الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفـــــاع الوطـــــني
أركان الجيش الوطني الشعبي
دائرة الاستعمال و التحضير
مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية: 2017 - 2018
بكالوريا تجريبي
المدة: 3 ساعات ونصف

الشعبة: علوم تجريبية — اختبار الرياضيات — دورة ماي 2018

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين التاليين

# الموضوع الأول

## التمرين الأول : (5 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $C$ المعادلة $(z-2)\left[z^2-2\left(2+\sqrt{3}\right)z+8+4\sqrt{3}\right]=0$

2) نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ من المستوي المنسوب الى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ لواحقها على الترتيب :

$z_A=2$ ، $z_B=2+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=2+\sqrt{3}-i$

أ) أكتب على الشكل الأسي العدد $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ واستنتج طبيعة المثلث $ABC$ ثم أنشئ النقط $A$ ، $B$ ، $C$

ب) برهن أن النقطة $C$ هي صورة النقطة $B$ بالدوران $r$ الذي مركزه المبدأ $O$ وزاويته $\dfrac{-\pi}{6}$

جـ) أستنتج عمدة للعدد $z_B$ ثم عين القيم المضبوطة لكل من $Cos\dfrac{\pi}{12}$ و $Sin\dfrac{\pi}{12}$ $\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^2=4+2\sqrt{3}\right]$

3) $M$ نقطة من المستوي $(M\neq O)$ لاحقتها $z=ke^{i\theta}$ حيث $k\rangle 0$ و $\theta\in R$

$M_1$ صورة النقطة $M$ بالدوران $r$ و $M'$ نظيرة $M_1$ بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

أ) أثبت أن $z'$ لاحقة النقطة $M'$ تساوي $ke^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$

ب) * عين قيم $\theta$ التي تحقق $z'=z$

* أستنتج مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ التي تكون من أجلها $z'=z$

## التمرين الثاني: (4 ن)

أ - $(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $N$ كما يلي : $u_0=0$ و $u_{n+1}=3u_n-2n+3$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n\geq n$

2) أستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

3) بين أن المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما .

ب - $(v_n)$ متتالية عددية معرفة على $N$ كما يلي : $v_n=u_n-n+1$

1) برهن أن المتتالية $(v_n)$ هندسية ثم أكتب $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$ .

2) أحسب قيمة المجموع : $S_n=v_0^2+v_1^2+v_2^2+...+v_{n-1}^2$ بدلالة $n$.

3) أحسب قيمة المجموع : $K_n=(u_0)^2+(u_1-1)^2+(u_2-2)^2+...+(u_{n-1}-n+1)^2$ بدلالة $n$.

## التمرين الثالث: (4 ن)

تتكون مجموعة أشخاص من ثمانية رجال وأربع نساء من بينهم رجل واحد إسمه علي وإمرأة واحدة إسمها فاطمة نريد تكوين لجنة مكونة من ثلاث أعضاء لهم نفس المهام

1) أحسب إحتمال كل من الأحداث التالية

$A$ " تكوين لجنة تضم 3 رجال"

$B$ " تكوين لجنة تضم رجلا وإمرأتين"

$C$ " تكوين لجنة تضم علي"

$D$ " تكوين لجنة تضم إما علي وإما فاطمة"

2) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل إختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة

أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي $X$ ثم عرف قانون إحتماله

ب) أحسب الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي $X$.

## التمرين الرابع: (7 ن)

أ ) $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(2-x)e^x-2$.

1) أدرس تغيرات الدالة $g$.

2) * بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر $1.5 < \alpha < 1.6$

* عين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

ب) $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{e^x-1}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

و $(C)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) برهن أن الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$

2) بين أن الدالة $f$ تقبل الإشتقاق عند القيمة $0$ ثم أكتب معادلة المماس $(\Delta)$ لـ $(C)$ عند المبدأ $O$

3) أ) برهن أت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ وفسر النتيجة بيانيا ثم أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$ : $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(e^x-1)^2}$

جـ) تحقق من أن : $f(\alpha)=\alpha(2-\alpha)$ ثم أوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ و شكل جدول تغيرات الدالة $f$

4) - أحسب $f(x)+x^2$ وأستنتج وضعية $(C)$ بالنسبة إلى $(\Gamma)$ الذي معادلته : $y=-x^2$

- بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x^2=0$ وفسر النتيجة بيانيا

5) أرسم $(\Delta)$ و $(\Gamma)$ ثم أنشئ المنحنى $(C)$

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة الدفـــاع الوطـــني
أركان الجيش الوطني الشعبي
دائرة الاستعمال و التحضير
مديرية مدارس أشبال الأمة

السنة الدراسية: 2017 - 2018
بكالوريا تجريبي
المدة: 3 ساعات ونصف

الشعبة: علوم تجريبية | اختبار الرياضيات | دورة ماي 2018

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (5 ن)

$P(z)$ كثير الحدود في $C$ معرف بـ $P(z)=z^3-(2Sin\theta+iCos\theta)z^2+(1+iSin2\theta)z-iCos\theta$ ، $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

أ) 1) بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0$ يطلب تعيينه.

