الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

التحضير الجيّد لبكالوريا 2018 **سلسلة المواضيع التّجريبية للتدرّب**

خاص بشعبتي الرّياضي و التقني رياضي

الموضوع التجريبي رقم 02

التمرين الأول : (05 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نفرض الأعداد :

$a_n = 4\times 10^n - 1$ ، $b_n = 2\times 10^n - 1$ ، $c_n = 2\times 10^n + 1$.

1) أ) احسب a_n ، b_n وَ c_n من أجل n يساوي 1 ، 2 وَ 3 .

ب) ما هو عدد أرقام العددين a_n وَ c_n ؟

✓ بيّن أنّ العددين a_n وَ c_n يقبلان القسمة على 3 .

ج) بيّن أنّ العدد b_3 أوّلي .

د) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $b_n \times c_n = a_{2n}$.

✓ إستنتج تحليلا إلى عوامل أوّلية للعدد a_6 .

ه) بيّن أنّ : $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(c_n;2)$. ثمّ إستنتج أنّ b_n وَ c_n أوّليان فيما بينهما .

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $b_3x + c_3y = 1......(1)$.

أ) برّر أنّ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلاً .

ب) طبّق خوارزمية إقليدس على b_3 وَ c_3 لإيجاد حلا خاصا للمعادلة (1) .

ج) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ (الوحدة $6cm$) . نعتبر التحويل f للمستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' ، حيث : $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}$.

و لتكن النقطة M_0 ذات اللاحقة z_0 ، حيث : $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

وَ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1} = f(M_n)$ ، وَ نسمي z_n لاحقة النقطة M_n .

1) عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل f ، ثمّ علّم النقط : M_0 ، M_1 ، M_2 ، M_3 .

2) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$.

3) n وَ p عددان طبيعيان . برهن أنّ النقطتان M_n وَ M_p متطابقتان إذا وافقط إذا كان $(n-p)$ مضاعفا لـ 12 .

4) أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $12x - 5y = 3$ ، علما أنّ : $(4;9)$ حلاً خاصا لها .

ب) إستنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n ، بحيث النقطة M_n تنتمي إلى نصف المستقيم $[ox)$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعرّف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) كما يلي : $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$.

1) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون: $u_{n+1} \leq 0,95u_n$ ، إذا وافقط إذا كان: $(1+\frac{1}{n})^{10} \leq 1,9$.

2) نعتبر الدالة f المعرّفة على $[1;+\infty[$ بـ : $f(x) = (1+\frac{1}{x})^{10}$.

أ) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، ثم أحسب نهايتها عند $+\infty$.

ب) بيّن أنّه يوجد عدد وحيد α من المجال $[1;+\infty[$ بحيث : $f(\alpha) = 1,9$.

ج) عيّن العدد الطبيعي n_0 ، بحيث : $n_0 - 1 < \alpha < n_0$.

د) برهن أنّه من أجل كل $n \geq 16$ ، يكون : $(1+\frac{1}{n})^{10} \leq 1,9$.

3) أ) عيّن إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) إبتداءا من الرتبة 16 .

ب) ماذا نستنتج بالنسبة لهذه المتتالية ؟

4) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كل $n \geq 16$: $0 \leq u_n \leq (0,95)^{n-16} \times u_{16}$. ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الأوّل : نعتبر الدالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$.

1) أحسب كلا من : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

3) إستنتج إشارة $g(x)$ من أجل $x \in]0;+\infty[$.

4) بيّن أنّه من أجل كل x من $[2;3]$ يكون : $g(x) < \frac{1}{2}$.

الجزء الثاني : لتكن الدّالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x) = x\ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}; (x>0) \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$.

(C) هو المنحني الممثّل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln(\frac{x+2}{x})$. ثم بيّن أنّ الدالة f مستمرة عند 0 .

2) هل الدالة f تقبل الإشتقاق عند 0 ؟ . أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة المحصّل عليها .

3) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، تحقّق أنّ : $f'(x) = g(x)$.

4) أ) علما أنّ : $\lim\limits_{h\to0} \frac{\ln(h+1)}{h} = 1$ ، برهن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(\frac{x+2}{x}) = 2$.

ب) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ج) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

5) شكّل جدول تغيّرات الدالة f ، ثمّ أرسم كلا من (Δ) وَ (C) .

