c_2 \sin\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} \\ -\pi c_1 \sin\frac{2\pi}{3} + \pi c_2 \cos\frac{2\pi}{3} = 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} c_2 = \frac{2}{3} \\ -\pi c_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi c_2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

إذن $\begin{cases} c_2 = \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} c_1 + \frac{1}{2} c_2 = 0 \end{cases}$ ومنه $c_2 = \frac{2}{3}$ و $c_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$. نجد هكذا: $F(x) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\cos \pi x + \frac{2}{3}\sin \pi x$

التاريخ: 2015/04/15 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 04 ساعات

المجال التعليـمـــي: التحليل.

الـوحدة التعليمية (05): الدوال الاصلية والحساب التكاملي.

مــوضـوع الدرس: تكامل دالة

الوسـائل التعليـميـة: السبورة ، الكتاب المدرسي

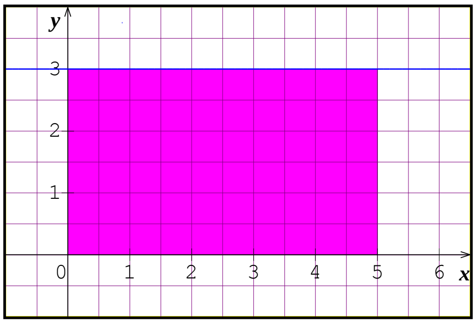
الـمـراجـــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة

- توظيف خواص التكامل لحساب دوال أصلية.
- توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى.

I. نشاط

نزود المستوي في كل ما سيأتي بمعلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث وحدة الأطوال هي $1cm$.

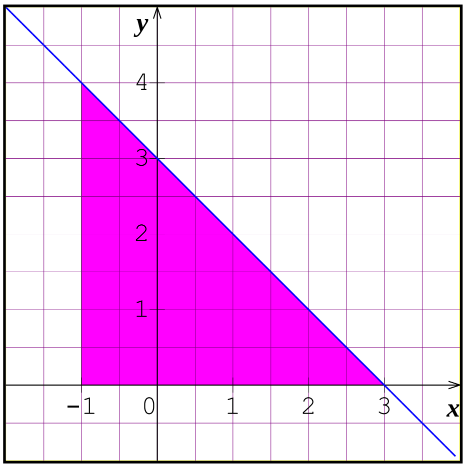


1) نعتبر الدالة f_1 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_1(x)=3$.

و ليكن (C_1) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

نرمز بـ A_1 إلى مساحة الحيز الملون تحت المنحني (C_1) بين العددين 0 و 5.

- أحسب بـ cm^2 المساحة A_1.
- عين دالة أصلية F_1 للدالة f_1 على $\mathbb{R}$.
- أحسب $F_1(5)-F_1(0)$.



2) نعتبر الدالة f_2 المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_2(x)=-x+3$.

و ليكن (C_2) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

نرمز بـ A_2 إلى مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_2)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=3$.

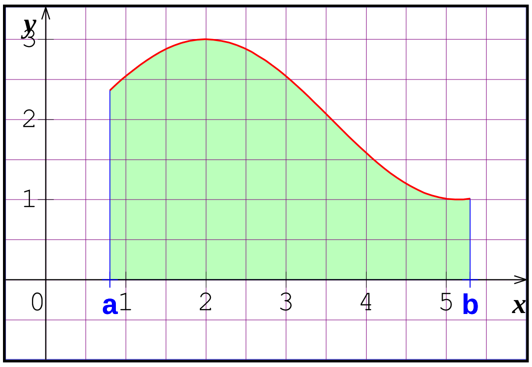
- أحسب بـ cm^2 المساحة A_2.
- عين دالة أصلية F_2 للدالة f_2 على $\mathbb{R}$.
- أحسب $F_2(3)-F_2(-1)$.

II. تكامل دالة

1. الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحن

خاصية: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a\leq b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لـ f على I.

مساحة الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.