2) عين العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ حيث $P(z)=(z-iCos\theta)(z^2+\alpha z+\beta)$ ثم حل في $C$ المعادلة $P(z)=0$ حيث $z_1$ هو الحل الذي جزؤه التخيلي سالب و $z_2$ الحل الثالث

3) أكتب بدلالة $\theta$ الشكل الأسي للأعداد $z_0$ ، $z_1$ و $z_2$ .

ب) نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ من المستوي المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لواحقها على الترتيب:

$$z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}i \quad ، \quad z_B=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \quad و \quad z_C=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

1) علم النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ثم عين طبيعة المثلث $ABC$ .

2) برهن أن المبدأ $O$ مرجع الجملة $\{(A,2),(B,1),(C,-1)\}$

3) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $\lambda$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث : $2MA^2+MB^2-MC^2=\lambda$

### التمرين الثاني: (4 ن)

لعبة تعتمد على رمي كرة داخل دلو من بين مجموعة اللاعبين لدينا

$\frac{5}{6}$ لاعبين باليد اليمنى و $\frac{1}{6}$ لاعبين باليد اليسرى

إحتمال وضع الكرة داخل الدلو بالنسبة للاعبين باليد اليمنى هو $\frac{1}{4}$ و بالنسبة للاعب لليد اليسرى هو $\frac{1}{2}$

1) نختار لاعبا ونسمي الحادثين

$G$ " لاعب باليد اليسرى "

$S$ " اللاعب يضع الكرة داخل الدلو"

أ - أحسب إحتمال الحادث $G\cap S$

ب - أحسب إحتمال الحادث $S$

ج - أحسب إحتمال الحادث أن يكون اللاعب باليد اليمنى علما أنه وضع الكرة داخل الدلو

2) في هذا السؤال نسمي عمر اللاعب باليد اليمنى أنه يرمي كرتين واحدة بعد الأخرى (بفرض الرميتين مستقلتين)

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رميتين بعدد الكرات داخل الدلو المكونة

أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي $X$ ثم عرف قانون إحتماله.

ب) أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي $X$

## التمرين الثالث: (4 ن)

لكل سؤال توجد إجابة واحدة فقط صحيحة حددها مع التعليل

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

أ) لتكن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء و التي تحقق: $(2x+y-z-1)^2+(x+y-z)^2=0$

المجموعة $(\Gamma)$ هي : 1) مستقيم 2) مستوي 3) سطح كرة

ب) $(D)$ و $(D')$ مستقيمان معرفان وسيطيا بـ $(D):\begin{cases}x=1\\y=1+2k,k\in\mathbb{R}\\z=1+k\end{cases}$ و $(D'):\begin{cases}x=3-2\lambda\\y=7-4\lambda,\lambda\in\mathbb{R}\\z=2-\lambda\end{cases}$

$(D)$و$(D')$ هما مستقيمان : 1) متوازيان 2) متقاطعان 3) ليسا من نفس المستوي

جـ) $(S)$ سطح كرة مركزها $w(1,1,0)$ و نصف قطرها $2$

تقاطع $(S)$ مع $(D)$ هو : 1) مجموعة خالية 2) نقطة 3) نقطتين

د) $A$ و $B$ نقطتان متمايزتان من الفضاء

مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث $MA^2-MB^2=0$ هي: 1) مستقيم 2) مستوي 3) سطح كرة

## التمرين الرابع: (7 ن)

I) $g$ دالة عددية معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $g(x)=-x+\ln(x+1)$ .

1) أدرس تغيرات الدالة $g$ .

2) أستنتج إشارة $g(x)$ . ثم بين أنه من أجل كل $x\in]0,+\infty[$ فإن $0<\ln(x+1)<x$ .

II) $f$ دالة عددية معرفة على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ بـ : $f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ و $(C)$ تمثيلها البياني في

مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن الدالة $f$ فردية .

2) أحسب : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}1}f(x)$

3) بين أنه من أجل كل $x\in]-\infty,-1[\cup]+1,+\infty[$ فإن $f'(x)=\frac{x^2-3}{x^2-1}$ ثم شكل جدول تغيرات على المجال $]1,+\infty[$

4) برهن أن المستقيم $(D)$ الذي معادلته: $y=x$ مقارب للمنحني $(C)$ ثم أدرس وضعية $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم

$(D)$ ( لاحظ أن $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$ ، $x\in]+1,+\infty[$ )

5) أرسم المستقيم $(D)$ ثم أنشئ المنحنى $(C)$.

6) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $\int_2^4\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=5\ln5-6\ln3$

- أستنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بـ $(C)$ و المستقيمات : $y=x$ ، $x=2$ ، $x=4$ .