التمرين الخامس : (05 نقاط)

زهرة نرد مكعبة الشكل وجوهها مرقّمة بالأرقام من 1 إلى 6 ، p_k هو إحتمال الحصول على الرقم k ،($1 \leq k \leq 6$) .
هذه الزّهرة مغشوشة بحيث :

- ✓ الأعداد : p_1 ، p_2 ، p_3 ، p_4 ، p_5 ، p_6 تشكّل بهذا الترتيب متتالية حسابية أساسها r .
- ✓ وَ الأعداد : p_1 ، p_2 ، p_4 تشكّل بهذا الترتيب متتالية هندسية أساسها q .

1) برهن أنّ : $p_k = \dfrac{k}{21}$ ، من أجل : $1 \leq k \leq 6$.

2) نرمي هذه الزّهرة مرّة واحدة ، وَ نعتبر الحوادث التالية :

- ❖ A : " العدد المحصّل عليه زوجي " .
- ❖ B : " العدد المحصّل عليه أكبر من أو يساوي 3 " .
- ❖ C : " العدد المحصّل عليه 3 أو 4 " .

أ) أحسب إحتمال كل حادثة .

ب) أحسب إحتمال الحصول على عدد أكبر من أو يساوي 3 ، علماً أنّه زوجي . (خاص بشعبة الرّياضي)

ج) الحادثتان : A وَ B هل هما مستقلتان ؟ . الحادثتان : A وَ C هل هما مستقلتان ؟ .

3) نستعمل الآن هذه الزّهرة لإحواء اللّعبة التالية :

لدينا صندوق U_1 يحتوي على كرة واحدة بيضاء وَ 3 كرات سوداء ، و صندوق U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين وَ كرة سوداء واحدة . يأتي لاعب وَ يرمي الزّهرة :

- ✓ إذا حصل على رقم زوجي سحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق U_1 .
- ✓ إذا حصل على رقم فردي سحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق U_2 .

اللاّعب يعتبر رابحا إذا سحب كرة بيضاء ، و نسمي G الحادثة : " اللاّعب رابح " .

أ) عيّن إحتمالِ الحادثة $G \cap A$ ، ثمّ إحتمال الحادثة G .

ب) علما أنّ اللاّعب رابح ، عيّن إحتمال أن يكون حصل على عدد زوجي . (خاص بشعبة الرّياضي) .

خاص بشعبتي الرياضي وَ التقني رياضي

تصحيح الموضوع رقم 02

تصحيح التمرين الأول :

1) أ) $\begin{cases} a_1 = 39 \\ b_1 = 19 \\ c_1 = 21 \end{cases}$ ، $\begin{cases} a_2 = 399 \\ b_2 = 199 \\ c_2 = 201 \end{cases}$ ، $\begin{cases} a_3 = 3999 \\ b_3 = 1999 \\ c_3 = 2001 \end{cases}$. ب) عدد أرقام a_n وَ b_n هو : $n+1$.

✓ بما أنّ : $10 \equiv 1[3]$ إذن : $10^n \equiv 1[3]$ ، ومنه : $4\times 10^n \equiv 4[3]$ ، أي : $4\times 10^n \equiv 1[3]$ ، أي : $4\times 10^n - 1 \equiv 0[3]$ ، ومنه : $a_n \equiv 0[3]$. وَ أيضا بنفس الطريقة : $c_n \equiv 0[3]$.

ج) $b_3 = 1999$ ، $\sqrt{1999} \approx 44,71$. b_3 لا يقبل القسمة على كل الأعداد الأوّلية الأصغر من $44,71$ ، إذن هو أوّلي .

د) $b_n \times c_n = (2\times 10^n - 1)(2\times 10^n + 1)$ ، أي : $b_n \times c_n = (2\times 10^n)^2 - 1$ ، أي : $b_n \times c_n = 4\times 10^{2n} - 1$ ، و منه : $b_n \times c_n = a_{2n}$ ، و هو المطلوب .

✓ إستنتاج تحليلا للعدد a_6 : $a_6 = b_3 \times c_3$ ، أي : $a_6 = 1999\times 2001$ ، و منه : $a_6 = 1999\times 3\times 23\times 29$.

