على كل مترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقط)

ليكن α عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;1[$

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \dfrac{(1+\alpha)U_n - \alpha}{U_n}$

1) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $U_n \geq 1$.

ب- بيَن أن المتتالية (U_n) متناقصة ،ثم استنتج أن (U_n) متقاربة واحسب نهايتها .

2) لتكن (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n - \alpha}$

أ- بيَن أن (V_n) متتالية هندسية أساسها α

ب- اكتب عبارة V_n بدلالة n و α واستنتج عبارة U_n بدلالة n و α.

جـ - تحقق من نتيجة السؤال 1) جـ) وذلك بحساب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

التمرين الثاني:(05 نقط)

I) ليكن $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$.

1) بيّن أنه ، من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

2) تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ ، ثم استنتج جذرا آخر له .

3) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

II) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس$(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A = -1$ ، $z_B = 1+i$ و $z_C = \overline{z_B}$ على الترتيب .

1)التحويل النقطيS،يرفق بكل نقطة$M(z)$من المستوي النقطة$M'(z')$حيث:$z' = (1+i)z + i$

أ - ما طبيعة التحويل S ؟ عيّن عناصره المميّزة .

ب- لتكن M نقطة تختلف عن A . ما طبيعة المثلث AMM' ؟

2) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A ، لاحقتها العدد المركب z_n .

نضع : $M_0 = O$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1} = S(M_n)$.

أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n = (1+i)^n - 1$.

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقط O ، A و M_n في استقامية .

التمرين الثالث:(04 نقط)

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 3x-8y=5$.

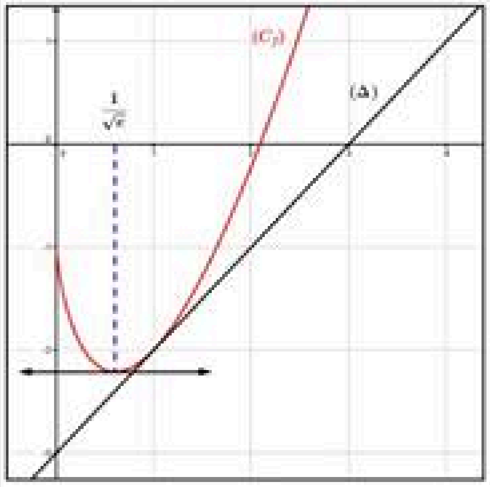
2) n ، x وَ y أعداد صحيحة حيث : $n=3x+2$ وَ $n=8y+7$.

أ)بيّن أنّ الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) .ب)نعتبر الجملة : $(S):\begin{cases} n\equiv 2[3] \\ n\equiv 7[8] \end{cases}$.بيّن أنّ : $n\equiv 23[24]$

3) m عدد طبيعي : أ)عيّن باقي قسمة 2^{2m} على 3 ، وَ باقي قسمة 7^{2m} على 8 .

ب)تحقق أنّ العدد 1439 حل للجملة (S) . ج)ما هو باقي قسمة : 1439^{2018} على 24 ؟ .

التمرين الرابع:(07 نقط)



I: g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=2x\ln x-x-1$ المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني ل g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

المنحنى (C) يقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها $\frac{1}{\sqrt{e}}$ و (Δ) هو المماس لـ (C) في النقطة التي فاصلتها 1

1) بقراءة بيانية:أ)حدد $g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ، $g(1)$ و $g'(1)$ ، ثم عين معادلة للمماس(Δ). ب) شكل جدول تغيرات g .

2) أ) علل وجود عدد حقيقي α حيث: $2<\alpha<2{,}1$ و $g(\alpha)=0$ ،ب)إستنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x^2(\ln x-1)-x \ ;x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) بين أن الدالة f مستمرة عند الصفر من اليمين

ب) بين أن $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}=-1$ ، إستنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق من اليمين، ثم أكتب معادلة نصف المماس(T) للمنحنى (C_f) عند النقطة O من اليمين .