ملاحظات:

1. الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو الحيز المحدد بالمنحني (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.
2. وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OAKB$ حيث K هي النقطة التي إحداثياها $(1;1)$.

2. تعريف التكامل

f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I. إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فإنه يوجد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل x من I، $G(x)=F(x)+k$.

لدينا: $G(b)-G(a)=[F(b)+k]-[F(a)+k]=F(b)-F(a)$

نلاحظ هكذا أن العدد $F(b)-F(a)$ مستقل عن اختيار الدالة الأصلية للدالة f على المجال I.

تعريف: f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I.

يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية للدالة f على I، التكامل من a إلى b لِـ f

و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$. نقرأ:" التكامل من a إلى b لِـ$f(x)$ تفاضل x ".

ملاحظة:

1. عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على مجال I يشمل العددين a و b ثم نكتب:

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

2. يمكن استبدال المتغير x بأحد الحروف t، q، ... فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

خاصية: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a\le b$. (C_f) منحني f في معلم متعامد و F دالة أصلية لِـ f على I. مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$، $x=b$ و $y=0$ هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$.

تمرين 1: أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_{-1}^{2}(-3x^2+1)dx$ 2) $\int_0^1 e^{2x-1}dx$ 3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx$

الحل:

1. $\int_{-1}^{2}(-3x^2+1)dx=[-x^3+x]_{-1}^{2}=(-6)-(0)=-6$.
2. $\int_0^1 e^{2x-1}dx=\frac{1}{2}[e^{2x-1}]_0^1=\frac{1}{2}[(e)-(e^{-1})]=\frac{e^2-1}{2e}$.
3. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx=[-\cos x]_{-\pi}^{\pi}=(1)-(1)=0$.

II. خواص التكامل

1. علاقة شال

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I. من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c من I لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$$

البرهان: إذا كانت F دالة أصلية لـِ f على I فإن:

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\left[F(b)-F(a)\right]+\left[F(c)-F(b)\right]=\left[F(c)-F(a)\right]=\int_a^c f(x)dx$$

نتائج: من الواضح أن $\int_a^a f(x)dx=0$ ومنه إذا أخذنا $c=a$ نحصل على $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

2. الخطية

خاصية: f و g دالتان مستمرتان على مجال I و k عدد حقيقي.من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\quad(1)\qquad \text{و}\qquad \int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx\quad(2)$$

البرهان: العلاقة (1): نعلم أنه إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب للدالتين f و g على المجال I فإن الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I. و منه:

$$\int_a^b\left[f(x)+g(x)\right]dx=\left[F(x)+G(x)\right]_a^b=\left[F(b)+G(b)\right]-\left[F(a)+G(a)\right]$$

$$=\left[F(b)-F(a)\right]+\left[G(b)-G(a)\right]=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

العلاقة (2): نتبع منهجية مماثلة علما أنه إذا كانت F دالة أصلية لـِ f على I فإن kF دالة أصلية لـِ kf على I.

3. المقارنة

خواص: f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a;b]$.

(1) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\geq 0$ فإن $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

(2) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

البرهان:

العلاقة (1): إذا كانت F دالة أصلية لـِ f على I فإن من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$. و بما أن $f(x)\geq 0$ على $[a;b]$ فإن F متزايدة على $[a;b]$ و بالتالي $F(a)\leq F(b)$ أي $F(b)-F(a)\geq 0$ و منه $\int_a^b f(x)dx\geq 0$. بالنسبة لبرهان

العلاقة (2) يكفي أن نلاحظ أن $g(x)-f(x)\geq 0$ و نطبق النتائج السابقة.

تمرين 2: أحسب التكامل التالي: $\int_0^3\left|x^2-1\right|dx$

طريقة: نكتب، حسب قيم x، عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة لنتمكن من تعيين دوال أصلية للدالة f.

الحل: x^2-1 كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه -1، 1 و بالتالي:

- من أجل كل x من $[0;1]$، $x^2-1\leq 0$ إذن $\left|x^2-1\right|=-x^2+1$.