ه) نعلم أنّ : $PGCD(a;b) = PGCD(a;a-b)$ ، إذن : $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(c_n;c_n - b_n)$ ، أي : $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(c_n;2)$ ، لكن العدد c_n فردي $(c_n = 2\times 10^n + 1)$ ، إذن : $PGCD(c_n;2) = 1$ ، و منه : $PGCD(b_n;c_n) = 1$. و منه فإنّ : b_n وَ c_n أوّليان فيما بينهما .

2) لدينا المعادلة : $b_3 x + c_3 y = 1......(1)$:

أ) بما أنّ b_3 وَ c_3 أوّليان فيما بينهما ، إذن حسب مبرهنة بيزو المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا .

ب) لدينا : $\begin{cases} 2001 = 1999\times 1 + 2 \\ 1999 = 999\times 2 + 1 \end{cases}$ ، إذن : $1999 - 2\times 999 = 1$ ، أي : $1999 - (2001 - 1999)\times 999 = 1$ ، أي : $1999 - 999\times 2001 + 999\times 1999 = 1$ ، و منه : $1000\times 1999 - 999\times 2001 = 1$.

إذن : $(1000;-999)$ حل خاص للمعادلة (1) .

ج) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) : $1999x + 2001y = 1$ ، و لدينا : $1999(1000) + 2001(-999) = 1$ ، بالطرح نجد : $1999(x - 1000) + 2001(y + 999) = 0$ ، $1999(x - 1000) = -2001(y + 999)$ ،

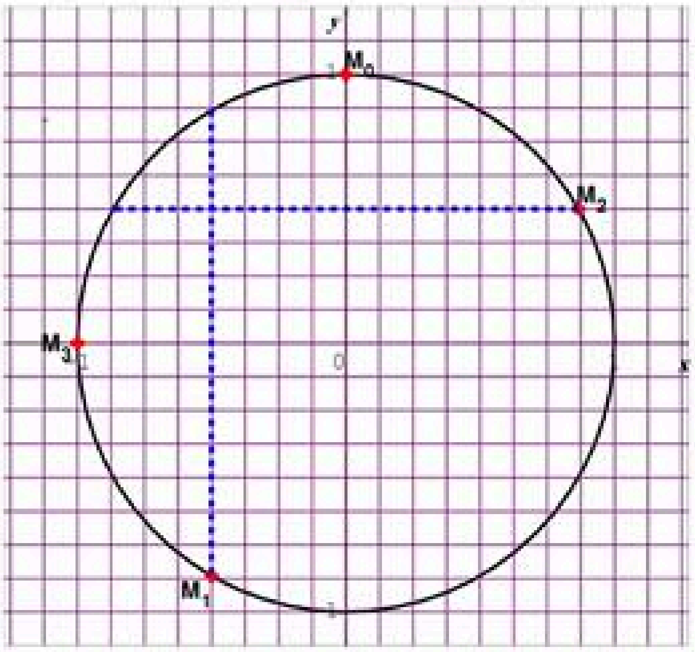
حسب غـــوص : $\begin{cases} x = 2001k + 1000 \\ y = -1999k - 999 \end{cases}$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

تصحيح التمرين الثاني :

1) طبيعة التحويل f : $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}} \Leftarrow f$ هو دوران مركزه O وَ زاويته $\dfrac{5\pi}{6}$.

2) البرهان من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + n\frac{5\pi}{6})}$ ، لنستعمل البرهان بالتراجع :

✓ نتحقّق من أجل $n = 0$: $z_0 = e^{i(\frac{\pi}{2} + n\times\frac{5\pi}{6})}$ ، أي : $z_0 = e^{i(\frac{\pi}{2})}$ ، (محققة) .



✓ نفرض صحة: $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$.

✓ نبرهن صحة: $z_{n+1} = e^{i(\frac{\pi}{2}+(n+1)\frac{5\pi}{6})}$.

البرهان : نعلم أنّ: $z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}} z_n$ ، **وَ لدينا فرضا :** $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$

، **أي :** $z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ، **أي :**

$z_{n+1} = e^{i\left[\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6}\right]}$ ، **أي :** $z_{n+1} = e^{i\left[\frac{\pi}{2}+(n+1)\frac{5\pi}{6}\right]}$ ، **إذن : من أجل**

كل عدد طبيعي n : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$.

