تمرينين في الأعداد المركبة و التحويلات النقطية للمراجعة النهائية

التمرين الأوّل :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\frac{2}{\overline{z}+i}+\frac{2}{\overline{z}-i}=4$ ، وَ الجملة : $\begin{cases}2a+b=2\\-a+b=-1+3i\end{cases}$.

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط : A ، B ، C ، D

لواحقها على الترتيب : $z_A=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2i$ ، $z_D=1-i$.

أ) أكتب z_A وَ z_B على الشكل الأسي ، ثمّ أحسب العدد : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}$.

ب) تحقّق من أنّ : $z_A\times z_D=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$. إستنتج قيمة كل من : $\cos(\frac{\pi}{12})$ وَ $\sin(\frac{\pi}{12})$.

ج) عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $(\frac{z_A\times z_D}{\sqrt{2}})^n$ حقيقيا موجبا .

3) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z مع $z\neq 2i$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\frac{3i(z-1+i)}{z-2i}$

أ) تحقّق من أنّ : $OM'=3\times\frac{DM}{CM}$. إستنتج أنّه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[CD]$ فإنّ M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تحديدها .

ب) بيّن أنّ : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM})+2k\pi$ ، حيث : $(k\in\mathbb{Z})$.

ج) إستنتج أنّه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[CD]$ ما عدا النقطة C فإنّ النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تحديدها .

التمرين الثاني :

في المستوي الموجّه نعتبر المربّع المباشر $ABCD$ ذو المركز O ، P نقطة من القطعة $[BC]$ وَ تختلف عن B

Q هي نقطة تقاطع (AP) مع (CD) ، المستقيم (Δ) يعامد (AP) في A وَ يقطع (BC) في R وَ يقطع (CD) في S .

1) أرسم شكلا مناسبا .

2) نفرض الدوران r الذي مركزه A وَ زاويته $\frac{\pi}{2}$:

أ) حدّد مع التبرير صورة المستقيم (BC) بالدوران r .

ب) عيّن صورتي R وَ P بالدوران r .

ج) ما طبيعة كل من المثلثين ARQ وَ APS ؟. برّر إجابتك .

3) N هي منتصف $[PS]$ وَ M هي منتصف $[QR]$:

S هو التشابه المباشر الذي مركزه A، زاويته $\frac{\pi}{4}$ وَ نسبته $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

أ) عيّن صورتي R وَ P بالتشابه S .

ب) ماهو المحل الهندسي للنقطة N لمّا P تمسح القطعة $[BC]$ باستثناء النقطة B ؟.

ج) برهن أنّ النقط M ، B ، N ، D على إستقامة واحدة .

الحلــــــــــــــول

حل التمرين الأوّل :

1) حل المعادلة : $\frac{2}{\overline{z-i}}+\frac{2}{\overline{z+i}}=4$ ، أي : $\frac{2}{z+i}+\frac{2}{z-i}=4$ ، أي : $\frac{2(z-i)+2(z+i)}{(z-i)(z+i)}=4$

و منه : $\frac{4z}{z^2+1}=4$ ، أي : $4z^2-4z+4=0$ ، إذن : $\begin{cases} z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

لدينا الجملة : $\begin{cases} 2a+b=2 \\ -a+b=-1+3i \end{cases}$ بالطرح نجد : $3a=3-3i$ ، و منه : $a=1-i$ وَ $b=2i$.

2) **أ)** لدينا : $z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، أي : $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، و لدينا : $z_B=\overline{z_A}$ ، و منه : $z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}=(e^{i\frac{\pi}{3}})^{2018}+(e^{-i\frac{\pi}{3}})^{1439}=e^{i\frac{2018\pi}{3}}+e^{-i\frac{1439\pi}{3}}$.

أي : $\begin{cases} \frac{2018\pi}{3}=\frac{2016\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=672\pi+\frac{2\pi}{3} \\ \frac{1439\pi}{3}=\frac{1440\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=480\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}$ ، و منه : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}=e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}}$ ،

أي : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}=(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$ ، و منه : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}=i\sqrt{3}$.

ب) لدينا : $z_D=1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، أي : $z_A\times z_D=e^{i\frac{\pi}{3}}\times\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

و منه : $z_A\times z_D=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ ، و هو المطلوب .