- من أجل كل x من $[1;3]$، $x^2-1\ge 0$ إذن $|x^2-1|=x^2-1$.

باستعمال علاقة شال يكون لدينا: $\int_0^3|x^2-1|dx=\int_0^1|x^2-1|dx+\int_1^3|x^2-1|dx=\int_0^1(-x^2+1)dx+\int_1^3(x^2-1)dx$

و منه $\int_0^3|x^2-1|dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^3=\left[\left(-\frac{1}{3}+1\right)-0\right]+\left[\left(\frac{27}{3}-3\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right]=\frac{22}{3}$

تمرين 3: نعتبر التكاملين: $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$

أحسب $A+B$ و $A-B$ ثم استنتج A و B.

الحل:

$A+B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x+\sin^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=[x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$.

$A-B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x-\sin^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$

لدينا $A+B=\frac{\pi}{4}$ و $A-B=\frac{1}{2}$. بعد حل هذه الجملة نجد $A=\frac{\pi+2}{8}$ و $B=\frac{\pi-2}{8}$.

تمرين 4 : نعتبر التكامل $I=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt$

1. بين أنه من أجل كل t من $[0;1]$ ، $\frac{1}{t^2+1}\le 1$.
2. استنتج حصرا للعدد I.

الحل:

1. من أجل كل t من $[0;1]$، $1+t^2\ge 1$ و منه من أجل كل t من $[0;1]$، $\frac{1}{1+t^2}\le 1$.
2. بما أن $0<1$ و بتطبيق خاصية المحافظة على الترتيب نستنتج أن $\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt\le\int_0^1 1dt$

و بما أن $\int_0^1 1dt=[t]_0^1=1$ فإن $\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt\le 1$. من الواضح كذلك أنه من أجل كل t من $[0;1]$، $\frac{1}{1+t^2}>0$

و منه $I>0$. نستنتج هكذا الحصر التالي: $0<I\le 1$.

III. القيمة المتوسطة

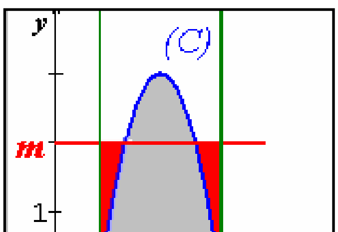
1. القيمة المتوسطة لدالة على مجال

تعريف: f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي: $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

التفسير البياني في حالة دالة موجبة: نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a;b]$.

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;I,J)$.



$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \text{يعني} \quad m(b-a)=\int_a^b f(x)dx$$

نعلم أن $\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

$m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و m (القيمة المتوسطة).

و هكذا فإن m، القيمة المتوسطة لِـ f على $[a;b]$، هي " ارتفاع " المستطيل الذي قاعدته $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

نلاحظ أن للحيزين الملونيين بالأزرق و الأحمر نفس المساحة.

2. حصر القيمة المتوسطة

خواص: f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$.

إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $m\le f(x)\le M$ فإن:

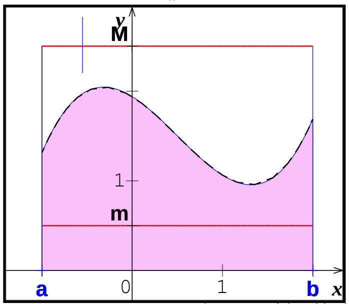
$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

البرهان: من أجل كل x من $[a;b]$ لدينا: $m\le f(x)\le M$ و منه و باستعمال خاصية المقارنة يكون لدينا:

$\int_a^b mdx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b Mdx$ أي $m\int_a^b dx\le\int_a^b f(x)dx\le M\int_a^b dx$ و بما أن $\int_a^b dx=b-a$ نحصل على

$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

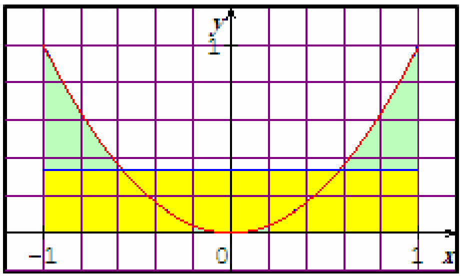
حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكان a و b عددان حقيقيان من I و وجد عدد حقيقي M بحيث من أجل كل x من I، $|f(x)|\le M$ فإن $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le M|b-a|$.



