

السنة الدراسية: 2017 - 2018

بكالوريا تجريبي

المدة : 4 ساعات ونصف

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

دائرة الاستعمال و التحضير

مديرية مدارس أشبال الأمة

دورة ماي 2018

اختبار الرياضيات

الشعبة: رياضيات

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول (5 ن)

المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق $z_A = 2, z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$ على الترتيب

(1) أعط الكتابة الأسية للعدد z_B ثم للعدد z_C

(2) بين أن النقط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

(3) أنشئ النقط A, B, C ثم عين طبيعة الرباعي $OBAC$.

(4) عين ثم أنشئ المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحق z حيث $|z| = |z - 2|$

(ب) T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحق z وتختلف عن النقطة A بالنقطة M'

ذات اللاحق z' حيث $z' = \frac{-4}{z-2}$

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $\frac{-4}{z-2} = z$ ثم أستنتج صورتي B و C بالتحويل T

(2) G مركز ثقل المثلث OAB ، عين ثم أنشئ النقطة G' صورة النقطة G بالتحويل T

(3) (أ) من أجل كل نقطة M تختلف عن A بين أن : $AM' = \frac{2 \times OM}{AM}$

(ب) نفرض أن النقطة M تنتمي إلى المجموعة (E) ما هي مجموعة النقط M' ؟

التمرين الثاني (4 ن)

أ - (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 5$ و أساسها 4 .

(1) أكتب الحد العام u_n بدلالة n

(2) أحسب قيمة المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n .

(3) إذا كان مجموع خمسة حدود متعاقبة من (u_n) هو 2025 فما هو الحد الأول من هذه الحدود

ب - (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = (2n + 1) \times 2^{(n+1)}$

(1) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

(2) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون باقي قسمة v_n على 7 هو 3

(3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n + 1) = \frac{(2n + 1)!}{2^n \times n!}$

(4) استنتج قيمة الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ بدلالة n .

التمرين الثالث (4 ن)

عمر و حمزة راميا قوس، كل منهما يسدد سهما نحو هدف مقسم الى ثلاث مناطق $(C - B - A)$ نفرض أن كلرامي يصيب في كل رمية منطقة واحدة و واحدة فقط.

إذا علمت أن : - احتمالات إصابة الرامي عمر المناطق $(C - B - A)$ على الترتيب هو $(\frac{7}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12})$

- احتمالات إصابة الرامي حمزة المناطق $(C - B - A)$ متساوية.

(1) الرامي عمر يسدد سهمه ثلاث مرات متتابة :

أ - ما احتمال أن يصيب في كل رمية المنطقة (C) ؟

ب - ما احتمال أن يصيب المناطق $(C - B - A)$ بهذا الترتيب ؟

ج - ما احتمال أن يصيب المناطق $(C - B - A)$ ؟

(2) نختار أحد الراميين مع العلم أن احتمال اختيار الرامي عمر ضعف احتمال اختيار الرامي حمزة.

أ - في حالة تسديد رمية واحدة. ما احتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة (C) ؟

ب - علما أن رمية واحدة قد سُددت و أصابت المنطقة (C) ، ما احتمال أن تكون هذه الرمية للرامي عمر ؟

التمرين الرابع (7 ن)

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ بـ : $f(x) = (x + 2) - 2 \ln |2x + 1|$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

(2) أثبت أن (C) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 3- ثم أكتب معادلته.

(3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

(4) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.3 < \alpha < -1.2$

(5) أرسم (T) و (D) ثم أنشئ المنحنى (C) . (علما أن (C) لا يقبل نقطة إنعطاف)

(6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \ln(2x+1)$ على المجال $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ والتي

تتعدم من أجل $x=0$

ب) λ عدد حقيقي حيث $-\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{3}{2}$. احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات

التي معادلاتها $x = \frac{3}{2}$ ، $x = \lambda$ و $y = 0$. ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow \frac{1}{2}^+} S(\lambda)$

(7) ناقش بيانا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = -3x + m$.

(8) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ بـ: $g(x) = \frac{3}{2} + \left|x + \frac{1}{2}\right| - 2 \ln|2x+1|$

- برهن أن المستقيم (K) الذي معادلته $x = -\frac{1}{2}$ محور تناظر للمنحنى (C_g) الممثل للدالة g

- اشرح كيفية إنشاء المنحنى (C_g) انطلاقا من المنحنى (C) ثم أنشئه.

السنة الدراسية: 2017 - 2018

بكالوريا تجريبي

المدة: 4 ساعات ونصف

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

دائرة الاستعمال و التحضير

مديرية مدارس أشبال الأمة

دورة ماي 2018

اختبار الرياضيات

الشعبة: رياضيات

الموضوع الثاني

التمرين الأول (05 ن)

نعتبر العدد المركب $L(z) = \frac{z-i}{z-1}$ حيث $z \neq 1$

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $L(z) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ وليكن z_0 حل هذه المعادلة.