III) $(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}-\{0,1\}$ كما يلي: $u_n = f(n) - n$

1) برهن أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة

2) أحسب قيمة المجموع : $S_n = u_2 + u_3 + ... + u_n$ بدلالة $n$.

3) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$ و فإن $0 \langle u_n \langle \frac{2}{n-1}$ ثم عين $\lim_{x \to +\infty} u_n$

**بالتوفيق ...**

## تصحيح مقترح للبكالوريا التجريبي لمدارس أشبال الأمة

المستوى : الثالثة علوم تجريبية — دورة : ماي 2018

# التَصْحِيحْ النموذجي للبكالُوريَا التجْريبي دَورة مَايْ 2018 — الموضوع 01

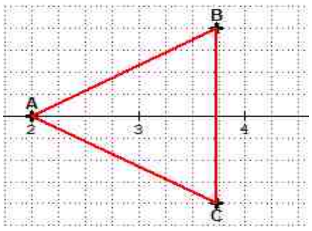
| تصحيح التمرين الأول (05 نقاط) (الأعداد المركبة) | التنقيط |
|---|---|

**1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة** $(z-2)\left[z^2-2\left(2+\sqrt{3}\right)z+8+4\sqrt{3}\right]$ : ---------------------------------------

لدينا : $\begin{cases} z-2=0 \\ z^2-2\left(2+\sqrt{3}\right)z+8+4\sqrt{3}=0 \end{cases}$ و ، أي : $\begin{cases} z=2 \\ z^2-2\left(2+\sqrt{3}\right)z+8+4\sqrt{3}=0 \end{cases}$ و ، أي : $\Delta=4i^2$

أي : $\sqrt{\Delta}=2i$ ، و منه : $z_1=2$ ، $z_2=2+\sqrt{3}+i$ ، $z_3=2+\sqrt{3}-i$ .

**2) أ) كتابة على الشكل الأسي العدد** $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ : ------------------------ ------------------------------




$\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=1+\sqrt{3}i=e^{i\frac{\pi}{3}}$ . لدينا : $\left|\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1$ و

$\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ، $AB=AC$ وَ $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ و منه

المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع .

**ب) برهان أن $C$ هي صورة $B$ بالدوران $r$** : -------------------------------------------------------

لدينا : $r:z'=e^{-\frac{\pi}{6}i}z$ ، وَ $r(B)=C$ يكافئ $z_C=e^{-\frac{\pi}{6}i}z_B$ ، أي : $\left(2+\sqrt{3}+i\right)$ $z_C=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)\left(2+\sqrt{3}+i\right)$ ، و منه:

$z_C=2+\sqrt{3}-i$ ، إذن $C$ هي صورة $B$ بالدوران $r$ .

**ج) إستنتاج عمدة للعدد $z_B$ و تعيين القيمة المضبوطة لـ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$** : --------------------------

لدينا : $z_C=e^{-\frac{\pi}{6}i}z_B$ ، أي : $\overline{z_B}=e^{-\frac{\pi}{6}i}z_B$ . $\left(z_C=\overline{z_B}\right)$ ، ومنه: $\dfrac{\overline{z_B}}{z_B}=e^{-\frac{\pi}{6}i}$ ، أي: $\arg\left(\overline{z_B}\right)-\arg\left(z_B\right)=-\dfrac{\pi}{6}$

أي : $-2\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ ، و منه : $\arg\left(z_B\right)=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$ ، ( لأنّ : $\mathrm{Re}\left(z_B\right)>0$ و $\mathrm{Im}\left(z_B\right)>0$ ) .

القيمة المضبوطة لـ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$ : لدينا $z_B=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ، نطابق الشكل الجبري

مع الشكل المثلثي نجد : $\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \\ \sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$ .

**3) أ) إثبات أن $z'$ تساوي $ke^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$** : ----------------------------------------------------------------

لدينا: $r(M)=M'$ معناه $z_1=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)z$ أي : $z_1=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$ ، أي : $z_1=e^{-i\frac{\pi}{6}}\left(ke^{i\theta}\right)=ke^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$

و بما أنّ : $z'=\overline{z_1}$ ، إذن : $z'=ke^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$ .

**ب)تعيين قيمة $\theta$ التي تحقق $z'=z$** : ------------------------------------------------------------

$z'=z$ معناه : $ke^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}=ke^{i\theta}$ ، أي : $\theta=\dfrac{\pi}{6}-\theta+2k\pi$ ، و منه : $\theta=\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ .

إذن : $z=ke^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\pi\right)}$ ، أي : $OM=k$ و $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{12}+k\pi$ ، نلاحظ أنّ $B$ تنتمي إلى المجموعة ،

إذن : مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تكون من أجلها $z'=z$ هي **المستقيم** $(OB)$ .

| **تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)** **(المتتاليات العددية)** | التنقيط |
|---|---|

أ) 1) **برهان بالتراجع أنه من أجل كل** $n\in\mathbb{N}$ **:** $u_n\geq n$

نضع : $P(n):u_n\geq n$

المرحلة1: من أجل $n=0$ لدينا $u_0=0$ أي : $u_0\geq 0$ و منه $P(0)$ محققة .

