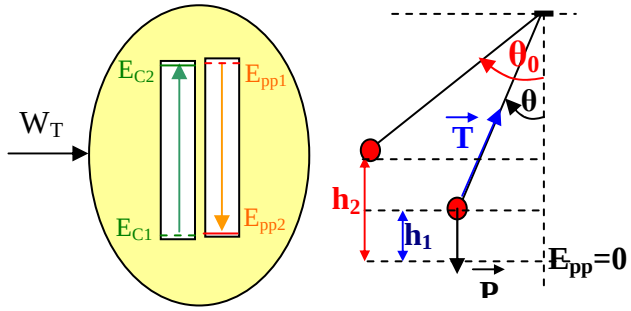
حل التمرين الثالث :

1. العبارة البيانية: $T = 2\sqrt{\ell}$

2. الدراسة الطاقوية:



حسب مبدأ انحفا ظ الطاقة نكتب:

$$E_{pp1} + E_{C1} + W_T = E_{pp2} + E_{C2}$$

$$m.g.(h_1-h_2) + 0 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2} . m.v^2$$

$$m.g.h = \tfrac{1}{2} m.v^2$$

$$v^2 = 2.g(\ell \cos\theta - \ell \cos\theta_0)$$

$$v^2 = 2.g.\ell (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

نشتق الطرفين بالنسبة للزمن فنجد:

$$2.v.dv/dt = 2.g.\ \ell.d\theta/dt(-\sin\theta)$$

$$v = \ell w_0 = \ell d\theta/dt \quad \text{ومنه} \quad dv/dt = \ell d^2\theta/dt^2$$

$$-g.\ell.\sin\theta.d\theta/dt = \ell^2.d\theta/dt.d^2\theta/dt^2$$

$$-g.\sin\theta = \ell.d^2\theta/dt^2$$

$$d^2\theta/dt^2 + g/\ell.\sin\theta = 0$$

من أجل سعات صغيرة ($\theta_0 < 10°$) نكتب $\sin\theta \approx \theta(rad)$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + g/\ell.\theta = 0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بالنسبة θ حلها من الشكل

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(w_0 t + \varphi) \quad \text{.....(1)}$$

لدينا : $d\theta/dt = -\theta_0 w_0 \sin(w_0 t + \varphi)$

$$d^2\theta/dt^2 = -\theta_0 w_0^2 \cos(w_0 t + \varphi)$$

$$d^2\theta/dt^2 + w_0^2\theta = 0 \quad \text{.....(2)}$$

بالمطابقة بين المعادلة (1) و(2) نجد:

$w_0^2 = g/\ell$ ومنه $w_0 = \sqrt{g/\ell}$

لكن $T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$ ومنه $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{g}$$

3. بالمطابقة بين العبارتين البيانية والنظرية نجد:

$\frac{2\pi}{\sqrt{g}} = 2$ ومنه $g = \pi^2 = 10\ m/s^2$

4. لدينا $v^2 = 2.g.\ \ell\ (\cos 30 - \cos 60)$

بالتعويض: $v^2 = 7{,}3$ ومنه $a_n = v^2/\ell = 7{,}3\ m/s^2$

لحساب التسارع المماسي نكتب:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على المماس نجد:

$$P \sin 30 = m\ a_t$$

$$m\ .g \sin 30 = m\ a_t$$

$$a_t = g \sin 30$$

$$a_t = 5\ m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \rightarrow a = 8{,}86\ m/s^2$$