(2) أكتب z_0 على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي n : $z_0^n = 2^{\frac{9n}{2}}$.

(3) عين العدد المركب z_1 بحيث $|L(z_1)| = 1$ و $\arg[L(z_1)] = \frac{3\pi}{2} [2\pi]$ ثم بين أن $z_1^{2015} = 2^{1007} (1-i)$.

(4) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $z_0^{4n} + z_1^{4n}$ حقيقي.

(II) المستوى المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A, B, C, D و M ذات اللواحق $1, i, 1+i, -2-2i$ و Z على الترتيب

(1) * أكتب العدد $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي.

* استنتج أنه يوجد تحويل نقطي يحول النقطة A إلى النقطة D يطلب تحديد عناصره المميزة.

(2) لتكن (S) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث $\arg[L(z)] = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

* تحقق من أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (S) .

* أعط تفسيرا هندسيا لـ $\arg[L(z)]$ ثم عين المجموعة (S) .

التمرين الثاني (04 ن)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطتان $A(2, 2, -1)$ و $B(1, 0, 1)$

و المستوي (P) الذي معادلته : $2x + y + 2z - 13 = 0$.

(1) أ) عين المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها B ونصف قطرها 3.

ب) حدد تقاطع المستوي (P) و سطح الكرة (S) .

(2) (D) المستقيم المار من النقطة A و العمودي على المستوي (P)

أ) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .

ب) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و سطح الكرة (S) .

(3) (S_t) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق المعادلة الديكارتية

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2tx - 2tz + 2t^2 - 9 = 0 \text{ حيث } t \in \mathbb{R}$$

أ) بين أن (S_t) معادلة سطح كرة مركزها H_t ونصف قطرها r .

ب) عين مجموعة النقط H_t عندما t يمسح $\mathbb{R}$.

ج) أدرس حسب قيم t الوضع النسبي لـ (S_t) و (P) .

التمرين الثالث (04 ن)

نعتبر الأعداد الطبيعية: $a = 2n + 1$ ، $b = 4n + 3$ و $c = 2n + 3$ حيث n عدد طبيعي أكبر تماما من 2

(1) تحقق من أن: $b = 2a + 1$ ثم أستنتج أن a و b أوليان فيما بينهما و $\text{PGCD}(a, b, c) = 1$.

(2) عين تبعا لقيم العدد n القاسم المشترك الأكبر للعديدين b و c .

(3) عين قيمة n بحيث يكون $\text{PGCD}(b, c) = 3$ و $\text{PPCM}(b, c) = 1305$.

(4) أكتب العدد b^2 في نظام العد الذي أساسه a .

(5) نفرض أن (a, b, c) هي إحداثيات نقطة D في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

أ) بين أن النقطة D تنتمي إلى مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له.

ب) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل المبدأ O و يحوي المستقيم (Δ) ، ثم أستنتج معادلة المستوي (P) .

التمرين الرابع (07 ن)

f دالة عددية معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى

معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسر النتائج بيانيا.

(2) أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0, +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أنه من أجل كل $x \in]0, +\infty[$: $f''(x) = \frac{2[(\ln x)^2 - 3\ln x + 1]}{x^3}$ ثم أستنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطتي

انعطاف يطلب تعيينهما.

(4) $\alpha \in]0, +\infty[$ ، A نقطة من (C) فاصلتها α و (T_α) المماس للمنحنى (C) في A .

(1°) بين أن (T_α) يمر بالمبدأ O إذا وفقط إذا كان $f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0$.

(2°) أستنتج وجود مماسين (T_a) و (T_b) يمران بالمبدأ O ثم عيّن معادلة كل من (T_a) و (T_b) .

(5) أرسم المماسين (T_a) ، (T_b) ثم إنشئ المنحنى (C) .

(6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x) = mx$.

(II) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

(1) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $I_1 = 1 - \frac{3}{e^2}$.

(2) باستعمال المكاملة بالتجزئة برهن أن : $I_{n+1} = \frac{-2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n$ حيث $n \geq 1$

(3) أستنتج القيمة المضبوطة لـ I_2 و فسر النتيجة هندسيا.

بالتوفيق ...

الموضوع 01

التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي دورة ماي 2018

التنقيط

(الأعداد المركبة)

تصحيح التمرين الأول (05 نقاط)

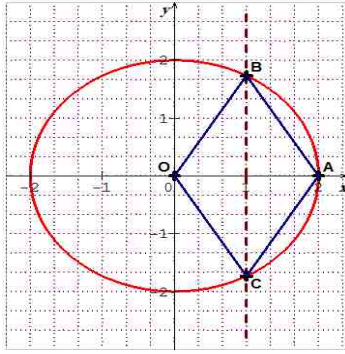
(1) إعطاء الكتابة الأسية لـ z_B ثم z_C : -----

لدينا : $z_B = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، و $z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

(2) بيان أن النقط $C; B; A$ تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها : -----

نلاحظ أن : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ ، أي : $OA = OB = OC = 2$ ، و منه فإن النقط $C; B; A$ تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 2 .