المرحلة2: نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ . أي نفرض أن $u_n\geq n$ صحيحة و نبين أن $u_{n+1}\geq n+1$ .

- لدينا فرضا أنّ: $u_n\geq n$ ، أي : $3u_n-2n+3\geq n+3$ ، و منه : $u_{n+1}\geq n+1$ .

و أخيرا الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي $n$ .

**2) إستنتاج** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ **:**

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ ، و نعلم أنّ : $u_n\geq n$ و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ ، حسب النهايات بالمقارنة .

**3) بيان أنّ المتتالية** $(u_n)$ **متزايدة تماما :**

من أجل كل عدد طبيعي $n$ ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$ :

لدينا: $u_{n+1}-u_n=3u_n-2n+3-u_n=2u_n-2n+3=2(u_n-n)+3>0$ . لأنّ : $(u_n-n\geq 0)$ ،

و منه فإنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ .

**ب)1) بيان أن** $(v_n)$ **متتالية هندسية :**

لدينا: $v_n=u_n-n+1$ ،أي: $v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)+1=3u_n-2n+3-n=3(u_n-n+1)$ أي : $v_{n+1}=3v_n$

إذن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=3$ ، و حدها الأول : $v_0=1$ .

**التعبير عن** $v_n$ **و** $u_n$ **بدلالة** $n$ **:**

- عبارة $v_n$ **:** $v_n=v_0\times q^n$ ، أي : $v_n=3^n$ .
- عبارة $u_n$ **:** $u_n=v_n+n-1$ ، **أي :** $u_n=3^n+n-1$ .

**2) حساب المجموع** $S_n$**:**

$S_n=v_0^2+\left(v_0^2q^2\right)+....+v_0^2\left(q^2\right)^{n-1}$ ، أي : $S_n=v_0^2\left[1+\left(q^2\right)+\left(q^2\right)^2+...+\left(q^2\right)^{n-1}\right]$ ، أي :

$S_n=\left[1+(9)+(9)^2+...+(9)^{n-1}\right]$ ، و منه : $S_n=\frac{9^n-1}{8}$ **( متتالية هندسية أساسها 9 و حدها الأول 1 )**

**3) حساب قيمة المجموع** $K_n$ **:**

لدينا : $v_n=u_n-n+1$ ، أي : $v_n-1=u_n-n$ . و منه : $K_n=(v_0-1)^2+(v_1-1)^2+...+(v_n-1)^2$ ،

و منه : $K_n=S_n+n-3^n+1$ . ( بعد الحساب و التبسيط )

| **تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط)** **(الإحتمالات)** | التنقيط |
|---|---|

- أوّلا نحسب عدد الإمكانيات : $C_{12}^3=220$ .

**1) حساب إحتمال الحوادث :**

- إحتمال تكوين لجنة تضم 3 رجال : $P(A)=\frac{C_8^3}{220}=\frac{56}{220}$ .
- إحتمال تكوين لجنة تضم رجلا و إمرأتين : $P(B)=\frac{C_8^1\times C_4^2}{220}=\frac{8\times 6}{220}=\frac{48}{220}$ .
- إحتمال تكوين لجنة تضم علي : $P(A)=\frac{C_1^1\times C_{11}^2}{220}=\frac{1\times 55}{220}=\frac{55}{220}$ .

- إحتمال تكوين لجنة تضم إمّاعلي وَ إمّا فاطمة : $P(D)=\frac{(C_1^1\times C_{10}^2)+(C_1^1\times C_{10}^2)}{220}=\frac{90}{220}$ .

**2) أ) تعيين القيم الممكنة لــ $X$ ، ثم تعيين قانون الإحتمال :** ------------------------------------------

$X=\{0;1;2;3\}$ ، هي قيم المتغير العشوائي $X$ .

**- قانون الإحتمال :**

$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_{12}^3}=\frac{4}{220}$ ، $P(X=1)=\frac{C_8^1\times C_4^2}{C_{12}^3}=\frac{48}{220}$ ، $P(X=2)=\frac{C_8^2\times C_4^1}{C_{12}^3}=\frac{112}{220}$ ،

$P(X=1)=\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{56}{220}$ .

**ب) حساب الإنحراف المعياري لــ $X$ :** ------------------------------------------------------------

- **نحسب أوّلا الأمل الرياضي :** بعد الحساب نجد : $E(X)=2$ .

**ثانيا نحسب التباين :** بعد الحساب نجد : $V(X)=0,54$ .

**ثالثا نحسب الإنحراف المعياري :** $\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0,54}=0,73$

| التنقيط | **تصحيح التمرين الرابع (07نقاط)** **(الدالة الأسية)** |
|---|---|

**الجزء الأول:**

**1) دراسة إتجاه تغير الدالة $g$ :** ------------------------------------------------------------

الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي:

$g'(x)=(1-x)e^x$ . و منه الإشارة من إشارة $(1-x)$ .