3) M_n وَ M_p **متطابقتان معناه أنّ :** $z_n = z_p$ ، **أي :** $e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{2}+p\frac{5\pi}{6})}$ ، **و هذا معناه أنّ :**

$\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2}+p\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ، **أي :** $n\frac{5\pi}{6} = p\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ، **أي :** $n\times 5\pi = p\times 5\pi + 12k\pi$ ، **أي :**
$5n = 5p+12k$ ، **أي :** $5n-5p = 12k$ ، **ومنه :** $5(n-p) = 12k$. $12 / 5(n-p)$ وَ 12 **أوّلي مع** 5 ،
حسب غوص : 12 **يقسم** $(n-p)$ ، **أي أنّ :** $(n-p)$ **مضاعف لـ** 12 .
4) أ) **حل في** $\mathbb{Z}^2$ **المعادلة** $12x-5y=3$: $12(4)-5(9)=3$ ، **أي :** $12x-5y=3-12(4)-5(9)=3$ ، **أي :** $12(x-4)=5(y-9)$ ،

حسب غوص نستنتج أنّ : $\begin{cases} x = 5k+4 \\ y = 5k+9 \end{cases}$ **حيث :** $k \in \mathbb{Z}$.

ب) $M_n \in [ox)$ **معناه أنّ :** z_n **حقيقي موجب ، أي :** $\arg(z_n) = 0+2k\pi$ ، **أي :** $\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6} = 2k\pi$ ، **أي :**
$3\pi+5n\pi = 12k\pi$ ، **أي :** $3+5n = 12k$ ، **أي :** $12k-5n=3$ ، **إذن :** $n = y = 12k+9$. $k\in\mathbb{N}$.

تصحيح التمرين الثالث :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n **المتتالية** (u_n) **معرّفة كما يلي :** $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$.

1) **البرهان : لدينا** $u_{n+1} \le 0{,}95 u_n$ **معناه أنّ :** $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le 0{,}95$ ، **لأنّ :** $(u_n>0)$ وَ $(u_{n+1}>0)$ ، **أي :** $\dfrac{\frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{10}}{2^n}} \le 0{,}95$

أي : $\frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^{10}} \le 0{,}95$ ، **أي :** $(1+\frac{1}{n})^{10} \times \frac{1}{2} \le 0{,}95$ ، **ومنه :** $(1+\frac{1}{n})^{10} \le 1{,}9$.

2) f **الدالة المعرّفة على** $[1;+\infty[$ **بـ :** $f(x) = (1+\frac{1}{x})^{10}$:

أ) **إتجاه التغيّر :** $f'(x) = 10\times(1+\frac{1}{x})^9 \times(-\frac{1}{x^2})$ ، **نلاحظ أنّ :** $f'(x)<0$ **على** $[1;+\infty[$ ، **و منه الدالة** f **متناقصة.**

x	1	$+\infty$
$f(x)$	1024 ↘	1

✓ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

ب) الدالة f مستمرة و رتيبة على $[1;+\infty[$ ، وَ صورة المجال $[1;+\infty[$ هي $]1;1024]$ ، وَ $1,9\in]1;1024]$ ، ومنه المعادلة $f(\alpha)=1,9$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث : $\alpha\in[1;+\infty[$.

ج) بالحاسبة نجد : $15<\alpha<16$ ، أي : $(n_0=16)$.

د) البرهان : من أجل $n\ge 16$ يكون : $f(n)\le f(16)$ (لأنّ الدالة f متناقصة) ، أي : $(1+\frac{1}{n})^{10}\le f(16)$ ،

و لدينا : $f(16)<1,9$ ، و منه : $(1+\frac{1}{n})^{10}\le 1,9$.

3) أ) من أجل $n\ge 16$ لدينا : $(1+\frac{1}{n})^{10}\le 1,9$ معناه أنّ : $u_{n+1}\le 0,95u_n$ أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le 0,95<1$ ، و منه فإنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

ب) بما أنّ المتتالية (u_n) متناقصة وَ محدودة من الأسفل بـ 0 لأنّ : $(u_n>0)$ ، ومنه فإنها متقاربة.

4) إثبات أنّ : $0\le u_n\le (0,95)^{n-16}\times u_{16}$ ، من أجل $n\ge 16$: (نستعمل البرهان بالتراجع).

✓ نتحقق من أجل $n=16$: $0\le u_{16}\le (0,95)^{16-16}\times u_{16}$ ، ومنه : $0\le u_{16}\le u_{16}$ ، محققة.

✓ نفرض صحة : $0\le u_n\le (0,95)^{n-16}\times u_{16}$.

