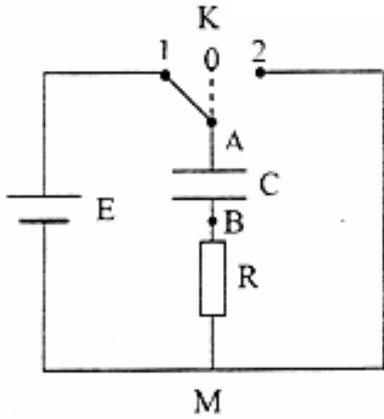


الموضوع 3 ثا - 18

التمرين الأول : (بكالوريا 2008 - رياضيات) (U03-Ex35)

في حصة الأعمال المخبرية ، اقترح الأستاذ على تلاميذه مخطط الدارة الممثلة في (الشكل-2) لدراسة ثنائي القطب RC . تتكون الدارة من العناصر التالية :

- مولد توتر كهربائي ثابت $E = 12 \text{ V}$.
- مكثفة (غير مشحونة) سعتها $C = 1.0 \mu\text{F}$.
- ناقل أومي مقاومته $R = 5 \cdot 10^3 \Omega$.
- بادلة .



الشكل-2

- 1- نجعل البادلة في اللحظة $(t = 0)$ على الوضع (1) .
أ/ ماذا يحدث .

ب/ كيف يمكن عمليا مشاهدة التطور الزمني للتوتر الكهربائي u_{AB}

ج/ بين أن المعادلة التفاضلية التي تحكم اشتغال الدارة الكهربائية عبارتها $RC \frac{du_{AB}}{dt} + u_{AB} = E$.

د- أعط عبارة (τ) الثابت المميز للدارة ، و بين باستعمال التحليل البعدي أنه يقدر بالثانية في النظام الدولي للوحدات (SI) .

ه/ بين أن المعادلة التفاضلية السابقة (1- ج) تقبل العبارة $u_{AB} = E(1 - e^{-t/\tau})$ حل لها .

و/ أرسم شكل المنحنى البياني الممثل للتوتر الكهربائي $u_{AB} = f(t)$ و بين كيفية تحديد τ من البيان .

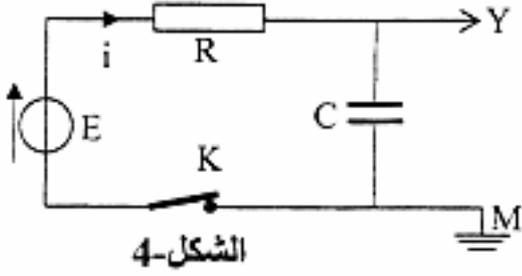
ي/ قارن بين قيمة التوتر u_{AB} في اللحظة $t = 5\tau$ و E . ماذا تستنتج ؟

- 2- بعد الانتهاء من الدراسة السابقة ، نجعل البادلة في الوضع (2) .
أ/ ماذا يحدث للمكثفة .

ب/ أحسب قيمة الطاقة الأعظمية المحولة في الدارة الكهربائية .

التمرين الثاني : (بكالوريا 2008 – علوم تجريبية) (U03-Ex36)

قصد شحن مكثفة مفرغة ، سعتها (C) ، نربطها على التسلسل مع العناصر الكهربائية التالية :



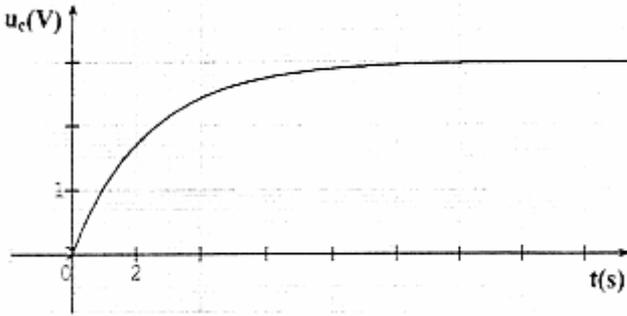
- مولد كهربائي ذو توتر ثابت $E = 3 \text{ V}$ مقاومته الداخلية مهملة .

- ناقل أومي مقاومته $R = 10^4 \Omega$.

- قاطعة K .

لإظهار التطور الزمني للتوتر الكهربائي $u_C(t)$ بين طرفي المكثفة . نصلها براسم اهتزاز مهبطي ذي ذاكرة (الشكل-4) .

نغلق القاطعة K في اللحظة $t = 0$ فنشاهد على شاشة راسم الاهتزاز المهبطي المنحنى $u_C(t)$ الممثل في الشكل-5



1- ما هي شدة التيار الكهربائي المار في الدارة بعد مدة $\Delta t = 15 \text{ s}$ من غلقها ؟

2- أعط العبارة الحرفية لثابت الزمن τ ، و بين أن له نفس وحدة قياس الزمن .

3- عين بيانيا قيمة τ و استنتج السعة (C) للمكثفة .

4- بعد غلق القاطعة (في اللحظة $t = 0$) :

أ/ اكتب عبارة شدة التيار الكهربائي $i(t)$ المار في الدارة بدلالة شحنة المكثفة .

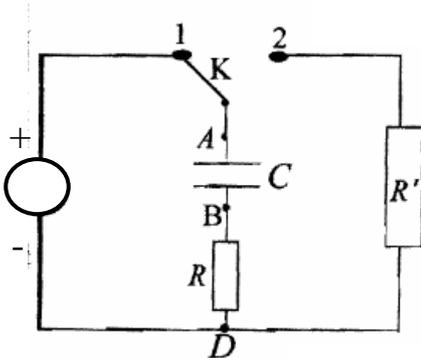
ب/ اكتب عبارة التوتر الكهربائي $u_C(t)$ بين لبوسي المكثفة بدلالة الشحنة $q(t)$.

ج/ بين أن المعادلة التفاضلية التي تعبر عن $u_C(t)$ تعطى بالعبارة : $u_C + RC \frac{du_C}{dt} = E$.

5- يعطى حل المعادلة التفاضلية السابقة بالعبارة $u_C(t) = E (1 - e^{-t/A})$. استنتج العبارة الحرفية للثابت A ، و ما هو مدلوله الفيزيائي ؟

التمرين الثالث : (بكالوريا 2009 – رياضيات) (U03-Ex17)

نحقق التركيب الكهربائي التجريبي المبين في الشكل المقابل باستعمال التجهيز



▪ مكثفة سعتها (C) غير مشحونة .

▪ ناقلين أوميين مقاومتهما $(R = R' = 470 \Omega)$

▪ مولد ذي توتر ثابت (E) .

▪ بادلة (k) ، أسلاك توصيل .

1/ نضع البادلة عند الوضع (1) في اللحظة ($t = 0$) :

أ/ بين على الشكل جهة التيار الكهربائي المار في الدارة ثم مثل بالأسهم التوترين U_C ، U_R .

ب/ عبر عن U_C و U_R بدلالة شحنة المكثفة $q = q_A$ ثم أوجد المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة q .

ج/ تقبل هذه المعادلة حلا من الشكل : $q(t) = A (1 - e^{-\alpha t})$. عبر عن A و α بدلالة E ، R ، C .

د/ إذا كانت قيمة التوتر الكهربائي عند نهاية الشحن بين طرفي المكثفة (5V) ، استنتج قيمة (E) .

هـ/ عندما تشحن المكثفة كلياً تخزن طاقة ($E_C = 5 \text{ mJ}$) . استنتج سعة المكثفة (C) .

2/ نجعل البادلة الآن عند الوضع (2) :

أ/ ماذا يحدث للمكثفة ؟

ب/ قارن بين قيمتي ثابت الزمن الموافق للوضعين (1) ثم (2) للبادلة (k) .

التمرين الرابع : (بكالوريا 2011 – علوم تجريبية) (U02-Ex38)

مكثفة سعتها C شحنت كلياً تحت توتر ثابت $E = 6V$. من أجل معرفة سعتها C نقوم بتفريغها في ناقل أومي

مقاومته $R = 4 \text{ k}\Omega$.

1- أرسم مخطط دارة التفريغ .

2- لمتابعة تطور التوتر $U_C(t)$ بين طرفي المكثفة خلال الزمن نستعمل جهاز فولطمتر رقمي و ميقاتية إلكترونية .

أ- كيف يتم ربط جهاز الفولطمتر في الدارة ؟

نغلق القاطعة في اللحظة $t = 0 \text{ ms}$ و نسجل نتائج المتابعة في الجدول التالي :

t (ms)	0	10	20	30	40	60	80	100	120
u_C (V)	6.00	4.91	4.02	3.21	2.69	1.81	1.21	0.81	0.54

ب- أرسم المنحنى البياني الممثل للدالة $U_C = f(t)$ على ورقة ميليمترية .

ج- عين بيانياً قيمة ثابت الزمن τ .

د- احسب سعة المكثفة C .

3- أ- بتطبيق قانون جمع التوترات ، أكتب المعادلة التفاضلية للتوتر الكهربائي $U_C(t)$.

ب- المعادلة التفاضلية السابقة تقبل العبارة $U_C(t) = A e^{-\alpha t}$ حلاً لها ، حيث α ، A ثابتان يطلب تعيينهما .

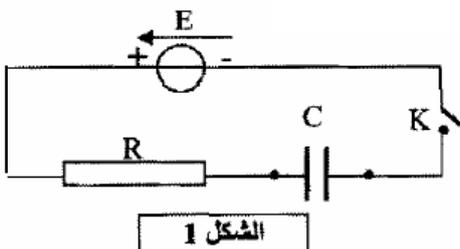
التمرين الخامس : (بكالوريا 2009 – علوم تجريبية) (U02-Ex37)

تتكون الدارة الكهربائية المبينة في الشكل-1 من العناصر التالية

موصولة على التسلسل :

- مولد كهربائي توتره ثابت $E = 6 \text{ V}$.

- مكثفة سعتها $C = 1.2 \mu\text{F}$.



- ناقل أومي مقاومته $R = 5 \text{ k}\Omega$.

- قاطعة K .

نغلق القاطعة :

1- بتطبيق قانون جمع التوترات أوجد المعادلة التفاضلية التي تربط بين $u_C(t)$ ، $\frac{du_C(t)}{dt}$ ، E ، R و C .

2- تحقق من أن المعادلة التفاضلية المحصل عليها تقبل العبارة : $u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$ كحل لها .

3- حدد وحدة المقدار RC ، ما مدلوله العملي بالنسبة للدارة الكهربائية ؟ اذكر اسمه .

4- أحسب قيمة التوتر الكهربائي $u_C(t)$ في اللحظات المدونة في الجدول التالي :

t(ms)	0	6	12	18	24
u_C (V)					

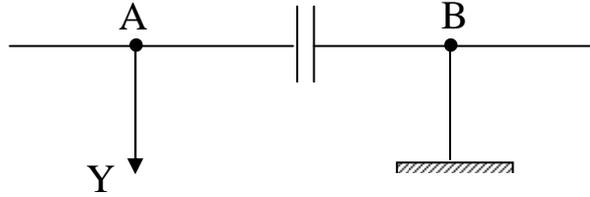
5- أرسم المنحنى البياني $u_C = f(t)$.

6- أوجد العبارة الحرفية للشدة اللحظية للتيار الكهربائي $i(t)$ بدلالة E ، R ، C ، ثم أوجد قيمتها في اللحظتين $(t = 0)$ و $(t = \infty)$.

7- أكتب عبارة الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة ، أحسب قيمتها عندما $(t = \infty)$.

حل التمرين الأول

1- أ - عند وضع البادلة في الوضع (1) تشحن المكثفة .
 ب- لمشاهدة التطور الزمني للتوتر الكهربائي يمكن ربط ثنائي القطب براسم الإهتزاز المهبطي وفق الشكل التالي :



ج- إبراز المعادلة التفاضلية :
 حسب قانون جمع التوترات

$$u_{AB} + u_{BM} = E$$

$$u_{AB} + R i = E$$

$$u_{AB} + R \frac{dq}{dt} = E$$

$$u_{AB} + R \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} = E$$

$$u_{AB} + RC \frac{du_{AB}}{dt} = E$$

$$RC \frac{du_{AB}}{dt} + u_{AB} = E$$

د- عبارة τ :

$$\tau = RC$$

- إثبات أن τ يقدر بالثانية :

$$[\tau] = [R][C]$$

$$[\tau] = \frac{[U][Q]}{[I][U]} = \frac{[Q]}{[I]} = \frac{[I][T]}{[I]} \rightarrow [\tau] = [T]$$

إذن τ يقدر بالثانية .

هـ- إثبات أن $u_{AB} = E(1 - e^{-t/\tau})$ هو حل للمعادلة التفاضلية :

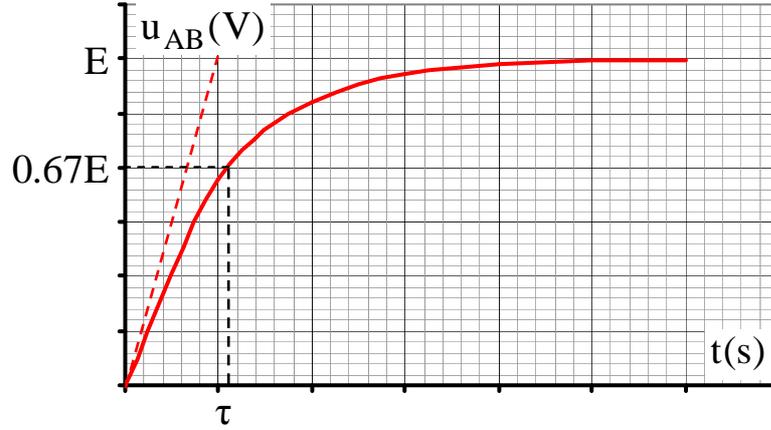
- $u_{AB} = E(1 - e^{-t/\tau})$
- $\frac{du_{AB}}{dt} = E \left(0 - \left(-\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}\right) \right) = \frac{E}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{E}{RC} e^{-t/\tau}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$RC\left(\frac{E}{RC}e^{-t/\tau}\right) + E(1 - e^{-t/\tau}) = E$$

$$Ee^{-t/\tau} + E - Ee^{-t/\tau} = E \rightarrow E = E$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .
- المنحنى البياني :



كيفية تحديد τ :

طريقة (1) :

نسقط نقطة تقاطع المماس عند $t = 0$ مع المستقيم المقارب $u_{AB} = E$ على محور الأزمنة نجد قيمة τ .

طريقة (2) :

من تعريف τ يكون :

$$t = \tau \rightarrow u_{AB} = 0.67 E = 0.67 \cdot 12 = 8.04 \text{ V}$$

بالإسقاط في البيان نجد قيمة τ التي تمثل اللحظة الموافقة للقيمة $U = 8.04 \text{ V}$

ي- المقارنة بين u_{AB} عند $t = 5\tau$ و E :

$$u_{AB} = E(1 - e^{-t/\tau})$$

$$t = 5\tau \rightarrow u_{AB} = E(1 - e^{-5\tau/\tau}) = u_{AB} = E(1 - e^{-5}) \approx E$$

إذن قيمة u_{AB} عند اللحظة $t = 5\tau$ تساوي تقريبا قيمة E ، نستنتج من ذلك أن عملية الشحن تنتهي عند اللحظة $t = 5\tau$.

2-أ- يحدث تفريغ للمكثفة .

ب- الطاقة الأعظمية المحولة في الدارة الكهربائية :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C u_{AB}^2$$

تكون الطاقة أعظمية عندما يكون التوتر أعظمي أين $u_{AB} = E$ و منه :

$$E_{0(C)} = \frac{1}{2} C E^2$$

$$E_{0(C)} = \frac{1}{2} 10^{-6} (12)^2 = 7.2 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

حل التمرين الثاني

1- شدة التيار المار في الدارة بعد مدة $\Delta t = 15$ s :
بعد 15s تكون الجملة الكهربائية (RC) في حالة نظام دائم و عندها يكون :

$$u_C = E$$

و حسب قانون جمع التوترات :

$$E = u_C + u_R$$

$$E = E + Ri \rightarrow Ri = 0 \rightarrow i = 0$$

أي أن شدة التيار معدومة بعد $\Delta t = 15$ ثانية .

2- العبارة الحرفية لثابت الزمن τ :

$$\tau = RC$$

- إثبات أن ثابت الزمن τ نفس وحدة قياس الزمن :

$$[\tau] = [R][C]$$

$$[\tau] = \frac{[U][Q]}{[I][U]} = \frac{[Q]}{[I]} = \frac{[I][T]}{[I]} \rightarrow [\tau] = [T]$$

إذن لثابت الزمن τ نفس وحدة قياس الزمن .

قيمة τ :

من البيان :

$$t = \tau \rightarrow u_C = 0,63 u_{Cmax} = 0,63 \cdot 3 = 1,89 \text{ V}$$

بالإسقاط مع أخذ سلم الرسم بعين الاعتبار : $\tau = 2$ s

قيمة C :

$$\tau = RC \rightarrow C = \frac{\tau}{R} \rightarrow C = \frac{2}{10^4} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ F}$$

4- أ- عبارة $i(t)$ بدلالة $q(t)$:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

ب- عبارة $u_C(t)$ بدلالة $q(t)$:

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

ج- إبراز المعادلة التفاضلية :

حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$

$$Ri + u_C = E \rightarrow R \frac{dq}{dt} + u_C = E \rightarrow R \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} + u_C = E$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$$

و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى .

- $u_C = E(1 - e^{-t/A})$
- $\frac{du_C}{dt} = E(0 - (-\frac{1}{A}e^{-t/A})) = \frac{E}{A}e^{-t/A}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{E}{A}e^{-t/A} + \frac{1}{RC}E(1 - e^{-t/A}) = \frac{E}{RC}$$

$$\frac{E}{A}e^{-t/A} + \frac{E}{RC} - \frac{E}{RC}e^{-t/A} = \frac{E}{RC}$$

$$\left(\frac{E}{A} - \frac{E}{RC}\right)e^{-t/A} + \frac{E}{RC} = \frac{E}{RC}$$

الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية و لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

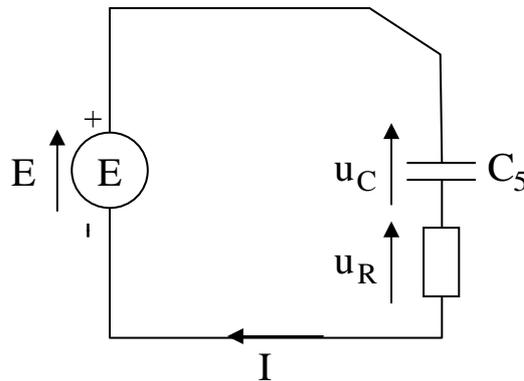
$$\left(\frac{E}{A} - \frac{E}{RC}\right) = 0 \rightarrow \frac{E}{A} = \frac{E}{RC} \rightarrow A = RC$$

- المدلول الفيزيائي :

المقدار A هو ثابت الزمن τ للدارة RC ، يمثل الزمن اللازم لشحن المكثفة بنسبة 67% كما يمثل 20% من زمن إتمام الشحن .

حل التمرين الثالث

1- أ- جهة التيار و تمثيل التوترين u_C ، u_R بأسهم :



ب- التعبير عن u_C و u_R بدلالة q :

- $u_C = \frac{q}{C}$

- $u_R = R i = R \frac{dq}{dt}$

- المعادلة التفاضلية بدلالة q :
حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = E$$

$$R i + \frac{q}{C} = E$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad \rightarrow \quad \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{E}{R}$$

ج- التعبير عن A و α بدلالة E, R, C :

$$\bullet q = A (1 - e^{-\alpha t})$$

$$\bullet \frac{dq}{dt} = A (0 - (-\alpha e^{-\alpha t})) = \alpha A e^{-\alpha t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\alpha A e^{-\alpha t} + \frac{A}{RC} (1 - e^{-\alpha t}) = \frac{E}{R}$$

$$\alpha A e^{-\alpha t} + \frac{A}{RC} - \frac{A}{RC} e^{-\alpha t} = \frac{E}{R}$$

$$A e^{-\alpha t} (\alpha - \frac{1}{RC}) + \frac{A}{RC} = \frac{E}{R}$$

الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية و لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$\bullet \alpha - \frac{1}{RC} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{RC}$$

$$\bullet \frac{A}{RC} = \frac{E}{R} \rightarrow A = EC$$

د- قيمة E :

من العلاقة المتحصل عليها بقانون جمع التوترات يمكن كتابة :

$$E = R i + u_C$$

عند نهاية الشحن تنعدم شدة التيار ($i = 0$) و منه يصبح :

$$E = u_C \rightarrow u_C = E \dots\dots\dots (1)$$

و من معطيات التمرين لدينا عند نهاية الشحن :

$$u_C = 5 \text{ V} \dots\dots\dots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج : $E = 5 \text{ V}$.

هـ- سعة المكثفة :

لدينا :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C u_C^2$$

و عندما تشحن المكثفة كلياً يكون $u_C = E$ (طاقة المكثفة أعظمية) و منه نكتب :

$$E_{(C)0} = \frac{1}{2} C E^2 \rightarrow C = \frac{2E_{(C)0}}{E^2}$$

$$C = \frac{2(5 \cdot 10^{-3})}{(5)^2} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ F} = 400 \mu\text{F}$$

2- أ- عند جعل البادلة في الوضع (2) تتفرغ المكثفة في الناقل الأومي .

ب- المقارنة بين τ في الوضعين (1) ، (2) :

في الوضع (1) يوجد مع المكثفة ناقل أومي وحيد مقاومته R لذا يكون :

$$\tau_1 = RC$$

في الوضع (2) يوجد مع المكثفة ناقلين أوميين موصولين على التسلسل مقاومتهما R ، R' لذا يكون :

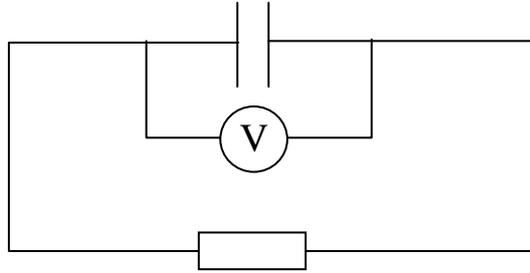
$$\tau_2 = (R + R')C = 2RC$$

نلاحظ :

$$\tau_2 = 2\tau_1 \rightarrow \tau_2 > \tau_1$$

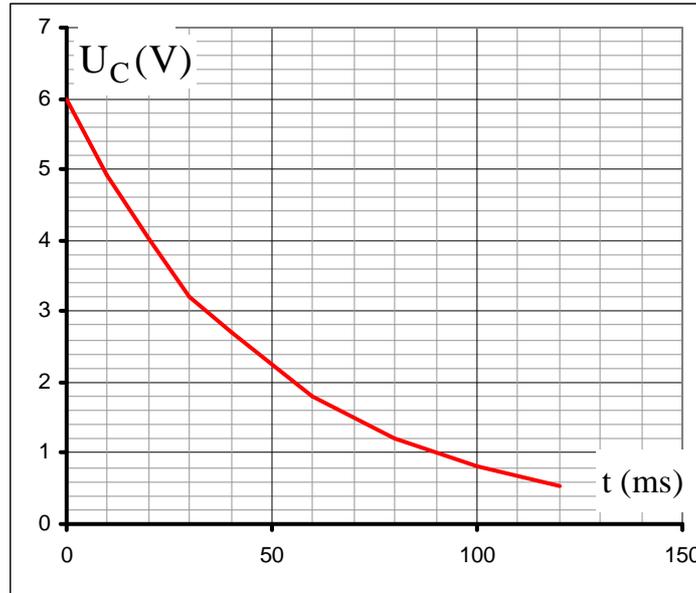
حل التمرين الرابع

1- مخطط دائرة التفريغ :



2- أ- يربط مقياس الفولط على التفرع مع المكثفة كما مبين في الشكل السابق .

ب- المنحنى البياني $u_C = f(t)$:



ج- قيمة τ من البيان :

$$t = \tau \rightarrow u_C = 0.37 E = 0.37 \cdot 6 = 2.22 \text{ V}$$

بالإسقاط نجد : $\tau = 50 \text{ ms}$.

$$\tau = RC \rightarrow C = \frac{\tau}{R} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^3} = 1.25 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 12.5 \mu\text{F}$$

3- أ- المعادلة التفاضلية بدلالة u_C :
حسب قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_C = 0$$

$$R i + u_C = 0$$

$$R C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = 0$$

ب- تعيين A و α :

$$\bullet u_C = A e^{-\alpha t}$$

$$\bullet \frac{du_C}{dt} = -A\alpha e^{-\alpha t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$-A\alpha e^{-\alpha t} + \frac{A}{RC} e^{-\alpha t} = 0 \rightarrow A e^{-\alpha t} \left(-\alpha + \frac{1}{RC} \right) e^{-\alpha t} = 0$$

الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية و لكي تتحقق المساواة يجب أن يكون :

$$-\alpha + \frac{1}{RC} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{RC}$$

و اعتمادا على البيان يمكن كتابة :

$$t = 0 \rightarrow u_C = 6 = E$$

بالتعويض في العبارة $u_C = A e^{-\alpha t}$ يكون :

$$E = A e^{-\alpha(0)} \rightarrow A = E$$

حل التمرين الخامس

1- إيجاد المعادلة التفاضلية :
حسب قانون جمع التوترات :

$$E = u_R + u_C$$

$$E = R i + u_C$$

$$E = R \frac{dq}{dt} + u_C \rightarrow E = R \frac{d(C \cdot u_C)}{dt} + u_C \rightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$$

2- إثبات أن $u_C = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$ هو حل للمعادلة التفاضلية :

لدينا :

$$\bullet u_C = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$\bullet \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{E}{RC} (1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = \frac{E}{RC}$$

$$\frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{E}{RC} - \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{E}{RC} \rightarrow \frac{E}{RC} = \frac{E}{RC}$$

إذن الحل المعطى هو حل للمعادلة التفاضلية .

3- تحديد وحدة $\tau = RC$:

$$[RC] = [R][C]$$

$$[RC] = \frac{[U][Q]}{[I][U]} = \frac{[Q]}{[I]} = \frac{[I][T]}{[I]} \rightarrow [\tau] = [T] = s$$

إذن τ يقدر بالثانية .

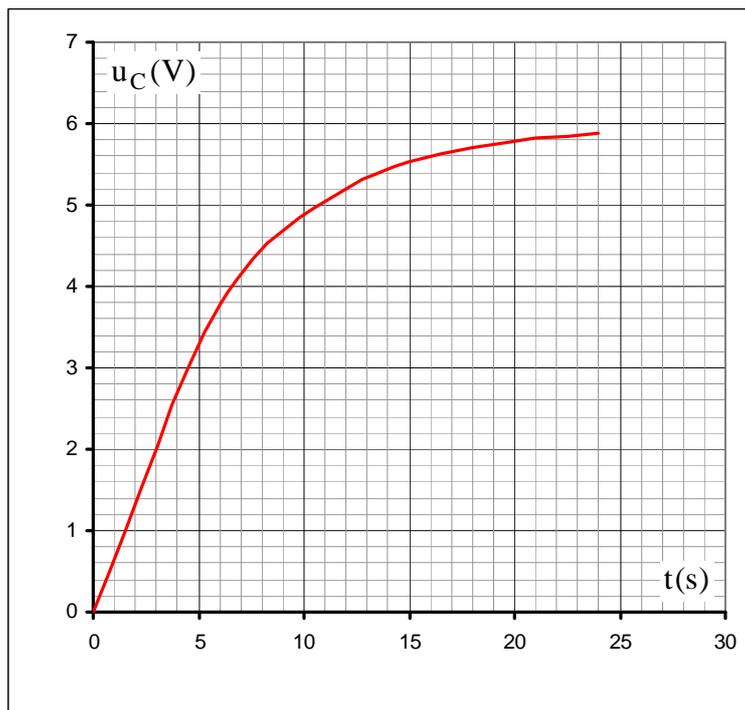
- المدول العلمي : هو المدة اللازمة لشحن المكثفة بنسبة 63% كما يمثل 20% من زمن اتمام الشحن .

- إسمه : ثابت الزمن

4- الجدول :

t (ms)	0	6	12	18	24
u_C (V)	0	3.79	5.19	5.70	5.89

5- البيان $u_C = f(t)$:



$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C u_C)}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$$

لدينا :

$$\bullet u_C = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$\bullet \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

و منه يصبح :

$$i = C \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \rightarrow i = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$t = 0 \rightarrow i = I_0 = \frac{E}{R} = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ A}$$

$$t = \infty \rightarrow i = 0$$

7- عبارة الطاقة المخزنة في المكثفة :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C u_C^2$$

و حيث أن : $u_C = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$ يكون :

$$E_{(C)} = \frac{1}{2} C E^2 (1 - e^{-t/RC})^2$$

قيمتي $E_{(C)}$ عند اللحظتين $t = 0$ ، $t = \infty$:

$$\bullet t \rightarrow \infty \rightarrow E_{(C)} = \frac{1}{2} C E^2 \rightarrow E_{(C)} = \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 10^{-6} (6)^2 = 2.16 \cdot 10^{-5} \text{ J} = 21.6 \mu\text{J}$$

تمنياتي لكم التوفيق و النجاح