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-2$ وَ $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ .

**جدول التغيرات الدالة $g$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0,7$ | $\searrow$ | $-2$ |

**3) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ :** -------------

$g(0)=0$ ، وَ الدالة $g$ مستمرة و متناقصة تماما على $]1,5;1,6[$

و لدينا، $g(1,5)\times g(1,6)<0$ و بالتالي حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد حلا $\alpha$ من $]1,5;1,6[$ حيث $g(\alpha)=0$ .

**4) إشـــارة $g(x)$ :** --------------------------------

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**الجزء الثاني:** لدينا : $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{e^x-1} \;;x\neq 0 \\ 0\;;x=0 \end{cases}$

**1) بيان أن الدالة $f$ مستمرة $\mathbb{R}$ :** ------------------------------------------------------------

لدينا : $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ ، و منه $f$ مستمرة عند $0$ ، إذن فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ .

**ب) بيان أن الدالة $f$ تقبل الإشتقاق عند 0 :** ----------------------------------------------------

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1=f'(0)$ ، و منه الدالة $f$ قابلة للإشتقاق عند $x_0=0$ .

**- معادلة المماس** $(\Delta)$ : $(\Delta):y=x$ .

**3) أ):** ---------------------------------------------------------------------------------------

- **حساب** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، و منه $(C)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي $(y=0)$ .

**حساب** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ .

**ب) بيان أنه من أجل كل** $x \neq 0$ : $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(e^x-1)^2}$ : ----------------------------------------------

$$f'(x)=\frac{2x(e^x-1)-x^2e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2xe^x-2x-x^2e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{x(2e^x-2-xe^x)}{(e^x-1)^2}=\frac{x[(2-x)e^x-2]}{(e^x-1)^2}=\frac{x.g(x)}{(e^x-1)^2}$$

**ج)** ----------------------------------------------------------------------------------------------

**التحقق أنّ** $f(\alpha)=\alpha(2-\alpha)$ : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{e^\alpha-1}$ ، لدينا : $g(\alpha)=0$ ، أي : $(2-\alpha)e^\alpha-2=0$ ، أي :

$e^\alpha=\dfrac{2}{2-\alpha}$ ، إذن : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{\dfrac{2}{2-\alpha}-1}=\dfrac{\alpha^2}{\dfrac{2-2+\alpha}{2-\alpha}}=\dfrac{\alpha^2(2-\alpha)}{\alpha}=\alpha(2-\alpha)$ .

**حصر** $f(\alpha)$ : $0,6<f(\alpha)<0,8$ .

**ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة** $f$ ، **و تشكيل جدول تغيّراتها :** --------------------------------------------

نلخص إشـــــارة $f'(x)$ في الجدول المقابل :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**- جدول التغيرات**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | | $0,7$ | $\searrow$ | $0$ |

**ج) حساب :** $f(x)+x^2$ ، **واستنتاج وضعية** $(C)$ بالنسبة للمنحني $(\Gamma)$ الذي معادلته $y=-x^2$ : ----------------------------------

لدينا : $f(x)+x^2=\dfrac{x^2}{e^x-1}+x^2=\dfrac{x^2+x^2e^x-x^2}{e^x-1}=\dfrac{x^2e^x}{e^x-1}$ .

**الوضعية**: نلاحظ أن الإشارة من إشارة $(e^x-1)$ .

و عليه نلخص الوضعية في الجدول التالي :

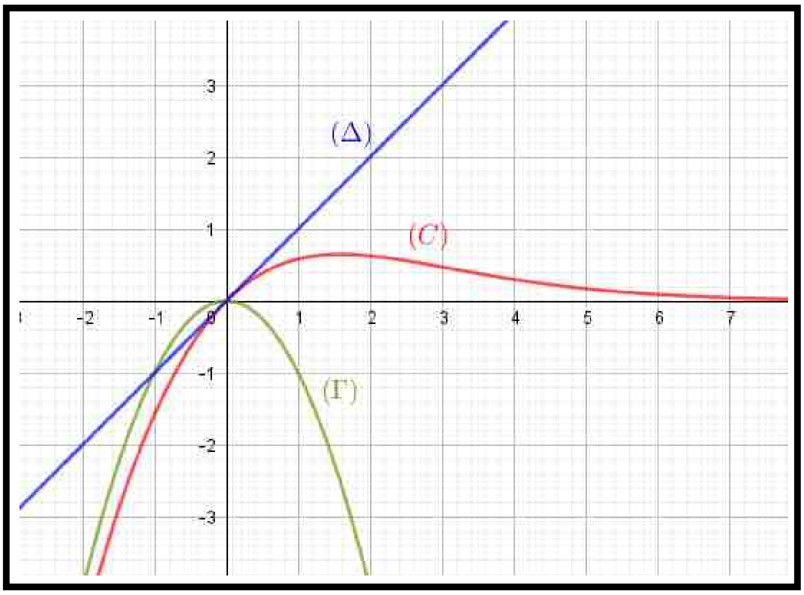
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)+x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| **الوضعية** | | $(C)$ يقع تحت $(\Gamma)$ | يقطع | $(C)$ يقع فوق $(\Gamma)$ | |

**- بيان أن** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x^2=0$ **و تفسر هندسيا :**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x^2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2e^x}{e^x-1}=0$ ،

**التفسير الهندسي :** المنحني $(C)$ و $(\Gamma)$ متقاربان عند $-\infty$ .

**5) رسم** $\Delta$ **و** $(\Gamma)$ **ثم إنشاء** $(C)$ : ----------------------------------------------------------------



**6) المناقشة البيانية ، لعدد و إشارة حلول المعادلة** $f(x)=f(m)$ : ----------------------------------

لدينا : $f(x)=f(m)$ ، لنضع $f(m)=M$ :

- لما $M=f(\alpha)$ ، أي : $m=\alpha$ ، و منه للمعادلة حل مضاعف هو $x=\alpha$ .

- لما $M\in]0;f(\alpha)[$ ، أي : $m\in]0;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ ، و منه للمعادلة حلان موجبان .

لما $M=0$ ، أي : $m=0$ ، و منه المعادلة تقبل حلا معدوما .

لما $M\in]-\infty;0[$ ، أي : $m\in]-\infty;0[$ ، و منه المعادلة تقبل حلا سالبا .

**كتابة الاستاذ : بلقاسم عبدالرزاق**

# التَصْحِيحْ النموذجي للبكالُوريَا التجْريبي دَورة مَايْ 2018 — الموضوع 02

## تصحيح التمرين الأول (05 نقاط) (الأعداد المركبة) — التنقيط

أ) 1) **بيان أنّ المعادلة** $P(z)=0$ **تقبل حلا تخيليا صرفا :** ------------------------------------------

نضع : $z=y_0 i$ ، و لدينا : $P(z)=0$ ، و منه : $P(y_0 i)=0$ ، معناه : $\begin{cases}(2\sin\theta)y_0^{\,2}-y_0\sin 2\theta=0\\ -y_0^3+y_0^2\cos\theta-\cos\theta=0\end{cases}$

و منه : $y_0=\cos\theta$ ، إذن : $z=i\cos\theta$ .

2) **تعيين العددين الحقيقيين** $\alpha$ **و** $\beta$ **:** ------------------------------ ------------------------------

بعد النشر و التبسيط و استعمال المطابقة نجد : $\alpha=-2\cos\theta$ و $\beta=0$ .

و منه : $P(z)=(z-i\cos\theta)(z^2-2\sin\theta)$ .

**حل في** $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ **:** أي : $z_0=i\cos\theta$ ، $z_1=\sin\theta-i\cos\theta$ ، $z_2=\sin\theta+i\cos\theta$ .

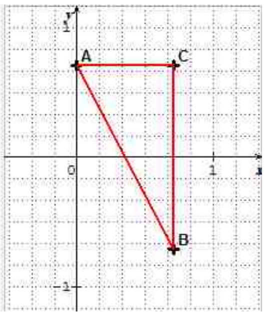
3) **كتابة بدلالة** $\theta$ **الشكل الأسي للأعداد** $z_2;z_1;z_0$ : ----------------------------------------------

لدينا : $z_0=\cos\theta e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، وَ $z_1=\sin\theta-i\cos\theta=-i(\cos\theta+i\sin\theta)=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ ،

و $z_2=\sin\theta+i\cos\theta=i(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ .

ب) 1) **تعليم النقط** $A;B;C$ ، **ثم تعيين طبيعة المثلث** $ABC$ : -----------------------------------

نلاحظ أنّ المثلث $ABC$ قائم في $C$ .




2) **حساب** $z_O$ : $z_O=\dfrac{2z_A+z_B-z_C}{2}=\dfrac{\sqrt{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}{2}=0$

ومنه المبدأ $O$ هو مرجح الجملة $\{(A;2);(B;1);(C;-1)\}$ .

3) **المناقشة حسب قيم الوسيط** $\lambda$ مجموعة النقط $M$ : -------------------------

لدينا : $O$ هي مرجح الجملة $\{(A;2);(B;1);(C;-1)\}$ ، وَ $2MA^2+MB^2+MC^2=\lambda$

أي : $2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2=\lambda$ ، و منه :

$OM^2=\dfrac{\lambda-1}{2}$ ، الآن نناقش حسب قيم $\lambda$ :

- إذا كان $\lambda<1$ : مجموعة النقط هي مجموعة خالية .
- إذا كان $\lambda=1$ : مجموعة النقط هي النقطة $O$ .
- إذا كان $\lambda>1$ : مجموعة النقط هي دائرة مركزها $O$ وَ نصف قطرها $r=\sqrt{\dfrac{\lambda-1}{2}}$ .

## تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (الإحتمالات) — التنقيط

1) **نرمز لليد اليمنى بـ** $D$ **وَ نرمز لليد اليسرى بـ** $G$ : --------------------------------------------------

**أنظر شجرة الإحتمالات في الأسفل ( لتسهيل الحل ) ....** .

أ) إحتمال الحادث $G\cap S$ : $p(G\cap S)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$ .

ب) إحتمال الحادث $S$ : $p(S)=p(G\cap S)+p(D\cap S)=\dfrac{1}{12}+\left(\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{24}$ .

ج) حساب الإحتمال الشرطي $p_S(D)$ : $p_S(D)=\dfrac{p(D\cap S)}{p(S)}=\dfrac{\frac{5}{24}}{\frac{7}{24}}=\dfrac{5}{7}$ .

2) أ) تعيين القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X$ ، ثم تعريف قانون إحتماله : ----------------------------

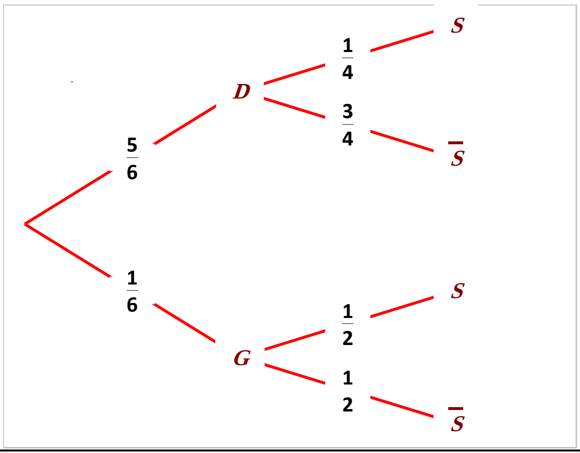
- قيم المتغيّر العشوائي $X$ هي : $X=\{0;1;2\}$ .

- تعريف قانون الإحتمال :

$p(X=0)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$ ، $p(X=1)=\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{6}{16}$ ، $p(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ .

ب) حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي $X$ : --------------------------------------------------

$E(X)=\frac{(9\times0)+(6\times1)+(1\times2)}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$ .




**تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط)** **(الهندسة الفضائية)** التنقيط

**تحديد الإجابة الصحيحة مع التعليل :**

**أ) الإجابة الصحيحة هي رقم (1) لأنّ :** لدينا $(2x+y-z-1)^2+(x+y-z)^2=0$ معناه :

$\begin{cases}(P):2x+y-z-1=0\\(P'):x+y-z=0\end{cases}$ و ، أي : $\overrightarrow{n_{(P)}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{n_{(P')}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ ، $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{1}$ و منه $\overrightarrow{n_{(P)}}$ و $\overrightarrow{n_{(P)}}$ غير مرتبطين

خطيا ، و منه مجموعة النقط هي مستقيم .

**ب) الإجابة الصحيحة هي رقم (3) لأنّ :** لدينا $\overrightarrow{n_{(D)}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{n_{(D')}}\begin{pmatrix}-2\\-4\\-1\end{pmatrix}$ ، $\frac{2}{-4}\neq\frac{0}{2}$ ، إذن : $\overrightarrow{n_{(D)}}$ و $\overrightarrow{n_{(D')}}$

غير مرتبطين خطيا ، و لدينا : $\begin{cases}1=3-2\lambda\\1+2k=7-4\lambda\\1+k=2-\lambda\end{cases}$ معناه : $\begin{cases}\lambda=1\\k=1\\k=0\end{cases}$ مستحيل ، إذن : $(D)$ و $(D')$ ليسا من

نفس المستوى .

**ج) الإجابة الصحيحة هي رقم (3) لأنّ :** لدينا $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=4$ . بعد التعويض و الحساب

نجد : $5k^2+2k-3=0$ ، إذن : $k=-1$ أو $k=\frac{3}{5}$ ، أي أنّ : التقاطع هو نقطتين $M_1$ وَ $M_2$ حيث :

$(S)\cap(D)=\left\{M_1(1;-1;0);M_2\left(1;\frac{11}{5};\frac{8}{5}\right)\right\}$ .

**د) الإجابة الصحيحة هي رقم (2) لأنّ :** لدينا $MA^2-MB^2=0$ ، أي : $\overrightarrow{MA}^2-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)^2=0$ ،

ومنه : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=\frac{AB^2}{2}$ ، إذن مجموعة النقط $M$ من الفضاء هي مستوى .

| تصحيح التمرين الرابع (07نقاط) (الدالة اللوغاريتمية) | التنقيط |
|---|---|

**الجزء الأول:**

**I) 1) دراسة تغيرات الدالة $g$ :** ---

الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي: $g'(x)=-\dfrac{x}{x+1}$ . و منه من أجل $x\in[0;+\infty[$ : $g'(x)\le 0$

$g(0)=0$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ .

**جدول التغيرات الدالة $g$ :**

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**2) إستنتاج إشارة $g(x)$ :** ---

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $0$ | $-$ | |

من جدول التغيرات نلاحظ أن من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ : $g(x)\le 0$ .

- لدينا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ : $g(x)<0$ ، و منه : $0<\ln(x+1)<x$ .

II) لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ : $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ :

**1) بيان أن الدالة $f$ فردية :** ---

لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ، فإنّ : $-x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ، وَ $f(-x)=-f(x)$ ،

إذن الدالة $f$ فردية .

**2) حساب النهايات :** ---

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=0$ .

- $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$ .

**3) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة $f$ ، و تشكيل جدول تغيّراتها :** ---

من أجل كل $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ : $f'(x)=1+\dfrac{\dfrac{x-1-(x-1)}{(x-1)^2}}{\dfrac{x+1}{x-1}}=1+\dfrac{-2}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$ ،

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x^2-3)$ ، أي : $x=\sqrt{3}$ .

**جدول تغيرات الدالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$ :** ---

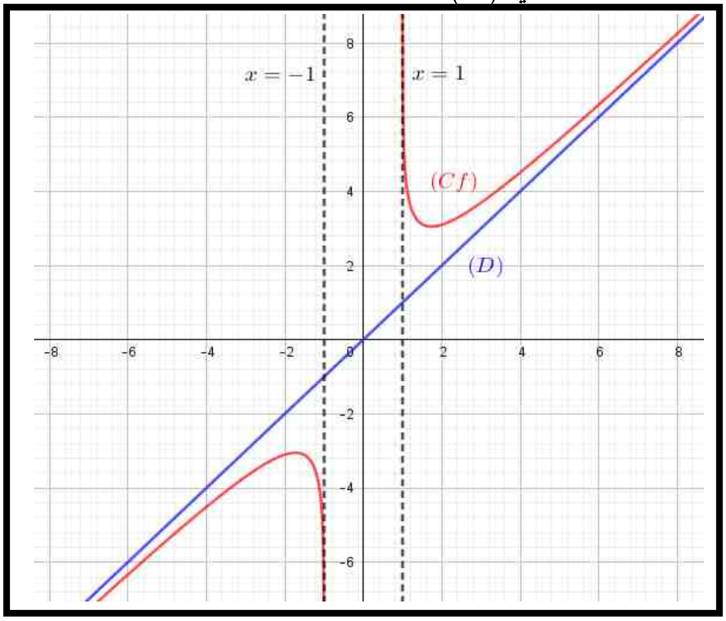
| $x$ | $1$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**4) برهان أن $(D)$ مقارب للمنحنى $(C)$ :** ---

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right]=0$ ، و منه فإنّ $(D)$ مقارب للمنحنى $(C)$ بجوار $+\infty$ .

**الوضعية :** نلاحظ أنّ من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ : $f(x)-x>0$ ،
و منه فإنّ المنحنى $(C)$ يقع فوق $(D)$ .

5) رسم المستقيم $(D)$ و إنشاء المنحني $(C)$ : ---------------------------------------------------




6) باستعمال المكاملة بالتجزئة نبرهن أن: $\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = 5\ln 5 - 6\ln 3$ : ----------------------------

لدينا : $\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = \int_2^4 [\ln(x+1)-\ln(x-1)]dx$ ، أي :

$\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = [(x+1)\ln(x+1)-(x-1)\ln(x-1)]_2^4 = 5\ln 5 - 6\ln 3$ ، و هو المطلوب .

**إستنتاج مساحة الحيز :** $A = \int_2^4 (f(x)-x)dx = \int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = (5\ln 5 - 6\ln 3)u.a$ .

III) $(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}-\{0;1\}$ كما يلي : $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ :

1) **بيان أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة :** بما أنّ الدالة $x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ متناقصة ، فإن المتتالية $(u_n)$ متناقصة

2) **حساب بدلالة $n$ المجموع** $S_n$ : ------------------------------------------------------------------

لدينا : $S_n = (\ln 3)+(\ln 4-\ln 2)+(\ln 5-\ln 3)+....+(\ln(n)-\ln(n-2))+(\ln(n+1)-\ln(n-1))$ ، أي:

بالجمع طرف لطرف نجد : $S_n = -\ln 2 + \ln(n+1)$ ، و منه : $S_n = \ln\left(\frac{n+1}{2}\right)$ .

3) **برهان من أجل كل** $n \in \mathbb{N}-\{0;1\}$ : $0 < u_n < \frac{2}{n-1}$ ، **ثم تعيين** $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ----------------------------

لدينا : $0 < \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) < \frac{2}{n-1}$ ، أي : $0 < \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) < \frac{2}{n-1}$ ، و منه : $0 < u_n < \frac{2}{n-1}$ .

**تعيين نهاية المتتالية** $(u_n)$ :

لدينا : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n-1}\right) = 0$ ، و منه : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ، حسب مبرهنة النهايات بالحصر .

**كتابة الأستاذ :** بلقاسم عبدالرزاق