إستنتاج القيم المضبوطة لـ : $\cos(\frac{\pi}{12})$ وَ $\sin(\frac{\pi}{12})$

لدينا : $z_A \times z_D = (\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(1-i)$ ، أي : $z_A \times z_D = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

بالمطابقة بين الشكل المثلثي و الشكل الجبري للعدد $z_A \times z_D$ نجد :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \text{ ، } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} .$$

ج) لدينا : $(\frac{z_A \times z_D}{\sqrt{2}})^n = (e^{i\frac{\pi}{12}})^n = e^{i\frac{n\pi}{12}}$ ، إذن $(\frac{z_A \times z_D}{\sqrt{2}})^n$ حقيقيا موجبا إذا كان : $\frac{n\pi}{12} = 0+2k\pi$

و منه : $n = 24k$ ، أي : n مضاعف للعدد 24 .

3) أ) التحقق أنّ : $OM' = 3\times\frac{DM}{CM}$ ، أي نحسب OM' و نتحقّق من المساواة :

$OM' = |z'| = |3i| \times \frac{|z-1+i|}{|z-2i|} = 3\times\frac{|z-z_D|}{|z-z_B|}$ ، و منه : $OM' = 3\times\frac{DM}{CM}$ ، و هو المطلوب .

❖ إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[CD]$ معناه : $DM = CM$ ، أي : $\frac{DM}{CM} = 1$ ،

و منه : $OM' = 3$ ، إذن M' ستكون تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O وَ نصف قطرها 3 .

ب) بيان أنّ : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM})+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

لدينا : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg(z')+2k\pi$ ، أي : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg\left[\frac{3i(z-1+i)}{z-2i}\right]+2k\pi$ ، أي :

$(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg(3i)+\arg(\frac{z-1+i}{z-2i})+2k\pi$ ، أي : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg(3i)+\arg(\frac{z-z_D}{z-z_B})+2k\pi$

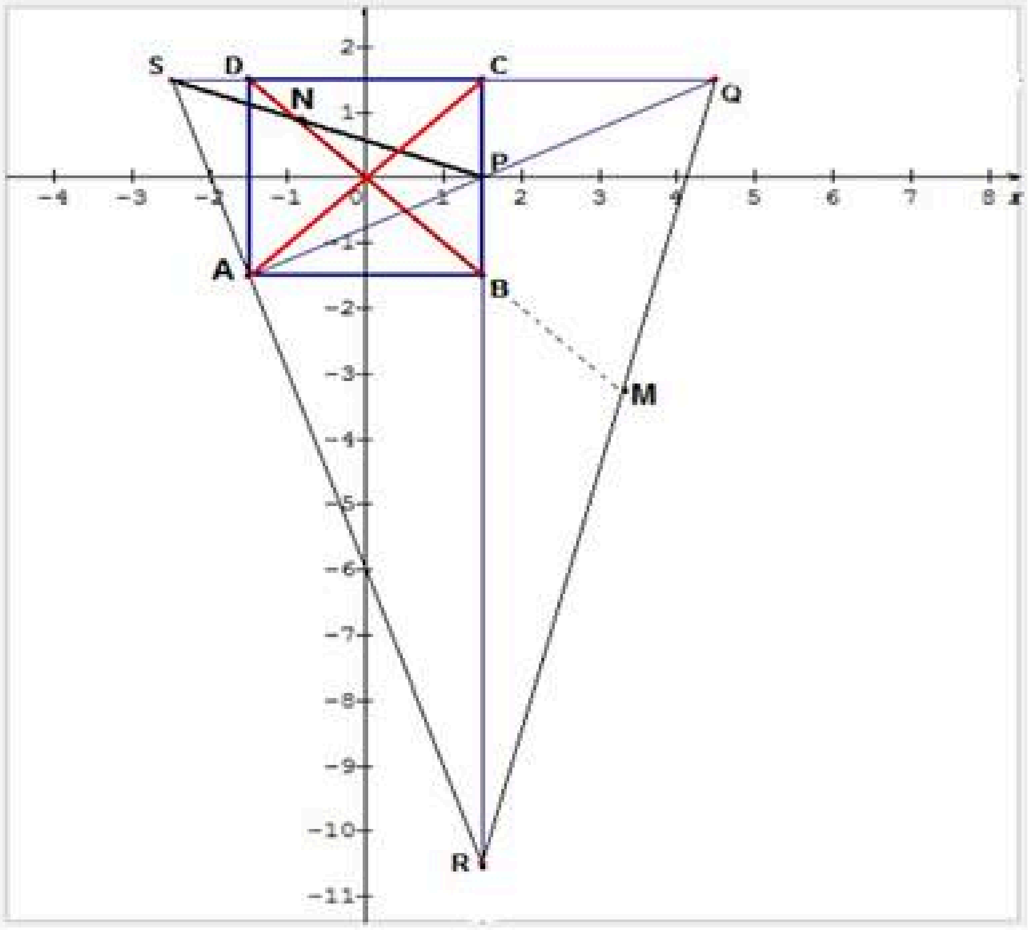
و منه : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM})+2k\pi$ ، و هو المطلوب .