التفسير البياني في حالة f موجبة و $m\ge 0$: مساحة الحيز تحت المنحني الممثل لِـ f بين a و b محصورة بين مساحتي المستطيلين اللذين ارتفاعهما m و M و عرضهما $b-a$. كما أن القيمة المتوسطة μ هي الأخرى محصورة بين a و b.

تمرين 5: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;1]$ بـ $f(x)=x^2$

1. أرسم التمثيل البياني (C) للدالة f في معلم متعامد و متجانس ثم أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[-1;1]$.
2. فسر بيانيا النتيجة.



الحل:

1. $\mu=\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}$.

2. مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x=-1$، $x=1$ و $y=0$ تساوي مساحة المستطيل $ABCD$ الذي بعداه 2 و $\frac{1}{3}$ علما أن $A(1;0)$، $B\left(1;\frac{1}{3}\right)$، $C\left(-1;\frac{1}{3}\right)$ و $D(-1;0)$.

تمرين 6: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)=1+\ln(x+1)$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;e-1]$.
2. استنتج حصرا لـِ $f(x)$.
3. استنتج حصرا للعدد الحقيقي $I=\int_{1}^{e-1} f(x)dx$

الحل:

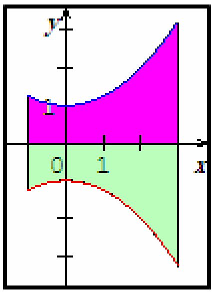
1. لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\frac{1}{x+1}>0$. إذن f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و منه على المجال $[0;e-1]$.
2. نستنتج أنه من أجل كل x من $[0;e-1]$، $f(0)\leq f(x)\leq f(e-1)$ أي $1\leq f(x)\leq 2$.
3. بتطبيق حصر القيمة المتوسطة نجد $(e-2)\leq \int_{1}^{e-1} f(x)dx \leq 2(e-2)$.

IV. التمديد إلى دالة إشارتها كيفية

1. تكامل دالة سالبة على مجال

لتكن f دالة مستمرة و سالبة على مجال $[a;b]$. و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نرمز بـِ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ و بـِ A' إلى مساحة D' الحيز المحدد بالمنحني (C_{-f}) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$.



بما أن f سالبة على $[a;b]$ فإن $-f$ موجبة على $[a;b]$ و بالتالي $A'=\int_{a}^{b} -f(x)dx$

الحيزان D و D' متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل فمساحتاهما متساويتان أي $A'=A$.

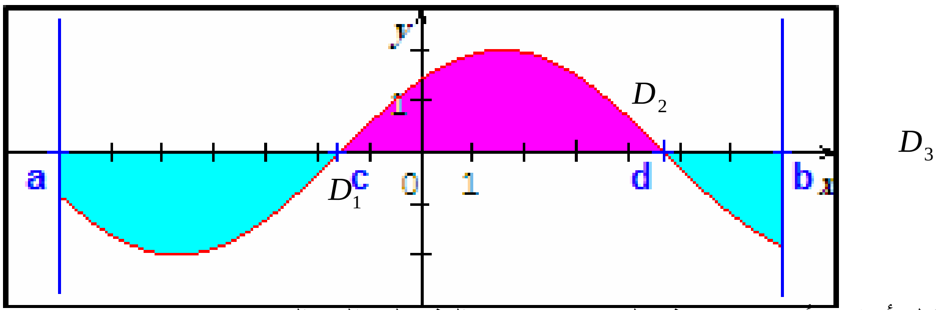
و بالتالي فإن $A=\int_{a}^{b} -f(x)dx$ أو $\int_{a}^{b} f(x)dx=-A$. نقول أحيانا أن $\int_{a}^{b} f(x)dx$ هي المساحة الجبرية للحيز D

فتكون سالبة إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ و تكون موجبة إذا كانت f موجبة على $[a;b]$.

