سلسلة تمارين الدوال اللوغاريتمية الواردة في البكالوريا

من 2008 إلى 2018 [شعبة :العلوم التجريبية]

#أكاديمية_الرياضيات

جمع و إعداد الأستاذ : بخاخشة خالد

التمرين الأول[باك 2009] [م1] (7ن)

I) h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} h(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و إستنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها .

3) أحسب $h(0)$ و إستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بيانيا .

ب- باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ برهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

جـ- إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحى (C_f) .

هـ- أدرس وضعية المنحى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن المنحى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نفطة فاصلتها محصورة بين 3.3 و 3.4

4) أرسم (C_f) .

5) أحسب مساحة الحيز المحدود بالمنحى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $y=x-1$ ، $x=0$ و $x=1$.

التمرين الثاني[باك 2010] [م1] (10ن)

I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x)=1+\ln(2x-1)$

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x)$.

2) بيَن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكَل جدول تغيراتها .

3) عيَن فاصلة النقطة من $(\mathcal{C}_f)$ التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

4) أ- أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

بـ- استنتج أنه يمكن رسم $(\mathcal{C}_f)$ انطلاقا من $(\mathcal{C})$ منحى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ ثم أرسم $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}_f)$.

II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ : $g(x)=f(x)-x$

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)$ ثم بيَن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) أدرس إتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ ـ أحسب $g(1)$ ثم بيَن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ حلا وحيدا α تحقق أن $2<\alpha<3$.

ب ـ أرسم $(\mathcal{C}_g)$ منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2};5\right[$ في المعلم السابق .

4) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (d) .

5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]1;\alpha[$ فإن : $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

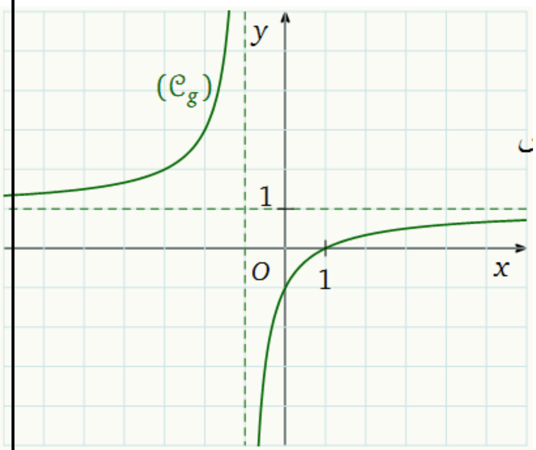
1) عيَن قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$.

2) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

التمرين الثالث [باك 2011] [م1] (7ن)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$

و $(\mathcal{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل) ،



بقراءة بيانية :

أ ـ شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب ـ حل بيانيا ، المتراجحة $g(x)>0$.

جـ ـ عيَن بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسَر النتيجتين هندسيا.

2) أ ـ بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

ب ـ أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها ثمَ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ ـ باستعمال الجزء **I)** السؤال جـ ، عيَن إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب ـ α عدد حقيقي . بيَن أن الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

جـ ـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\frac{2}{x+1}$ ثم عيَن دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$

التمرين الرابع [باك 2012] [م2] (7ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ ثم فسَر النتيجة هندسيا .

ب ـ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

إستنتج اتجاه تغيَر الدالة f ، ثم شكل جدول تغيَراتها .

3) أ ـ بيّن المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

ب ـ أدرس وضع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (Δ) .

4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5 < \alpha < -3.4$ و $-1.1 < \beta < -1$.

5) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (Δ) .

6) أ ـ نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .

ب ـ بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها .

7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

بين أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

التمرين الخامس [باك 2013] [م2] (7ن)

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$.

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) إستنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x) = x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(وحدة الطول $2cm$)

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب ـ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب ـ أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جـ ـ بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

3) أ ـ بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب ـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ ـ أحسب x_0.

ب ـ أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثمّ المنحنى (C_f).

جـ ـ عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متمايزين.

التمرين السادس [باك 2014] [م1] (6ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$، فسر النتيجتين هندسيا.

ب- أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.$\mathbb{R}$

2) أ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

ب- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

3) أنشئ (T) و (C_f).