✓ و نثبت صحة : $0\le u_{n+1}\le (0,95)^{n+1-16}\times u_{16}$ ، أي : $0\le u_{n+1}\le (0,95)^{n-15}\times u_{16}$.

البرهان : لدينا فرضا : $0\le u_n\le (0,95)^{n-16}\times u_{16}$ ، أي : $0\le 0,95\times u_n\le 0,95\times(0,95)^{n-16}\times u_{16}$ ، أي : $0\le 0,95u_n\le (0,95)^{n-15}\times u_{16}$ ، وَ لدينا : $u_{n+1}\le 0,95u_n$ ، ومنه : $0\le u_{n+1}\le (0,95)^{n-15}\times u_{16}$.

إذن من أجل كل $n\ge 16$: $0\le u_n\le (0,95)^{n-16}\times u_{16}$.

❖ إستنتاج نهاية (u_n) : $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=0$ ، لأنّ : $\lim_{n\to+\infty}(0,95)^{n-16}=0$ (حسب خاصية النهايات بالحصر).

تصحيح التمرين الرابع :

الجزء الأوّل : g الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}$.

1) حساب النهايات : $\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\frac{1}{4}$ ، لأنّ : $\lim_{x\to+\infty}\ln(\frac{x+2}{x})=0$ وَ $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+2}=0$.

2) إتجاه التغيّر : $g'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{(x+2)^2}$ ، أي : $g'(x)=\frac{x-x-2}{x(x+2)}+\frac{2}{(x+2)^2}$ ، أي :

$g'(x)=\frac{-2(x+2)}{x(x+2)^2}+\frac{2x}{x(x+2)^2}$ ، ومنه : $g'(x)=\frac{-4}{x(x+2)^2}$ ، أي : $g'(x)<0$.

وَ منه نقول أنّ الدالة g متناقصة على $]0;+\infty[$.

x	0	$-\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{4}$

3) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x)\in\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ ، و منه : $g(x)>0$.

4) من أجل : $2\le x\le 3$ ، أي : $g(3)\le g(x)\le g(2)$ ، أي :

$0,36 \leq g(x) \leq 0,44$ ، و منه : $g(x) < \frac{1}{2}$.

الجزء الثاني : لتكن الدالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ : $\begin{cases} f(x) = x\ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2};(x>0) \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$.

1) **حساب النهاية :**

✓ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x\ln(\frac{x+2}{x}) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \left[x\ln(x+2) - x\ln(x)\right] = 0$.

✓ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \frac{1}{2}$ ، و لدينا : $f(0) = \frac{1}{2}$ ، ومنه الدالة f مستمرة عند 0 .

2) **دراسة قابلية إشتقاق الدالة f عند** 0 ، أي نحسب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x\ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x}$ ، أي : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x\left[\ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{1}{4}\right]}{x}$ ، أي : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left[\ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{1}{4}\right] = -\infty$.

و منه الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند 0 .

❖ إذن المنحني (C) يقبل نصف مماس يوازي محور التراتيب عند النقطة ذات الإحداثيات : $(0;\frac{1}{2})$.

3) بعد حساب $f'(x)$ ، سنلاحظ أنّ : $f'(x) = g(x)$. وَ بما أنّ $g(x) > 0$ على $]0;+\infty[$ ،

إذن نقول أنّ الدالة f متزايدة على $]0;+\infty[$.

4) أ) نعلم أنّ : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(h+1)}{h} = 1$ ، تبيين أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(\frac{x+2}{x}) = 2$.

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(\frac{x+2}{x}) = \lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{2}{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} 2\times\frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{2}{x}}$$ ،

بوضع : $\frac{2}{x} = t$ ، أي : $\begin{cases} x \to +\infty \\ t \to 0 \end{cases}$ ، و منه نجد : $\lim\limits_{t\to 0} 2\times\frac{\ln(1+t)}{t} = 2$ ، لأن : $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$.

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(\frac{x+2}{x}) = 2$ ، و هو المطلوب .

ب) **إستنتاج النهاية :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right] = +\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(\frac{x+2}{x}) = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{4} = +\infty \end{cases}$.

