الموضوع الثاني

التمرين الأول:(05 نقط)

n عدد طبيعي غير معدوم . نضع : $L_n = 9C_{n+1}^2 + 27C_{n+1}^3 + 81C_{n+1}^4 + ... + 3^{n+1}C_{n+1}^{n+1}$

1/ بيّن أن : $L_n = 4^{n+1} - 3n - 4$

2/ نضع : $S_n = L_1 + L_2 + ... + L_n$ ، احسب S_n بدلالة n

3-أ)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي ن بواقي قسمة 4^n على 7

ب)عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حتى يكون $L_n \equiv 0[7]$

4) نعتبر A مجموعة بواقي قسمة 4^n على 7

أ) كم عددا مؤلفا من 10 أرقام يمكن تشكيله من عناصر A ؟.

ب) كم عددا مؤلفا من 3 أرقام مختلفة يمكن تشكيله من عناصر A محصورا بين 200 و 400 ؟.

التمرين الثاني:(04 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، ليكن (P) مستو معادلته :

$x - 3y + z - 3 = 0$ و النقط : $A(2;-1;2)$ ، $B(2;0;1)$ ، $C(0;-3;-2)$ ، $S(-1;1;2)$

1- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P).

2- (Δ) مستقيم ذو تمثيل وسيطي : $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$

- أثبت أن المستقيمين (Δ) و(AC) منطبقان.

أ-أثبت أن المستوي (P) والمستقيم (Δ) منفصلان.

ب-أحسب $\overline{AB}.\overline{BC}$ ، ثم احسب مساحة المثلث ABC.

جـ-أكتب معادلة المستوي (Q) الذي يشمل النقطة B و يحوي المستقيم (Δ).

3- أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) يشمل النقطة S و يعامد المستوي (Q)

ب) تحقق أن النقطة B مسقط عمودي للنقطة S على المستوي (Q).

جـ) أحسب حجم رباعي الوجوه $SABC$.

4- أ) بين أن معادلة المستوي (SAB) هي: $2x + 3y + 3z - 7 = 0$

ب) احسب المسافة بين النقطة C و المستوي (SAB)،ثم استنتج مساحة المثلث SAB.

التمرين الثالث:(04 نقط)

نعتبر العددين a وb حيث : $a = \sqrt{3} + i$ و $b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$

1-أ) تحقق أن : $b = (1+i)a$: ثم استنتج أن: $|b| = 2\sqrt{2}$ و ان $\arg(b) = \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

ب) إستنتج أن مما سبق: $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.نعتبر النقطتين A و B واللتين لاحقتاهما a و b على الترتيب والنقطة C ذات اللاحقة c حيث $c = -1+i\sqrt{3}$.

أ- تحقق من أن : $c = ai$ واستنتج أن: $OA = OC$ و أن $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

ب-بيَن أن B هي صورة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$. إستنتج أن الرباعي OABC مربعا

التمرين الرابع:(07 نقط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$.

1) أحسب نهايات الدالة g عند 0 وَ عند $+\infty$.

2) أدرس إتجاه تغيَر الدالة g وَ شكل جدول تغيَراتها .

3) بين أنَ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 1 وَ 2 .إستنتج إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$ ، (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة : $\|\vec{i}\| = 2cm$ وَ $\|\vec{j}\| = 4cm$

1) أحسب نهايات الدالة f عند 0 وَ عند $+\infty$.

2) بيَن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$.

3) إستنتج إشارة $f(x)'$ ، ثم شكل جدول تغيَرات الدالة f .

4) بيَن أنَ : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(\alpha+1)}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.ثم أرسم المنحني (C) .

III) نريد إيجاد حصرا للمساحة A لمجموعة النقط $M(x;y)$ حيث : $\begin{cases} 1 \le x \le \frac{3}{2} \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$.

1) بيَن أنه من أجل كل $x \ge 1$: $\frac{\ln x}{x^2} \le f(x) \le \frac{\ln x}{x}$.

2) أ) أحسب العدد I حيث : $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$.

ب) باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب العدد J حيث : $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

ج) إستنتج حصرا للمساحة A .