❖ إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[CD]$ ، أي : $(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{2}+k\pi$ ، و منه :

$(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، أي : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \pi+k\pi$.

إذن : M' ستكون تنتمي إلى محور الفواصل ما عدا المبدأ O .

حل التمرين الثاني :



1) الرسم :

أنظر الشكل المقابل .

2) الدوران r الذي مركزه A وَ زاويته $\frac{\pi}{2}$:

أ) صورة المستقيم (BC) بالدوران r هي المستقيم الذي يعامد (BC) ، لأنّ زاوية الدوران $\frac{\pi}{2}$ ، و بما أنّ صورة B هي D فإنّ : $AB = AD$ وَ $BAD = 90°$ ، إذن صورة (BC) هي المستقيم المار بالنقطة D و العمودي على (BC) ، أي هو المستقيم (DC) .

ب) تعيين صورتي صورتي R وَ P بالدوران r :

❖ صورة R : R هي نقطة تقاطع (BC) وَ (SA) ، و صورة (BC) هي (DC)، وصورة (SA) هي (AP) ، إذن صورة R هي نقطة تقاطع (DC) وَ (AP) أي النقطة Q .

❖ صورة P : P هي نقطة تقاطع (BC) مع (AP) ، صورة (BC) هي (DC) ، و صورة (AP) هي (AS) ، إذن صورة P هي نقطة تقاطع (DC) مع (AS) ، أي هي النقطة S .

ج) طبيعة كل من المثلثين ARQ وَ APS :

❖ بما أنّ صورة R بالدوران r هي Q ، فإنّ المثلث ARQ قائم في A و متساوي الساقين .

❖ بما أنّ صورة P بالدوران r هي S ، فإنّ المثلث APS قائم في A و متساوي الساقين .

3) **أ)** لدينا التشابه المباشر S الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و نسبته $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

بما أنّ المثلث ARQ قائم في A و متساوي الساقين ، و النقطة M هي منتصف الوتر $[RQ]$ ، إذن المثلث AMR قائم في M و متساوي الساقين .

إذن لدينا : $AR = \sqrt{2}AM$ وَ $(\overrightarrow{AR};\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}$ ، و منه : صورة R بالتشابه S هي M .

❖ ثم بنفس الطريقة صورة P إلى N .

تنبيه : المثلثات القائمة و المتساوية الساقين نجد فيها التشابه المباشر الذي زاويته $\frac{\pi}{4}$ و نسبته $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ب) لمّا P تمسح $[BC]$ ما عدا النقطة B ، فإنّ صورتها N تمسح القطعة $[OD]$ ما عدا النقطة O ،
لأنّ : S يحوّل B إلى O وَ يحوّل C إلى D . **(راجع التنبيه أعلاه)** .

ج) إثبات أنّ النقط M ، B ، N ، D على إستقامية :

نعلم أنّ : M ، N ، D هي على الترتيب صور النقط R ، P ، C بالتشابه S ، و بما أنّ R ، P ، C
تقع على إستقامية ، إذن النقط M ، N ، D تكون على إستقامية أيضا .

و لدينا : $B \in (OD)$ ، إذن النقط M ، B ، N ، D هي على إستقامة واحدة .

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2018

الأستاذ : **بلقاسم عبدالرزاق**