(3) إنشاء النقط $C; B; A$ ، ثم تعيين طبيعة الرباعي $OBAC$: -----



أنظر الشكل المقابل .
لدينا : $OB = OC$ ، و $\overline{OB} = \overline{AC}$ ، أي : $OB = OC = 2$ و $z_B = z_A - z_C$ و منه فإن الرباعي $OBAC$ هو معين . (يمكن إستعمال خواص أخرى) .

(ج) تعيين ثم إنشاء مجموعة النقط M حيث $|z| = |z - 2|$: -----
لدينا : $|z| = |z - 2|$ معناه : $|z - z_O| = |z - z_A|$ ، أي : $OM = AM$ ، و منه مجموعة النقط M هي المستقيم المحوري للقطعة $[OA]$.

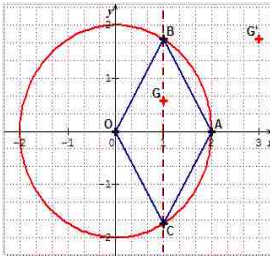
الإنشاء : أنظر الشكل المقابل .

(ب) (1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\frac{-4}{z-2} = z$ ، ثم استنتاج صورتَي B و C بالتحويل T : -----

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2-2\sqrt{3}i}{2} = 1-\sqrt{3}i \\ z_2 = \frac{2+2\sqrt{3}i}{2} = 1+\sqrt{3}i \end{cases} \quad \text{لدينا : } z^2 - 2z + 4 = 0 , \Delta = -12 , \text{ و منه :}$$

نلاحظ أن : $T(B) = B$ و $T(C) = C$.

(2) تعيين ثم إنشاء النقط G' صورة النقط G بالتحويل T : -----



لدينا : $z_G = \frac{z_O + z_A + z_B}{3} = \frac{3+i\sqrt{3}}{3} = 1+i\frac{\sqrt{3}}{3}$ ، و منه : $z_{G'} = 3+i\sqrt{3}$.
الإنشاء : أنظر الشكل المقابل .

(3) (أ) بيان من أجل كل نقطة M تختلف عن A $AM' = \frac{2 \times OM}{AM}$: -----

لدينا : $z' = \frac{-4}{z-2}$ ، أي : $z' - 2 = \frac{-4}{z-2} - 2$ ، و منه : $z' - 2 = \frac{-2z}{z-2}$ ، أي : $|z' - 2| = \frac{-2|z|}{|z-2|}$ ، و منه :

أي : $|z' - z_A| = \frac{-2|z - z_O|}{|z - z_A|}$ ، أي : $AM' = \frac{2 \times OM}{AM}$ ، و هو المطلوب .

(ب) لدينا : $M \in (E)$ معناه أن : $OM = AM$ ، فينتج : $AM' = 2$.
و منه مجموعة النقط M' هي دائرة مركزها A و نصف قطرها 2 .

(أ) كتابة الحد العام u_n بدلالة n : لدينا : $u_0 = 5$ و $r = 4$ ، ومنه : $u_n = 5 + 4n$.

(2) حساب قيمة المجموع S_n : لدينا : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، أي : $S_n = \frac{n+1}{2}(10 + 4n)$ ، ومنه : $S_n = (n+1)(5 + 2n)$.

(3) : نضع الحد الأول هو u_p ، أي : $2025 = \frac{5}{2}(u_p + u_{p+5})$ ، أي : $810 = (2u_p + 16)$ ، ومنه : $u_p = 397$.
أي : $u_p = 5 + 4p$ ، ومنه : $397 = 5 + 4p$ ، أي : $p = 98$ ، إذن الحد الأول من هذه الحدود هو : $u_{98} = 397$.
(ب) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = (2n+1) \times 2^{(4n+5)}$.

(1) تعيين تبعا لقيم n بواقي القسمة للعدد 2^n على 7 : $2^{3k+2} \equiv 4[7]$ ، $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ ، $2^{3k} \equiv 1[7]$. أي بواقي القسمة الإقليدية 2^n على 7 هي : 1 ، 2 و 4 .

(2) تعيين قيم n حتى يكون باقي قسمة v_n على 7 هو 3 : لدينا : $v_n \equiv 3[7]$ ، أي : $(2n+1) \times 2^{(4n+5)} \equiv 3[7]$ ، أي : $4(2n+1) \times 2^n \equiv 3[7]$. نميز حالتين :
إذا كان n مضاعفا لـ 3 ، أي : $n = 3k$ ، أي : $24k + 4 \equiv 3[7]$ ، أي : $k = 7L + 3$ ، ومنه : $n = 21L + 9$.
إذا كان n ليس مضاعفا لـ 3 ، أي : $n = 3k + 1$ ، ومنه : $n = 21L + 1$. أو $n = 3k + 2$ ، أي : $n = 21L + 2$.