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - y\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln(\frac{x+2}{x}) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{5}{2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln(\frac{x+2}{x}) - 2\right] = 0$ ،

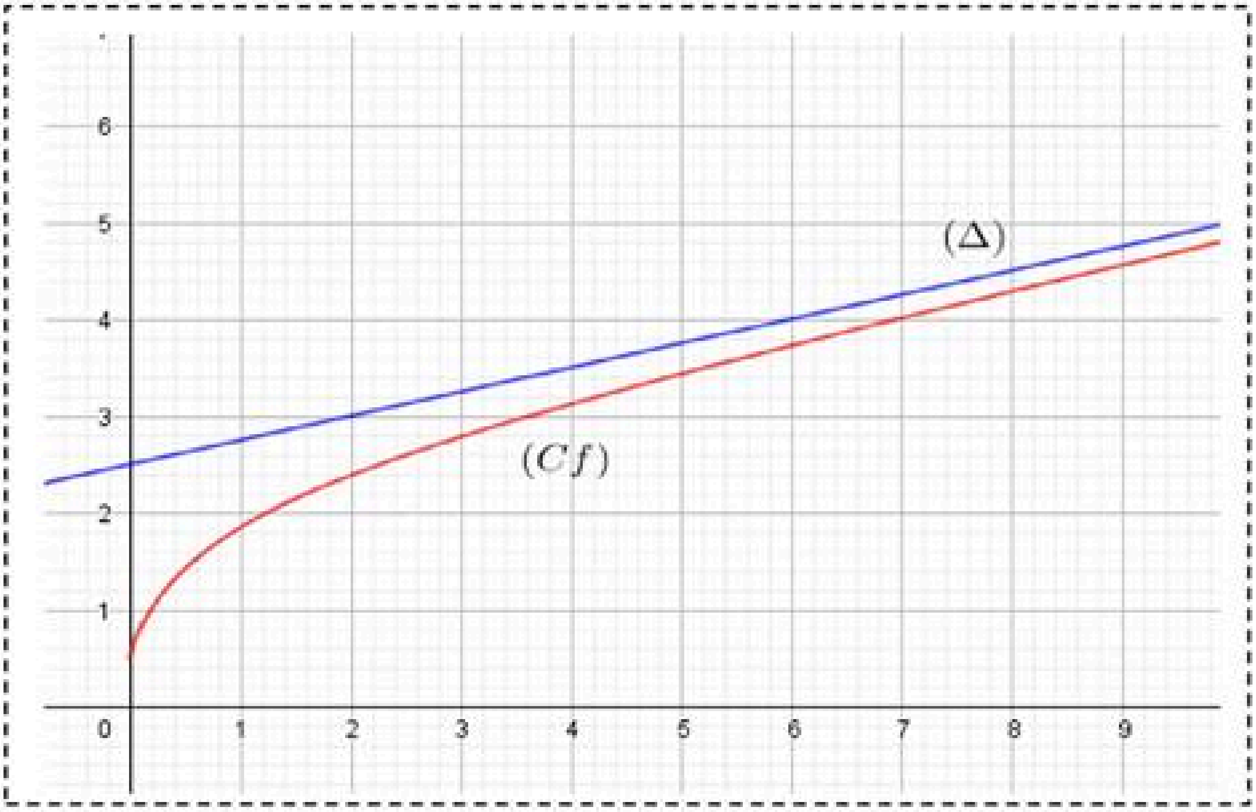
إذن نقول أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{x}{4}+\frac{5}{2}$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

5) تشكيل جدول التغيّرات ، ثم رسم كلا من (Δ) وَ (C) :

✓ **جدول التغيّرات :**

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

✓ **التمثيل البياني :**



تصحيح التمرين الخامس :

1) من أجل $1 \le k \le 6$ ، برهان أنّ $p_k=\frac{k}{21}$: نعلم أنّ : $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$.

✓ بما أنّها حدود لمتتالية حسابية ، فسيكون : $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=\frac{(p_1+p_6)\times 6}{2}$ أي :

$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=3(p_1+p_6)$. إذن : $3(p_1+p_6)=1$ ، أي : $p_1+p_6=\frac{1}{3}....(1)$.

✓ وَ بما أنّ : p_1 ، p_2 وَ p_4 تشكل بهذا الترتيب متتالية هندسية ، فسيكون : $p_1\times p_4=p_2^2....(2)$.

نعلم أنّ : $p_2=p_1+r$ ، $p_4=p_1+3r$ ، $p_6=p_1+5r$.

بالتعويض في (1) نجد : $p_1+p_1+5r=\frac{1}{3}$ ، أي : $2p_1+5r=\frac{1}{3}....(3)$.