2) أ)جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.ب) بين أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=g(x)$ وشكل جدول تغيرات f

3) بين أن $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)$ ، ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

4) ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته $y=-x$

أ) أدرس الوضعية النسبية لـ (Δ) و (C_f) . ب) أنشئ (Δ) و (C_f) . نأخذ: $f(3{,}55)\simeq 0$

5) F الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $F(x)=\frac{x^3}{9}(3\ln x-4)$

أ) أحسب $F'(x)$ ، ثم إستنتج دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto x+f(x)$ على $]0;+\infty[$.

ب)جد مساحة حيز المحدد بـ(C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتهما: $x=1$ و $x=e$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(05 نقط)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z+3)\left[(z+2-2i)^2-(2-i)^2\right]=0$.

2. في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C حيث $z_A=-3$ ، $z_B=i$ و $z_C=-4+3i$.

• عين زاوية الدوران الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C. ماذا تستنتج

3. أ)عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1);(C,-1)\}$ ثم أكتب z_G على الشكل الأسي

ب) عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون $\left(\dfrac{z_G}{\sqrt{2}}\right)^n$ عددا تخيليا صرفا جزءه التخيلي موجب.

ج) عين وأنشئ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $2MA^2+MB^2-MC^2=-2$.

د) عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $2MA^2-MB^2-MC^2-IB^2=0$

حيث I منتصف قطعة المستقيم $[BC]$.

التمرين الثاني : (04 نقط)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$ و $u_0=\dfrac{1}{8}$

1) أ- أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة 8cm)، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحني (C) الممثل للدالة f المعرفة على $[0;2]$ بـ : $f(x)=x(2-x)$

2)أ-باستعمال الرسم السابق،مثل على حامل محور الفواصل،دون حساب كلا من u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3

ب - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

3) أ- برهن بالتراجع أنه لكل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة استنتج أن (u_n) متقاربة ، ما هي نهايتها ؟

4) 3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(1-u_n)$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

ب-إستنتج عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5) أ) أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n=(1-u_0)(1-u_1)........(1-u_n)$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

التمرين الثالث: (04نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$،

تعطى النقط $A(1,1,-2)$ ، $B(1,2,-2)$ ، $C(0,1,1)$.

1) بيَن أنَ النقطA، B، C تعرَف مستويا P.

2) تحقق أنَ الشعاع $\vec{n}=3\vec{i}+\vec{j}$ ناظمي للمستوي P ، ثمّ استنتج معادلة ديكارتيّة لـ P.

3) ليكن المستوي Q المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم (AC).

ا) أعط معادلة ديكارتيّة للمستوي Q.

ب) برهن أنَ P و Q متعامدان وفق المستقيم (AB).

4) S_m مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث: $x^2+y^2+z^2-2x-2my+4z+4=0$ ؛ (m وسيط حقيقي)

ا) برهن أنه مهما كان m ، فإنَ S_m هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_m ونصف قطرها R_m .

ب) بيَن أنه عندما يتغيَر m في $\mathbb{R}$ فإنَ مجموعة النقط I_m هي المستقيم (AB).

التمرين الرابع : (07 نقطة)

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. وحدة الطول هي 2cm

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)$ و (C_g) تمثيلها البياني

1) بيَن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ وفسر النتيجة الأخيرة بيانيا.

2) بيَن أن g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها. ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$ و (C_f) تمثيلها البياني

1- أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2- أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3- أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$.

4- أرسم (T) و (C_f)

5- أ/ بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن: $g(x)+2g'(x)+g''(x)=2e^{-x}$

ب/ استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

III- لتكن الدالة k المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $k(x)=f(\ln x)$ و (C_k) تمثيلها البياني

1- أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} k(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ وفسر النتيجتين بيانيا.

2- أحسب $k'(x)$ ثم بين أن $k'(x)=\dfrac{1}{x^2}g(\ln x)$.

3- أدرس اشارة $k'(x)$ (استعمال اتجاه تغير كلا من g والدالة ln)، ثم شكل جدول تغيرات k

4- أرسم المنحنى (C_k) في المعلم السابق.