(3) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$:
من أجل $n = 0$ لدينا : $1 = 1$ ، ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.
نفرض صحة الخاصية من أجل n ، أي : $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$.

نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ ، أي : $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) \times (2n+3) = \frac{(2n+3)!}{2^{n+1} \times (n+1)!}$.
لدينا : $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) \times (2n+3) = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!} \times (2n+3)$ ، أي : $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) \times (2n+3) = \frac{(2n+3)!}{2^{n+1} \times (n+1)!}$ ، ومنه :
أي : $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$.

(4) إستنتاج قيمة الجداء P_n بدلالة n :
لدينا : $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ ، أي : $P_n = (1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)) \times (2^5 \times 2^9 \times \dots \times 2^{4n+5})$ ،
أي : $P_n = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!} \times 2^{(5+9+\dots+4n+5)}$ ، ومنه : $P_n = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!} \times 2^{(n+1)(5+2n)}$.

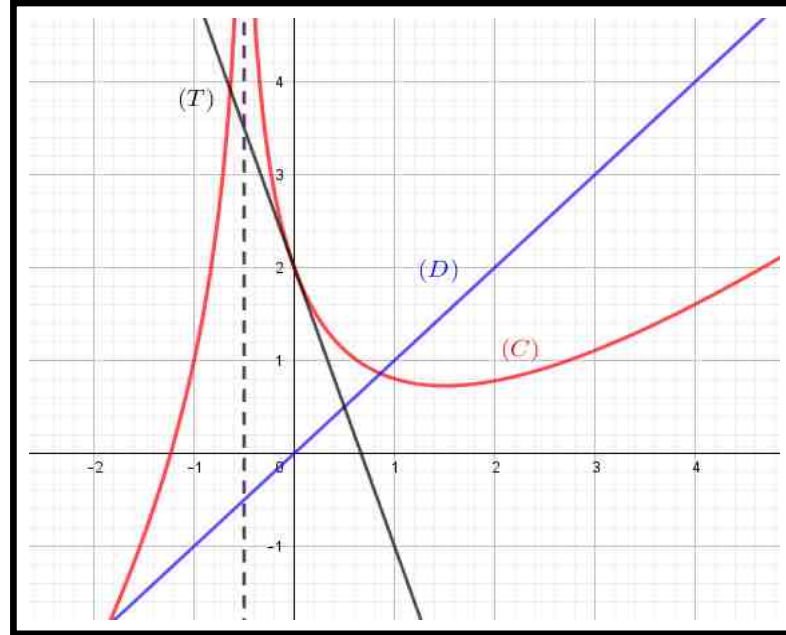
- (1 أ) إحتمال أن يصيب المنطقة (C) في كل رمية :
 بما أن الرميات مستقلة ، فإن : $p_1 = (p(C))^3 = \left(\frac{7}{12}\right)^3 = \frac{343}{1728}$
- (ب) إحتمال أن يصيب المناطق (C - B - A) بهذا الترتيب :
 $p_2 = p(C) \times p(B) \times p(C) = \left(\frac{7}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{12}\right) = \frac{7}{432}$
- (ج) إحتمال أن يصيب المناطق (C - B - A) :
 $p_3 = 3! \times [p(C) \times p(B) \times p(C)] = 6 \times \left(\frac{7}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{12}\right) = \frac{42}{432} = \frac{7}{72}$
- (2 أ) إحتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة (C) :
 لدينا إحتمال إختيار عمر هو ضعف إحتمال إختيار حمزة أي : $p(O) = \frac{2}{3}$ و $p(H) = \frac{1}{3}$
 إذن : $p(C) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{7}{12}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{14}{36} + \frac{1}{9} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$
- (ب) حساب الإحتمال الشرطي $p_C(O)$:
 $p_C(O) = \frac{p(C \cap O)}{p(C)} = \frac{\frac{7}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{18} \times 2 = \frac{7}{9}$

الجزء الأول:

- (1 حساب نهايات الدالة f ، ثم دراسة إتجاه تغيرها و تشكيل جدول تغيراتها :
 $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \left[1 - 2 \frac{\ln(2x+1)}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \left[1 - \frac{2 \ln(2x+1)}{x+2} \times \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)} \right] = +\infty$
- | | | | | |
|---------|-----------|----------------|-----------------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | + | | - 0 + | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $f\left(\frac{3}{2}\right)$ | $+\infty$ |
- لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$: $f'(x) = \frac{2x-3}{2x+1}$
 جدول التغيرات : أنظر الشكل المقابل .
- (2 إثبات أن (C) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -3 :
 نضع : $f'(x) = -3$ ، أي : $2x - 3 = -6x - 3$ ، و منه :
 $x = 0$ ، إذن : (C) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -3 عند
 النقطة ذات الفاصلة 0 ، أي : $(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ، و منه : $(T): y = -3x + 2$
- (3 الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة للمستقيم (D) :
 $f(x) - y = 2[1 - \ln|2x+1|]$ ، أي : $\ln|2x+1| = 1$ ، و سنلخص المناقشة في الجدول التالي :

x	$-\infty$	$\frac{-e-1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{e-1}{2}$	$+\infty$
$f(x)-y$	-	+	+	-	
الوضعية	(C) يقع (D) تحت	(C) يقع (D) فوق	(C) يقع (D) فوق	(C) يقع (D) تحت	(C) يقع (D) تحت