2. تكامل دالة تغير إشارتها على مجال

لتكن مثلا f دالة مستمرة و تغير إشارتها على مجال $[a;b]$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نرمز بـِ A إلى مساحة الحيز D المحدد بالمنحني (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$.



نلاحظ مثلا في الشكل أعلاه أن f موجبة على $[c;d]$ و سالبة على المجالين $[a;c]$ و $[d;b]$.

نرمز بـِ A_1 إلى مساحة الحيز D_1، بـِ A_2 إلى مساحة الحيز D_2 و بـِ A_3 إلى مساحة الحيز D_3.

لدينا $A=A_1+A_2+A_3$ و بما أن $A_1=-\int_{a}^{C} f(x)dx$ ، $A_2=\int_{c}^{d} f(x)dx$ و $A_3=-\int_{d}^{b} f(x)dx$

فإن $A=-\int_a^C f(x)dx+\int_c^d f(x)dx-\int_d^b f(x)dx$

ملاحظة:

بصفة عامة لحساب مساحة حيز محدد بالمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ و بمنحن ممثل لدالة f تغير إشارتها على $[a;b]$ نقوم أولا بتحديد المجالات التي تحتفظ فيها الدالة بإشارة ثابتة (سالبة أو موجبة) ثم نطبق النتيجة المناسبة على كل مجال من هذه المجالات.

تمرين 7: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;\pi]$ بـ $f(x)=\frac{1}{2}+\cos x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$.
2. أرسم تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد و متجانس.
3. أحسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=\pi$ و $y=0$.

الحل:

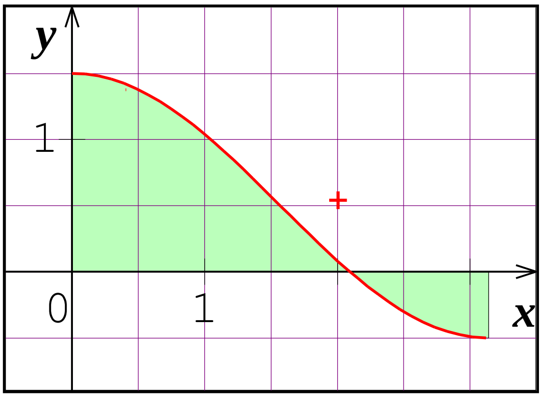
1.للدالة f نفس اتجاه تغير الدالة $x\mapsto\cos x$ فهي إذن متناقصة تماما على المجال $[0;\pi]$.

لدينا $f(0)=\frac{3}{2}$ و $f(\pi)=-\frac{1}{2}$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا في $[0;\pi]$

$f(x)=0$ تعني $x=\frac{2\pi}{3}$. نستنتج أنه من أجل كل x من $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ ، $f(x)\geq 0$

و من أجل كل x من $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$ ، $f(x)\leq 0$.

2.أنظر الشكل المقابل.



3.لدينا $A=A_1+A_2$ حيث $A_1=\int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x)dx$

و $A_2=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} -f(x)dx$.

$A_1=\left[\frac{1}{2}x+\sin x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}u.a$ و $A_1=-\left[\frac{1}{2}x+\sin x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}u.a$

و منه $A=\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)u.a$.

التاريخ: 2015/04/21 المستوى: ثالثة علوم تجريبية المـدة: 04 ساعات

المجال التعليـــمـي: التحليل.

الـوحدة التعليميـة (05): الدوال الاصلية والحساب التكاملي.

مــوضوع الدرس: توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية وتطبيقات له

الوسـائل التعليـميـة: السبورة ، الكتاب المدرسي

الـمـراجـــع: الكتاب المدرسي، الوثيقة المرافقة.

