الموضوع الثاني

التمرين الأول:(06 نقط)

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = i$ و $z_B = -1+\sqrt{3}i$

1. اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي ثم أنشئ النقطتين A و B
2. S التشابه المباشر الذي مركزه O و الذي يحول النقطة A الى B

اكتب العبارة المركبة للتشابه S ، ثم أوجد نسبته و زاويته

3. نعتبر متتالية النقط (A_n) ذات اللاحقة z_n و المعرفة كما يلي : $A_0 = A$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = S(A_n)$ (A_{n+1} صورة A_n بالتشابه S)

أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = 2^n \times e^{i\left(\frac{n\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}$

ب) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x, y) : $12x - y = 3$

جـ) إستنتج قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد z_n عدد حقيقي موجب

د)بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$،العدد $\frac{z_{n+3}}{z_n}$ تخيلي صرف . استنتج طبيعة المثلث OA_nA_{n+3}

التمرين الثاني:(06 نقط)

I) يحتوي وعاء على n كرة بيضاء ، حيث : $(n \geq 2)$ وَ 5 كرات حمراء وَ 3 كرات خضراء ، نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الوعاء :

1) ما إحتمال سحب كرتين بيضاوين ؟ .

2) نسمي $p(n)$ إحتمال سحب كرتين من نفس اللّون .

أ) بيّن أنّ: $p(n) = \frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$.ب) أحسب : $\lim_{n\to+\infty} p(n)$ ، ثمّ فسّر النّتيجة المحصّل عليها .

II) فيما يلي نعتبر $n = 4$ ، يأتي لاعب و يقوم بنفس التجربة الأولى :

في البداية يدفع $30DA$ إذا وجد في السحب الكرتين من نفس اللون يكسب $40DA$ ، و إذا وجدهما من لونين مختلفين يكسب $5DA$.نسمي الربح الجبري للاعب الفرق بين المبلغ المدفوع أوّلا و المبلغ الذي يكسبه و ليكن المتغيّر العشوائي X هو الربح الجبري للاعب

1) ما هي القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي X ؟ .

2) أكتب قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب أمله الرياضي .

III) فيما يلي نعتبر $n = 2$ ، نسحب من الوعاء عشوائيا كرتين على التوالي و بدون إرجاع :

1) شكل شجرة الإحتمالات التي تنمذج التجربة .

2) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A : " سحب كرتين من نفس اللون " ، B : " سحب كرة خضراء واحدة على الأقل " .

3)نفرض أنّ الكرية في السحبة الأولى خضراء ،ما إحتمال أن تكون حمراء في السحبة الثانية ؟

التمرين الثالث :(04 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط : $A(1;1;0)$ ، $B(1;2;1)$ ، $C(3;-1;2)$.

1) أ) بيّن أنّ النقط A ، B ، C تعيّن مستويا .

ب) بيّن أنّ المستوي (ABC) له معادلة ديكارتية على الشكل : $2x + y - z - 3 = 0$.

2) نعتبر المستويين (P) وَ (Q) معادلتاهما على الترتيب : $x + 2y - z - 4 = 0$ وَ $2x + 3y - 2z - 5 = 0$

برهن أنّ تقاطع (P) وَ (Q) هو مستقيم (D) تمثيله الوسيطي هو : $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$ حيث $(t \in \mathbb{R})$

التمرين الرابع :(08 نقط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x + 2 - e^x$.

1) أدرس تغيّرات الدالة g على $[0;+\infty[$ ، وَ عيّن نهاية g عند $+\infty$.

2) أ)بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيدا $\alpha \in]0;+\infty[$.ب) تحقق أنّ : $1,14 < \alpha < 1,15$

ج) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $[0;+\infty[$.

II) نعرّف على المجال $[0;+\infty[$ الدالة f كما يلي : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ ، و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

ب) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) أ) بيَن أنه من أجل كل ، x من $[0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{e^x\times g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f على $[0;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها .

ج) بيّن أنّ : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) أ) تحقّق أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$ ، حيث :

$u(x)=e^x-xe^x-1$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة u على $[0;+\infty[$ ، ثم إستنتج إشارة $u(x)$.

ج) إستنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) .

د) أرسم كلا من (T) و المنحني (C_f) ، الوحدة : $4cm$.

III) 1) عيّن دالة أصلية F للدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

2) جد بـcm^2 مساحة الحيّز المحدّد بـ (C_f) وَ المماس (T) والمستقيمات التي معادلتها: $x=0$ و $x=1$