- (4) إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث $-1,3 < \alpha < 1,2$:
 f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[-1,3;-1,2]$ و $f(-1,3) \times f(-1,2) < 0$ ، و منه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α ، حيث $\alpha \in [-1,3;-1,2]$.
- (5) رسم (T) و (D) ، ثم إنشاء (C) :



- (6) أ) تعيين دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(2x+1)$ على $[-\frac{1}{2}; +\infty[$ و التي تنعدم من أجل $x = 0$:
 ب) حساب مساحة الحيز:

$$\int \ln(2x+1)dx = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln(2x+1) - x$$

$$S(\lambda) = 2\ln 4 - \frac{3}{2} - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\ln(2\lambda+1) + \lambda$$

$$\text{حساب : } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} S(\lambda) = -2 + 4\ln 2 : \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} 2\ln 4 - \frac{3}{2} - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\ln(2\lambda+1) + \lambda$$

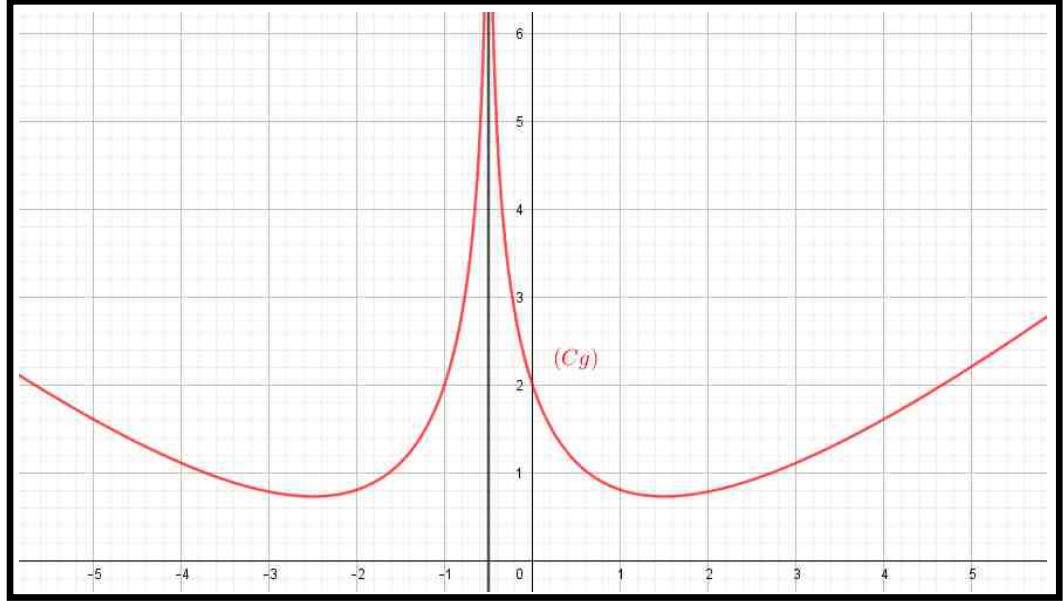
- (7) المناقشة البيانية حسب قيم m لعدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x) = -3x + m$:
 - لما : $m = 2$ ، أي : $f(x) = -3x + 2$ ، المعادلة تقبل حلين أحدهما معدوم و الآخر سالب .
 - لما : $m < 2$ ، المعادلة تقبل حل وحيد سالب .
 - لما : $m > 2$ ، للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة .

(8) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ كما يلي : $g(x) = \frac{3}{2} + \left|x + \frac{1}{2}\right| - 2\ln|2x + 1|$: -----

- لدينا : D_g مجال متناظر بالنسبة إلى 0 ، و لدينا : $g(-1-x) = g(x)$ ، و منه فإنّ : $x = -\frac{1}{2}$ هو محور تناظر للمنحنى (C_g) .

- المنحنى (C_g) ينطبق على (C) في المجال $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ، أما الجزء الآخر يرسم بالتناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{1}{2}$ في المجال $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$.