الكفاءات المستهدفة

- استعمال التكامل بالتجزئة
- توظيف الحساب التكاملي لحل مشكلات بسيطة.
- حساب حجوم لمجسمات بسيطة.

I . توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية

1. المكاملة بالتجزئة

مبرهنة: لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين u' و v' مستمرتان على I.

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

البرهان: الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على I و منه الدالة الجداء uv قابلة للاشتقاق على I و لدينا : $(uv)'=u'v+uv'$. الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على I فهما إذن مستمرتان على I. لدينا كذلك الدالتان u' و v' مستمرتان على I و منه الدوال $u'v$ ، uv' و مجموعهما $(uv)'$ مستمرة على I. بحساب التكامل من a إلى b نحصل على: $\int_a^b (uv)'(x)dx=\int_a^b\left[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\right]dx$ و باستعمال خواص الخطية نجد:

$\int_a^b (uv)'(x)dx=\int_a^b u'(x)v(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx$ و علما أن الدالة uv دالة أصلية للدالة $(uv)'$ فإن

$\left[u(x)v(x)\right]_a^b=\int_a^b u'(x)v(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx$ و هكذا نصل إلى النتيجة:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

2. الدالة الأصلية لدالة و التي تنعدم من أجل قيمة

مبرهنة: f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I.

الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a هي الدالة $F:x\mapsto\int_a^x f(t)dt$

البرهان: نضع $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ و منه إذا كانت G دالة أصلية للدالة f على المجال I يكون لدينا:

من أجل كل x من I، $F(x)=G(x)-G(a)$ و بالتالي: من أجل كل x من I، $F'(x)=G'(x)=f(x)$

نستنتج أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال I. بالإضافة إلى ذلك لدينا: $F(a)=G(a)-G(a)=0$.

إذن الدالة F هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a.

ملاحظة: من الواضح أنه إذا كانت $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ فإن $F'(x)=f(x)$.

مثال: نعلم أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $(\ln)'(x)=\frac{1}{x}$ كما نعلم أن $\ln(1)=0$ و بالتالي لدينا:

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

تمرين 1: باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب:

$$I=\int_0^1 (x-1)e^x\,dx \quad \text{و} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin x\,dx$$

طريقة: لاستعمال المكاملة بالتجزئة نكتب f على الشكل $u\times v'$.

الحل:

1. نضع $u(x)=x-1$ ، $v'(x)=e^x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=e^x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $I=\left[(x-1)e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$

و منه $I=1-\left[e^x\right]_0^1=1-(e-1)=-e$. إذن $I=-e$.

ملاحظة: كان بالإمكان وضع $u(x)=e^x$ ، $v'(x)=x-1$ و من ثم $u(x)=e^x$ ، $v(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

إلا أننا بعد التعويض نحصل على تكامل أكثر تعقيدا من الأول.

2. نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=\sin x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=-\cos x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $J=\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}-\cos x\,dx$

و منه $J=-\frac{\pi}{6}+\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. إذن $J=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

تمرين 2: عين، باستعمال المكاملة بالتجزئة، الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ و التي تنعدم عند 1.

طريقة: يمكننا دائما وضع $u(x)=u(x)v'(x)$ حيث $v'(x)=1$.

الحل:

الدالة $x\mapsto \ln x$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$. و بالتالي فدالتها الأصلية التي تنعدم عند 1 هي الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $F(x)=\int_1^x \ln(t)dt$.

نضع $u(t)=\ln(t)$ ، $v'(t)=1$ و منه $u'(t)=\frac{1}{t}$ ، $v(t)=t$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة يكون لدينا: $F(x)=\left[t\ln t\right]_1^x-\int_1^x \frac{1}{t}\times t\,dt=x\ln x-\int_1^x dt$

و منه $F(x)=x\ln x-\left[t\right]_1^x=x\ln x-(x-1)=x\ln x-x+1$

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $F(x)=x\ln x-x+1$.