بالتعويض في (2) نجد : $p_1\times(p_1+3r)=(p_1+r)^2$ ، أي : $p_1^2+3rp_1=p_1^2+2rp+r^2$ ، أي :

$3rp_1-2rp_1=r^2$ ، أي : $rp_1=r^2$ ، و منه : $p_1=r$. الآن نعوض في (3) نجد : $2p_1+5p_1=\frac{1}{3}$ ، أي :

$7p_1=\frac{1}{3}$ ، و منه : $p_1=\frac{1}{21}$. إذن من أجل $1\le k\le 6$ سيكون :

$p_k=p_1+(k-1)r$ ، أي : $p_k=p_1+(k-1)p_1$ ، و منه : $p_k=\frac{k}{21}$ ، هو المطلوب .

k	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

2) أ) حساب إحتمال الحوادث :

✓ A : " العدد المحصّل عليه زوجي " : $p(A)=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$.

✓ B : " العدد المحصّل عليه أكبر من أو يساوي 3 " : $p(B)=\frac{3}{21}+\frac{4}{21}+\frac{5}{21}+\frac{6}{21}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$.

✓ C : " العدد المحصّل عليه 3 أو 4 " : $p(C)=\frac{3}{21}+\frac{4}{21}=\frac{7}{21}$.

ب) حساب الإحتمال الشرطي $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$: $p(A\cap B)=\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{10}{21}$ ، لأنّ : $A\cap B=\{4;6\}$.

و منه : $p_A(B)=\frac{\frac{10}{21}}{\frac{12}{21}}$ ، أي : $p_A(B)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

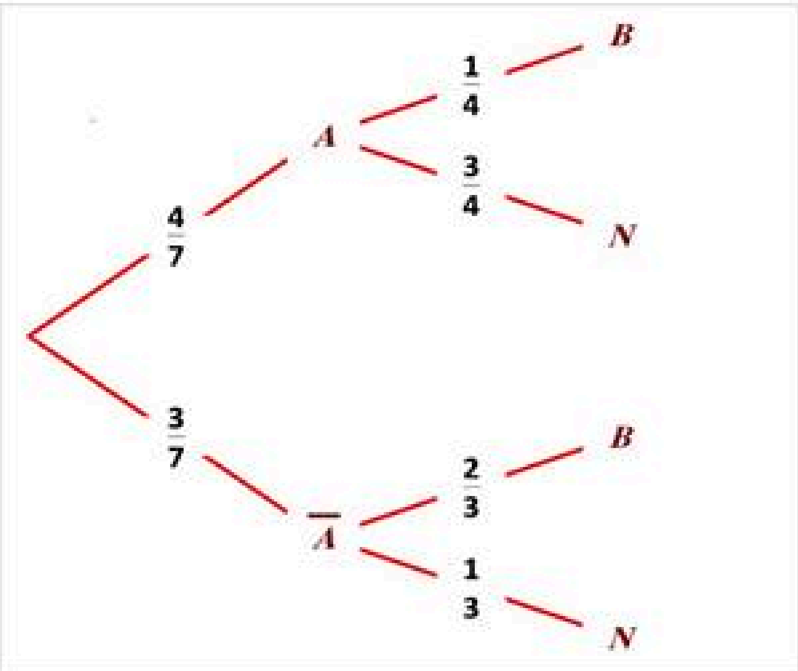
ج) لدينا : $p(A)\times p(B)=\frac{4}{7}\times\frac{6}{7}=\frac{24}{49}$ ، وَ $p(A\cap B)=\frac{10}{21}$ ، أي : $p(A\cap B)\neq p(A)\times p(B)$ ،

و منه الحادثتان A وَ B غير مستقلتين .

✓ نفس الطريقة بالنسبة للحادثتين A وَ C .

3) أ) تعيّين إحتمال الحادثة $G\cap A$ ، وَ إحتمال الحادثة G :

ننمذج اللعبة على شكل شجرة الإحتمالات لتسهيل الحل . (أنظر الشكل المقابل) .



✓ $p(G\cap A)=p(B\cap A)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{7}=\frac{1}{7}$.

✓ $p(G)=p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap\overline{A})$ ،

أي : $p(G)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{7}$.

ب) حساب الإحتمال الشرطي :

$p_G(A)=\frac{p(A\cap G)}{p(G)}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{3}$.