----- إنشاء المنحنى (C_g) :



كتابة الاستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

(I) 1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $L(z) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$: -----

$$\frac{z-i}{z-1} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i \text{ ، أي : } z = \frac{-4+8i}{1+3i} \text{ ، أي : } z = \frac{20+20i}{10} \text{ ، و منه : } z_0 = 2+2i .$$

(2) كتابة z_0 على الشكل الأسّي ، ثم تعيين قيم العدد الطبيعي n : -----

$$z_0 = 2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{لدينا : } z_0^{3n} = 2^{\frac{9n}{2}} \text{ ، أي : } \left((2\sqrt{2})^{3n} \cdot e^{i\frac{3\pi n}{4}} \right) = 2^{\frac{9n}{2}} \text{ ، أي : } \left(2^{\frac{3n}{2}} \cdot e^{i\frac{3\pi n}{4}} \right) = 2^{\frac{9n}{2}} \text{ ، أي : } 2^{\frac{3n}{2}} \cdot e^{i\frac{3\pi n}{4}} = 2^{\frac{9n}{2}} \text{ ، أي : } 2^{\frac{3n}{2}} \cdot e^{i\frac{3\pi n}{4}} = 2^{\frac{9n}{2}}$$

$$\text{ومنه : } e^{i\frac{3\pi n}{4}} = 1 \text{ ، أي : } \frac{\pi n}{4} \equiv 0[2\pi] \text{ ، أي : } \frac{\pi n}{4} = 2k\pi \text{ ، أي : } \frac{n}{4} = 2k \text{ ، و منه : } n = 8k .$$

(3) تعيين العدد المركب z_1 ، ثم بيان أن : $z_1^{2015} = 2^{1007}(1-i)$: -----

$$\text{لدينا : } |L(z_1)| = 1 \text{ و } \arg[L(z_1)] = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ ، معناه أن : } L(z_1) = \frac{z_1-i}{z_1-1} = -i \text{ ، (يمكن إستعمال}$$

$$\text{خواص الزوايا الموجهة) . و منه بعد الحساب نجد : } z_1 = \frac{2+2i}{2} \text{ ، إذن : } z_1 = 1+i .$$

$$\text{لنبين أن : } z_1^{2015} = 2^{1007}(1-i) \text{ ، لدينا : } z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ، أي :}$$

$$z_1^{2015} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{2015} = (\sqrt{2})^{2015} e^{i\frac{2015\pi}{4}} = 2^{1007} \times \sqrt{2} e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)} = 2^{1007} \times \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right)$$

$$\text{و منه : } z_1^{2015} = 2^{1007} \times \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2^{1007}(1-i)$$

(4) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_0^{4n} + z_1^{4n}$ حقيقي -----

$$\text{لدينا : } z_0^{4n} + z_1^{4n} = \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{4n} + \left(2e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^{4n} = e^{i\pi n} \left[(2\sqrt{2})^{4n} + (\sqrt{2})^{4n} \right] = \cos(\pi n) \left[(2\sqrt{2})^{4n} + (\sqrt{2})^{4n} \right]$$

$$\text{و بالتالي فإن : } z_0^{4n} + z_1^{4n} \text{ حقيقي .}$$

(II) 1 (أ) كتابة العدد $\frac{z_D - z_C}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي : -----

$$\text{لدينا : } \frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = 3 - 3i \text{ و } \frac{z_D - z_C}{z_A - z_C} = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{(ب) لدينا : } \frac{CD}{CA} = 3\sqrt{2} \text{ ، و } (\overline{CA}; \overline{CD}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ، و منه يوجد } S \text{ التشابه المباشر الذي مركزه } C \text{ ،}$$

$$\text{و نسبته } 3\sqrt{2} \text{ ، و زاويته } -\frac{\pi}{4} .$$

(2) (أ) التحقق أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (S) : -----

$$\text{لدينا : } L(z) = \frac{z-i}{z-1} = -i \text{ ، أي : } \frac{(1+i)-i}{(1+i)-1} = \frac{1}{i} = -i \text{ ، و منه : } C \in (S) .$$

$$\text{(ب) لدينا : } \arg[L(z)] = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ، معناه : } (\overline{MA}; \overline{MB}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{و منه مجموعة النقط } M \text{ هي نصف دائرة قطرها } [AB] \text{ و تشمل النقطة } C \text{ باستثناء } A \text{ و } B .$$