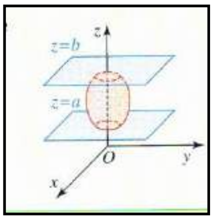
ملاحظة: الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ هي الدوال $x\mapsto x\ln x-x+c$ حيث $c\in\mathbb{R}$

و بصفة عامة نثبت بإتباع نفس الطريقة أن الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto \ln(x+a)$ على المجال $]-a;+\infty[$ هي الدوال $x\mapsto (x+a)\ln(x+a)-x+c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

بعض تطبيقات الحساب التكاملي

1. حساب حجوم بعض المجسمات البسيطة

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O;I,J,K)$ محاوره $(x'x)$، $(y'y)$ و $(z'z)$.
وحدة الحجوم $(u.v)$ هي حجم متوازي المستطيلات المنشأ على $(O;I,J,K)$.
نعتبر في الفضاء مجسما محددا بمستويين موازيين للمستوي (xOy) معادلتاهما: $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$.



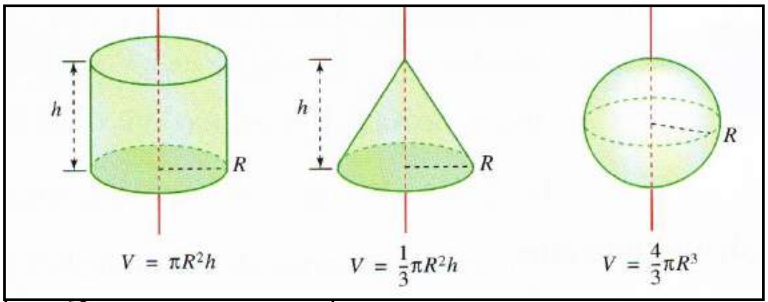
خاصية1: لتكن $S(z)$ مساحة مقطع المجسم بمستو مواز للمستوي (xOy) راقمه z حيث $a<z<b$.

نقبل أن حجم المجسم بوحدة الحجوم هو العدد الحقيقي V حيث: $V=\int_a^b S(z)dz$

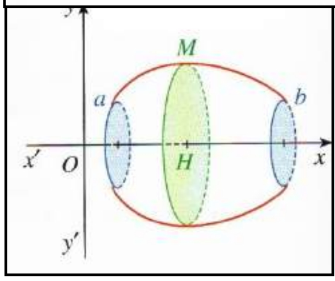
أمثلة:

لدينا في الشكل المقابل كل من:

- حجم الكرة.
- حجم المخروط الدوراني.
- حجم الاسطوانة الدورانية.



حالة خاصة: حجم مجسم دوراني محوره $(x'x)$



ليكن (C) المنحنى الممثل لدالة f موجبة على مجال $[a;b]$. دوران المنحنى (C) حول المحور $(x'x)$ يولد مساحة دورانية محورها $(x'x)$ التي بدورها تحدد مجسما دورانيا محوره $(x'x)$. لتكن $M(x;f(x))$ نقطة من المنحنى (C).
مقطع المجسم الناتج عن دوران المنحنى (C) حول المحور $(x'x)$ بمستو مار من M و عمودي على $(x'x)$ هو قرص مساحته $\pi\times HM^2$ أي $\pi\times[f(x)]^2$.

خاصية2: حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ لمنحن (C) ممثل لدالة f مستمرة و موجبة على مجال $[a;b]$ هو العدد الحقيقي V حيث: $V=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx$

2. المسافة المقطوعة على مستقيم

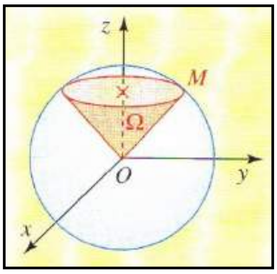
نرمز بـ $x(t)$ إلى المسافة المقطوعة من قبل نقطة متحركة عند اللحظة t. تعرف السرعة اللحظية $v(t)$ لهذه النقطة المتحركة عند اللحظة t بالعلاقة: $v(t)=\frac{dx}{dt}=x'(t)$ أي $dx=v(t)dt$.

خاصية: المسافة المقطوعة من قبل نقطة متحركة بين اللحظتين t_1 و t_2 $(t_1<t_2)$ سرعتها اللحظية $v(t)$ هي:

$$x=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

تمرين 3: برهن أن حجم كرة نصف قطرها R هو: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

الحل:



نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J,K)$ محاوره $(x'x)$، $(y'y)$ و $(z'z)$ الكرة التي مركزها O و نصف قطرها R.
مقطع هذه الكرة بمستو مواز للمستوي (xOy) و راقمه z حيث $-R<z<R$ هي دائرة مركزها $\Omega(0;0;z)$ و نصف قطرها $r=\Omega M$ مع $OM=R$.

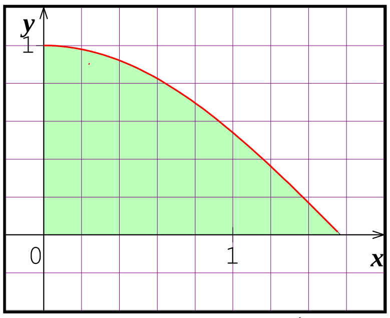
لدينا في المثلث القائم $O\Omega M$: $r^2=R^2-z^2$ و منه مساحة القرص الذي مركزه Ω و نصف قطره R هي:

$S(z)=\pi(R^2-z^2)$. الحجم هو إذن: $V=\int_{-R}^{R}S(z)dz=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-z^2)dz$ و بالتالي:

$V=\pi\left[R^2z-\frac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{R}=\pi\left[\left(R^3-\frac{1}{3}R^3\right)-\left(-R^3+\frac{1}{3}R^3\right)\right]$ و منه $V=\frac{4}{3}\pi R^3 u.v$.

تمرين 4: ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $f:x\mapsto\cos x$ على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1. أحسب a مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل $(x'x)$.
2. أحسب v الحجم المولد بدوران المنحني (C) حول محور الفواصل $(x'x)$.



الحل: نلاحظ أن الدالة f موجبة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1. $a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ إذن $a=1u.a$

2. $v=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi[f(x)]^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx$

$\frac{\pi}{2}$

نعلم أن $\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ و منه دالة أصلية للدالة $x\mapsto\cos^2x$ هي الدالة $x\mapsto\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$ على $\mathbb{R}$

و هكذا نجد $v=\pi\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi^2}{4}$. و منه $v=\frac{1}{4}\pi^2 uv$.

تمرين 5: من أجل $t>0$، سرعة نقطة متحركة هي: $V(t)=2t+e^t\ (m.s^{-1})$

أحسب x المسافة المقطوعة من قبل هذه النقطة المتحركة بين اللحظتين $t_1=1s$ و $t_2=2s$.

الحل: نعلم أن $x=\int_{t_1}^{t_2}v(t)dt$ و منه $x=\int_1^2(2t+e^t)dt$. دالة أصلية للدالة $t\mapsto 2t+e^t$ على $\mathbb{R}$ هي الدالة $t\mapsto t^2+e^t$

و منه $x=\left[t^2+e^t\right]_1^2=(4+e^2)-(1+e)=e^2-e+3$.

إذن المسافة المقطوعة بين اللحظتين $t_1=1s$ و $t_2=2s$ هي $(e^2-e+3)m$.

3. مساحة حيز محدد بمنحنيين

نتيجة: إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$ بحيث من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\geq g(x)$ فإن مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f)، (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي:

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$$

تطبيق: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الطول هي $2cm$.

1. أدرس تغيرات الدالة f محددا نهايتيها عند 0 و عند $+\infty$.
2. بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
3. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_f) و (Δ).

4. أحسب بـِ cm^2 مساحة الحيز المحدد بـِ (C_f)، (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\frac{1}{e}$ و $x=e$.