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}$.

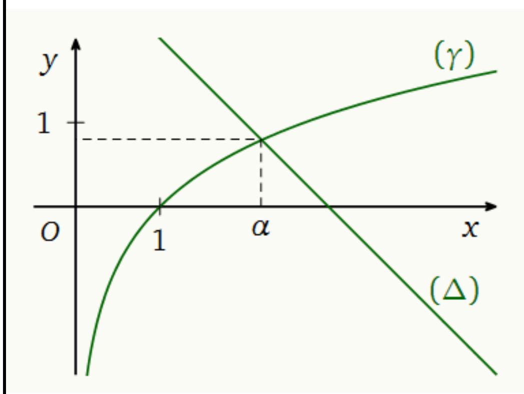
و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ- بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$، ماذا تستنتج ؟

ب- أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).

جـ- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

التمرين السابع [باك 2015] [م2] (7ن)



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) (γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$ ؛ α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ).

1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.

2) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$.

إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3) تحقق أن : $2,2<\alpha<2,3$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) أحسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) بين أن: $f(\alpha)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$، ثم إستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل؛ ثم أنشئ (C_f) على المجال $\left]0;e^2\right]$.

III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و التي تحقق: $F(1)=-3$.

1) بين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

2) بين أن $x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ، ثم إستنتج عبارة الدالة F.

التمرين الثامن[باك 2016][م1] (7ن)

I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$. (العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث $-0,34<\alpha<-0,33$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x على المجال $]-1;+\infty[$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{e}{x+1}-\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بيّن أن $\lim_{x\to-1}f(x)=-\infty$ و أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. فسّر النتيجتين بيانيا.

ب- بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$

جـ- أدرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

د - أرسم المنحنى (C_f). (نقبل أن $f(\alpha)=3,16$)

2) أ- بيّن أنّ الدالة $x\mapsto\frac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$

ب- أحسب مساحة الحيّز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.

3) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1;1[$ بـ : $k(x)=f(-|x|)$ ، (C_k) تمثيلها لبياني في المعلم السابق.

أ- بيّن أن الدالة k زوجية .

ب- بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أرسمه .(دون دراسة تغيرات الدالة k).

جـ- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $k(x)=m$.

التمرين التاسع[باك 2017][م1] (7ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على D حيث $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانيا .

2) أحسب النهايات التالية : $\lim_{\substack{> \\ x\to1}}f(x)$ ، $\lim_{\substack{< \\ x\to-1}}f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

استنتج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور التراتيب .

3) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

إستنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$

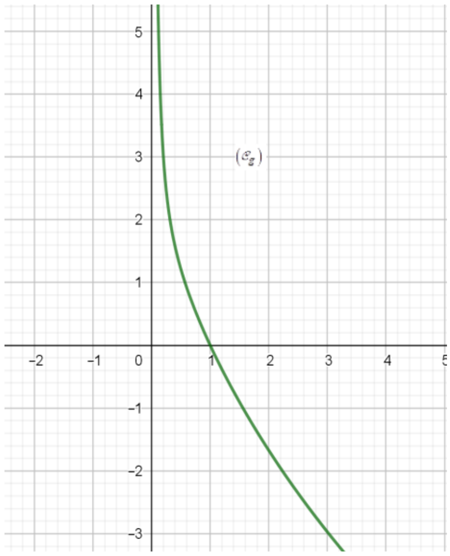
5) أ- بيّن المستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=\frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ثم أدرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم (Δ) .

6) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (Δ) .

7) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

التمرين العاشر [باك 2018] [م2] (7ن)

I) g الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$



$(\mathscr{C}_g)$ المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبيّن في الشكل المقابل :

ـ أحسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$$

و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ وبيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا.

2) أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$.

بـ ـ استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكّل جدول تغيراتها .

3) بيّن أن $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل ، ثم أرسم المماس (T) و المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

4) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x)=e^2x-me$ حلين متمايزين .

III) n عدد طبيعي حيث $n>1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=n$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n>1$: $I_n=\ln(1+n\ln n)$.

2) أدرس إتجاه تغير المتتالية (I_n) .