التنقيط	تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (الهندسة الفضائية)
	(1 أ) تعيين المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) : لدينا : (S) : مركزها B و نصف قطرها 3 ، و منه : $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3^2$: (S) . (ب) تعيين تقاطع المستوي (P) و سطح الكرة (S) : نحسب : $d(B;(P)) = \frac{ 2+2-13 }{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3$ ، أي : $d(B;(P)) = 3 = r$ ، و منه (P) يمس (S) . (2 أ) إعطاء تمثيل وسيطي للمستقيم (D) : لدينا : (D) يشمل النقطة A و عمودي على (P) ، أي : $\vec{n}_{(P)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) ، أي : $(D) : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$ هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) . (ب) دراسة الوضع النسبي للمستقيم (D) و سطح الكرة (S) : بعد التعويض و التبسيط نجد : $9\lambda^2 + 4\lambda = 0$ ، أي : $\lambda = 0$ ، أو $\lambda = -\frac{4}{9}$. و منه (D) يقطع (S) في نقطتين (3 أ) بيان أن (S_t) سطح كرة مركزها H_t و نصف قطرها r : لدينا : $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2tx - 2tz + 2t^2 - 9 = 0$ ، أي : $(x-t)^2 + y^2 + (z-t)^2 = 3^2$: (S) . و منه : (S) هي سطح كرة مركزها H_t(t;0;t) ، و نصف قطرها 3 ، حيث : $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ (ب) مجموعة النقط M هي المستقيم الذي يشمل المبدأ و شعاع توجيهه $\vec{v}(1;0;1)$. (ج) دراسة حسب قيم t الوضع النسبي لـ (S_t) و (P) : لدينا : $d(H_t;(P)) = \frac{ 4t-13 }{3}$ ، الآن نناقش حسب قيم t : - لما : $1 < t < \frac{11}{2}$ ، فإن : (S_t) و (P) يتقاطعان وفق دائرة . - لما : $t = \frac{11}{2}$ أو $t = 1$ ، فإن : (S_t) يمس (P) . - لما : $t \in]-\infty; 1[\cup]\frac{11}{2}; +\infty[$ ، فإن : $(S_t) \cap (P) = \emptyset$.
التنقيط	تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط) (الحساب + الهندسة الفضائية)
	(1 أ) التحقق أن $b = 2a + 1$: لدينا : $\begin{cases} 2a = 4n + 2 \\ b = 4n + 3 \end{cases}$ ، بالطرح نجد : $b - 2a = 1$ ، و منه : $b = 2a + 1$ ، و هو المطلوب . (ب) إستنتاج أن a و b أوليان فيما بينهما ، و $PGCD(a;b;c) = 1$: لدينا : $b = 2a + 1$ ، أي : $b - 2a = 1$ ، و منه حسب مبرهنة بيزو فإن a و b أوليان فيما بينهما . و منه : $PGCD(a;b) = 1$ ، و عليه : $PGCD(a;b;c) = PGCD(1;c) = 1$. و هو المطلوب . (2) تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي n القاسم المشترك الأكبر للعددين b و c : لدينا : d/c و d/b ، إذن : $d/b - 2c$ ، أي : $d/3$ ، و منه : $d/1$ ، أو $d/3$. أي : لما n مضاعف لـ 3 فإن : $PGCD(b;c) = 3$ ، و لما n ليس مضاعف لـ 3 فإن : $PGCD(b;c) = 1$.

لدينا : $\begin{cases} c \equiv 0[3] \\ b \equiv 0[3] \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} 2n+3 \equiv 0[3] \\ 4n+3 \equiv 0[3] \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} 2n \equiv 0[3] \\ 4n \equiv 0[3] \end{cases}$ ، ومنه : $n \equiv 0[3]$.

- إذا كان : $n = 3k$ ، فإن : $d = 3$.

- إذا كان : $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$ ، فإن : $d = 1$.

(3) تعيين قيم n : -----

لدينا : $PGCD(b;c) = 3$ و $PPCM(b;c) = 1305$ ، أي : $bc = 3915$ ، ومنه : $(4n+3)(2n+3) = 3915$ ، إذن : $n = 21$.

(4) كتابة العدد b^2 في نظام العد الذي أساسه a : -----

لدينا : $b^2 = 16n^2 + 24n + 9$ ، أي : $b^2 = 4(2n+1)^2 + 4(2n+1)^1 + (2n+1)^0$ ، ومنه : $b^2 = \overline{444}^a$.

(5) أ) بيان أن النقطة D تنتمي إلى (Δ) يطلب تعيين تمثيله الوسيط : -----

لدينا : $D(a;b;c)$ ، أي : $D(2n+1;4n+3;2n+3)$ ، ومنه D تنتمي للمستقيم : $n \in \mathbb{R}$; $(\Delta) : \begin{cases} x = 2n+1 \\ y = 4n+3 \\ z = 2n+3 \end{cases}$.

ب) كتابة تمثيل وسيطي للمستوي (P) : -----

لدينا : (P) يشمل O و $A(1;3;3)$ ، $B(3;7;5)$ ، $M(x;y;z) \in (P)$ ، معناه : $\overrightarrow{OM} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$.

ومنه : $(P) : \begin{cases} x = \alpha + 3\beta \\ y = 3\alpha + 7\beta \\ z = 3\alpha + 5\beta \end{cases}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

إستنتاج معادلة ديكارتية لـ (P) : $(P) : \begin{cases} 3x - y = 2\beta \\ y - z = 2\beta \end{cases}$ ، بالطرح نجد : $(P) : 3x - 2y + z = 0$.

التقيط

(الدالة اللوغاريتمية)

تصحيح التمرين الرابع (07نقاط)

(I) برهان أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثم حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وتفسير النتائج هندسيا : -----

، ومنه : $y = 0$ مستقيم مقارب للمنحني (C) . $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)^2 = 0$

، ومنه : $x = 0$ مستقيم مقارب للمنحني (C) . $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)^2}{x} = +\infty$

(2) دراسة إتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها : -----

الدالة f قابلة للإشتقاق على : $]0; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي : $f'(x) = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}$.

ومن الإشارة من إشارة : $\ln x (2 - \ln x)$ ، و عليه سنلخص إتجاه التغير في الجدول التالي :

x	0	1	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{4}{e^2}$	0

جدول التغيرات :

(3) بيان أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f''(x) = \frac{2[(\ln x)^2 - 3\ln x + 1]}{x^3}$: -----

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{2-2\ln x}{x}\right)x^2 - 2x[\ln x(2-\ln x)]}{x^4} = \frac{x(2-2\ln x) - 2x(-2\ln x - (\ln x)^2)}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{2[(\ln x)^2 - 3\ln x + 1]}{x^3} \text{ ، و هو المطلوب .}$$

نلاحظ أن المشتقة الثانية تنعدم و تغير إشارتها ، و عليه فإن المنحني (C) يقبل نقطتي إنعطاف هما :

$$. B\left(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}; \frac{7+3\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}}\right) , A\left(e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}; \frac{7-3\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

(4) أ) بيان أن (T_α) يمر بالمبدأ إذا وافق $f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0$: -----

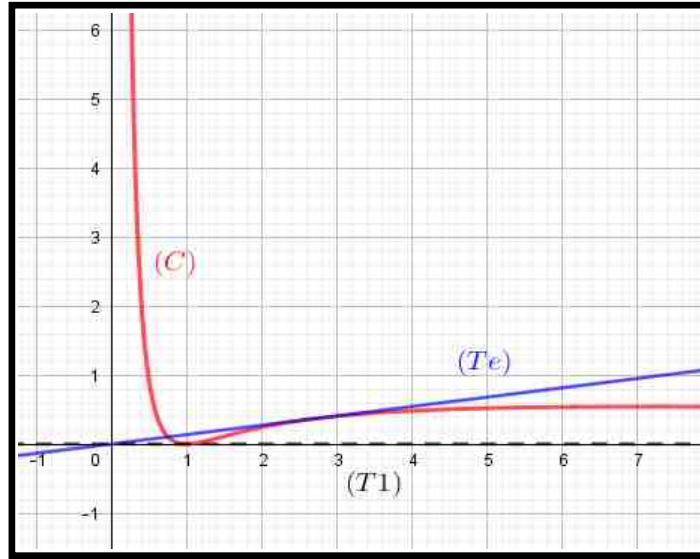
لدينا : $(T_\alpha): y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$ ، (T_α) يمر بالمبدأ معناه أن : $f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0$.

ب) إستنتاج وجود مماسين (T_a) و (T_b) : -----

لدينا : $f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0$ ، معناه : $\alpha = 1$ أو $\alpha = e$. و منه يوجد مماسين يمران بالمبدأ O .

$$\text{معادلتهما : } (T_1): y = 0 \text{ ، و } (T_e): y = \frac{1}{e^2}x$$

(5) رسم المماسين (T_1) و (T_e) ، ثم إنشاء المنحني (C) : -----



(3) المناقشة البيانية حسب قيم m حلول المعادلة $f(x) = mx$: -----

- لما $m = 0$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو : $x = 1$.

- لما $0 < m < \frac{1}{e^2}$ ، المعادلة تقبل ثلاث حلول .

- لما $m = \frac{1}{e^2}$ ، المعادلة تقبل ثلاث حلول أحدهم مضاعف .

- لما $m > \frac{1}{e^2}$ ، المعادلة تقبل حل وحيد .

----- (1) استعمال المكاملة بالتجزئة نبين أن: $I_1 = 1 - \frac{3}{e^2}$: -----

$$\text{لدينا : } I_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx \text{ ، أي : } I_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx \text{ ، أي : } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow u(x) = -\frac{1}{x} \\ v(x) = \ln x \rightarrow v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \text{ ، و منه :}$$

$$I_1 = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^{e^2} = 1 - \frac{3}{e^2} \text{ ، أي : } I_1 = -\frac{\ln x}{x} - \int_1^{e^2} \frac{1}{x^2} dx$$

----- (2) استعمال المكاملة بالتجزئة ، نبين أن : $I_{n+1} = \frac{-2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n$ حيث $n \geq 1$: -----

$$\text{لدينا : } I_{n+1} = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx \text{ ، أي : } \begin{cases} v'(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow v(x) = -\frac{1}{x} \\ u(x) = (\ln x)^{n+1} \rightarrow u'(x) = (n+1)(\ln x)^n \times \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{لدينا : } n \geq 1 \text{ ، (بعد الحساب) نجد : } I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n \text{ . و هو المطلوب}$$

----- (3) إستنتاج القيمة المضبوطة لـ I_2 ، و تفسير النتيجة هندسيا : -----

$$I_2 = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx = -\frac{2^2}{e^2} + 2I_1 = -\frac{10 + 2e^2}{e^2} \text{ (u.a)}$$

و منه : I_2 هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) ، والمستقيمين اللذين معادلتها : $x = 1$ ، $x = e^2$ والمستقيم ذو المعادلة $x = 0$.

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق