موضوع تدريبي للتحضير الجيد لباك 2018

التمرين الأول : (05 نقاط) مشاهدة الحل

f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+2}$.

1. أدرس تغيرات الدالة f .

2. (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n حيث : $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<2$.

ب)أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثمَ إستنتج أنَ المتتالية (u_n) متقاربة .

3. أ) برهن أنَه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}(2-u_n)$.

ب) بين أنَه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<2-u_n\le 2^{1-n}$ ثمَ إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4. (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$

أ) برهن أنَ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{4}$ يطلب حساب حدها الأول .

ب) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ثمَ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثاني (04 نقاط): مشاهدة الحل

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(1;1;0)$، $B(1;-1;2)$ $C(0;1;1)$ و $D(1;1;4)$.

1)أ) بين أن النقط A، B و C تعين مستويا (ABC).

ب) بين المستوي (ABC) هو نفسه المستوي (P) ذي المعادلة $x+y+z-2=0$.

ج) تحقق من أنَ النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (P).

2)لتكن $(\mathscr{C})$ الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ولتكن النقطة H منتصف القطعة $[AB]$.

أ) بين أنَ المثلث ABC قائم في النقطة C.

ب) إستنتج مركز الدائرة $(\mathscr{C})$المحيطة بالمثلث ABC .

3)ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستوي (P)والمار من النقطة H . بين أنَ جملة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)هي : $\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=\alpha\\ z=1+\alpha\end{cases};(\alpha\in\mathbb{R})$

4)لتكن M نقطة من (Δ).

أ) برهن أنَ : $MA=MB=MC$.

ب)بين أنه توجد نقطة وحيدة I من المستقيم (Δ) بحيث يكون : $IA=ID$.يطلب تعيين إحداثياتها.

ج) إستنتج مما سبق أنَ النقط C,B,A و D تنتمي إلى نفس سطح الكرة (S) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

👍التمرين الثالث ☹☺☺:(04 نقاط) مشاهدة الحل

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2-4z+16=0$.

ب) أكتب حلي المعادلة على الشكل الأسي .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط B,A و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=2+2i\sqrt{3}$, $z_B=2-2i\sqrt{3}$ و $z_C=8$.

أ) تحقق أنَ : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

ب)أكتب العدد $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ على الشكل المثلثي ثمَ استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=4$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

أ) أكتب العبارة المركبة للدوران r.

ب)بين أنَ صورة النقطة A بالدوران r هي النقطة B .

ج) عين طبيعة الرباعي $OA\Omega B$.

👍التمرين الرابع : ☺😐☺ (07 نقاط) مشاهدة الحل

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=(2x+1)e^x-1$

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) أحسب $g(0)$ ثمَ إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعر فة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x(e^x-1)^2$

نسمي $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) أبين أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ).

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=(e^x-1)\times g(x)$.

ب) إستنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) أ) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ب) أرسم (T) ، (Δ) و $(\mathscr{C}_f)$.

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): f(x)=mx$.

6) أحسب بـ cm^2 المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين :
$x = ln 2,\ \ x = 0$.

✌بالتوفيق ☺والنجاح بإمتياز لطلابنا في الباك 2018☺ ❀ ❀

تصحيح الموضوع التدريبي ☺ للتحضير ☹ الجيد لباك 2018 ☺

حل التمرين الأول ☺☹☺: الرجوع إلى نص التمرين

لدينا $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+2}$.

1. دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

- **حساب المشتقة :**

$$f'(x)=\frac{3(x+2)-1\times(3x+2)}{(x+2)^2}=\frac{3x+6-3x-2}{(x+2)^2}=\frac{4}{(x+2)^2}$$

- **دراسة إشارة المشتقة :**

من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\in[0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)>0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2. لدينا $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n حيث : $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}$

أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<2$.

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1) من أجل $n=0$ لدينا :

$u_0=0$ ومنه $0\le u_0<2$ أي $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2) نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنّ $0\le u_n<2$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنّ $0\le u_{n+1}<2$

لدينا : $0\le u_n<2$ فرضا ولدينا $u_{n+1}=f(u_n)$

ومنه $f(0)\le f(u_n)<f(2)$ لأنّ f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

أي $1\le u_{n+1}<2$ وبالتالي : $0\le u_{n+1}<2$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<2$.

ب) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n):

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}-u_n=\dfrac{3u_n+2-u_n^2-2u_n}{u_n+2}$

أي $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^2+u_n+2}{u_n+2}=\dfrac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+2}$

إشارة $u_{n+1}-u_n$ نفس إشارة $2-u_n$ لأنّ $1\le u_n+1<3$ من أجل $0\le u_n<2$

دراسة إشارة العبارة $-u_n^2+u_n+2=(2-u_n)(u_n+1)$:

$u_n \in$	0 2
$-u_n^2+u_n+2$	+

ومنه $u_{n+1}-u_n>0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

إستنتاج أنَ المتتالية (u_n) متقاربة :

المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

3. أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(2-u_n)$:

$$2-u_{n+1}=2-\frac{3u_n+2}{u_n+2}=\frac{2u_n+4-3u_n-2}{u_n+2}$$

أي $2-u_{n+1}=\frac{2-u_n}{u_n+2}$ ومنه $2-u_{n+1}\le\frac{2-u_n}{2}$

أي $2-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(2-u_n)$

ب)تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $0<2-u_n\le 2^{1-n}$

لدينا : $2-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(2-u_n)$

$$2-u_1\le\frac{1}{2}(2-u_0)$$

$$2-u_2\le\frac{1}{2}(2-u_1)$$

$$2-u_3\le\frac{1}{2}(2-u_2)$$

ومنه :

.

.

.

$$2-u_{n-1}\le\frac{1}{2}(2-u_{n-2})$$

$$2-u_n\le\frac{1}{2}(2-u_{n-1})$$

بالضرب نجد :

$(2-u_1)\times(2-u_2)\times(2-u_3)\times\ldots\times(2-u_{n-1})\times(2-u_n)\le\frac{1}{2}(2-u_0)\times\frac{1}{2}(2-u_1)\times\frac{1}{2}(2-u_2)\times\ldots\times\frac{1}{2}(2-u_{n-2})\times\frac{1}{2}(2-u_{n-1})$ بعد الاختزال

نجد : $2-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n\times(2-u_0)$

ومنه $2-u_n\le 2^{-n}\times 2$ أي $2-u_n\le 2^{1-n}$

ولدينا : $0\le u_n<2$ ومنه $-2<-u_n\le 0$ وبالتالي $0<2-u_n\le 2$ أي $0<2-u_n$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $0<2-u_n\le 2^{1-n}$

إستنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}2^{1-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{(1-n)\ln 2}=0$ وبما أنَ $0<2-u_n\le 2^{1-n}$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}(2-u_n)=0$

$2-\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$.

4. لدينا (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$

أ) البرهان أنَ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{4}$:

لدينا : $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+1}=\dfrac{\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}-2}{\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}+1}=\dfrac{\dfrac{3u_n+2-2u_n-4}{u_n+2}}{\dfrac{3u_n+2+u_n+2}{u_n+2}}$

ومنه $v_{n+1}=\dfrac{\dfrac{u_n-2}{u_n+2}}{\dfrac{4u_n+4}{u_n+2}}=\dfrac{u_n-2}{u_n+2}\times\dfrac{u_n+2}{4(u_n+1)}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{u_n-2}{u_n+1}=\dfrac{1}{4}\times v_n$ أي $v_{n+1}=\dfrac{1}{4}\times v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{4}$

حساب حدها الأول : $v_0=\dfrac{u_0-2}{u_0+1}=-2$

ب) كتابة v_n و u_n بدلالة n :

$$v_n=v_0\times q^n=-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

إستنتاج عبارة u_n :

لدينا : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$ ومنه $v_n(u_n+1)=u_n-2$ أي $v_n\times u_n+v_n=u_n-2$

ومنه $v_n\times u_n-u_n=-v_n-2$ اي $u_n=\dfrac{-v_n-2}{v_n-1}$

وبالتالي : $u_n=\dfrac{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-2}{-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-2}{-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}\right)=2$ لأنَ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=2$$

👍حل التمرين الثاني ☹☺☺☺ : الرجوع إلى نص التمرين

لدينا النقط $A(1;1;0)$, $B(1;-1;2)$ $C(0;1;1)$ و $D(1;1;4)$.

1) أ) تبيان أن النقط A, B و C تعين مستويا (ABC):

لدينا : $\overrightarrow{CB}(1;-2;1)$ و $\overrightarrow{CA}(1;0;-1)$

إذن لدينا $\frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-2} \neq \frac{1}{1}$ أي لا يوجد عدد حقيقي k بحيث يكون $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$

ومنه الشعاعان $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA}$ غير مرتبطين خطيا .

ومنه النقط B, A و C ليست في إستقامية فهي تعين مستويا (ABC)

ب) تبيان أنَ المستوي (ABC) هو نفسه المستوي (P) ذي المعادلة: $x+y+z-2=0$

أي نبين أنَ النقط B, A و C تنتمي إلى المستوي (P).

نعوض بإحداثيات النقط B, A و C في معادلة (P) نجد : $\begin{cases} 1+1+0-2=0 \\ 1-1+2-2=0 \\ 0+1+1-2=0 \end{cases}$

ومنه النقط B, A و C تنتمي إلى المستوي (P)أي المستوي (ABC) هو نفسه المستوي (P).

ج) تحقق من أنَ النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (P):

نعوض بإحداثيات النقطة D في معادلة (P) نجد : $1+1+4-2=0$ أي $4=0$ (غير محققة)

وبالتالي $D \notin (P)$.

2) لدينا $(\mathscr{C})$ الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و H منتصف القطعة $[AB]$.

أ) تبيان أنَ المثلث ABC قائم في النقطة C:

لدينا : $\overrightarrow{CB}(1;-2;1)$ و $\overrightarrow{CA}(1;0;-1)$

إذن : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 1\times1+0\times(-2)+(-1)\times1 = 1-1 = 0$ ومنه $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$

أي المثلث ABC قائم في النقطة C.

ب)إستنتاج مركز الدائرة $(\mathscr{C})$المحيطة بالمثلث ABC:

مركز الدائرة $(\mathscr{C})$المحيطة بالمثلث القائم ABC هي النقطة H منتصف القطعة $[AB]$ (منتصف الوتر).

إحداثيات النقطة H هي : $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)=(1;0;1)$

مركز الدائرة $(\mathscr{C})$المحيطة بالمثلث ABC هي النقطة $H(1;0;1)$

5) لدينا (Δ) المستقيم العمودي على المستوي (P)والمار من النقطة H.

تبيان أنَ جملة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)هي : $(\alpha \in \mathbb{R})$; $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$:

شعاع توجيه للمستقيم (Δ) شعاع ناظمي للمستوي (P) لأنَ $(\Delta)\perp(P)$

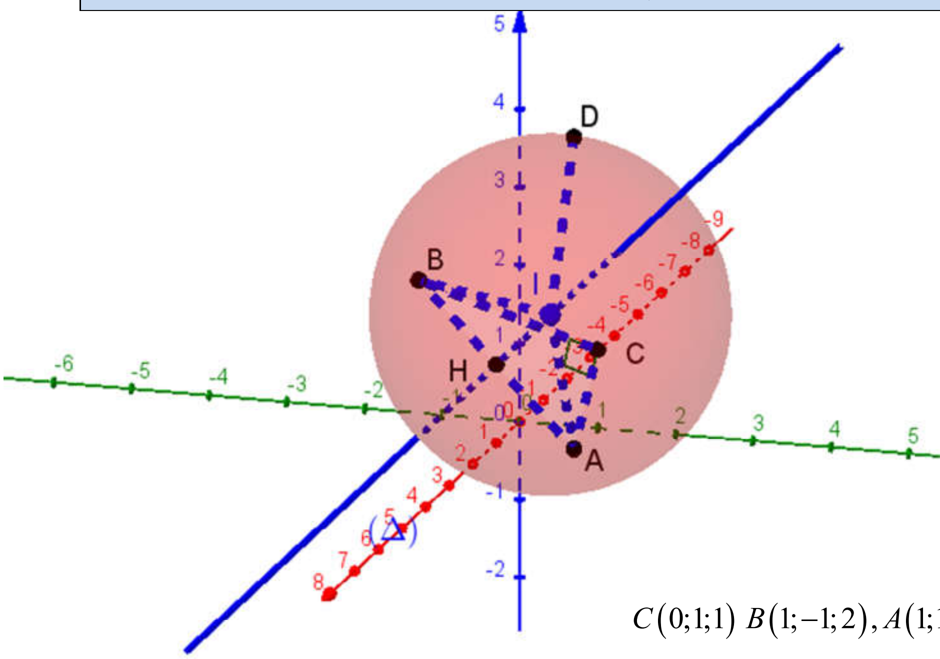
شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو $\vec{u}(1;1;1)$ ويمر من النقطة $H(1;0;1)$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (Δ) أي $\vec{u}$ يوازي $\overrightarrow{HM}$ ومنه $\overrightarrow{HM}=\alpha\vec{u}$

أي $\begin{cases} x-1=\alpha \\ y=\alpha \\ z-1=\alpha \end{cases}$

ومنه جملة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) $(\alpha\in\mathbb{R})$; $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$

لتكن M نقطة من (Δ).



أ) البرهان أنَ : $MA=MB=MC$:

لدينا : $M(1+\alpha;\alpha;1+\alpha)$ ، $A(1;1;0)$, $B(1;-1;2)$ $C(0;1;1)$

إذن : $MA=\sqrt{(1-1-\alpha)^2+(1-\alpha)^2+(-1-\alpha)^2}=\sqrt{\alpha^2+1-2\alpha+\alpha^2+1+2\alpha+\alpha^2}$

أي $MA=\sqrt{3\alpha^2+2}$

و $MB=\sqrt{(1-1-\alpha)^2+(-1-\alpha)^2+(2-1-\alpha)^2}=\sqrt{\alpha^2+1+2\alpha+\alpha^2+1-2\alpha+\alpha^2}$

أي $MB=\sqrt{3\alpha^2+2}$

و $MC=\sqrt{(-1-\alpha)^2+(1-\alpha)^2+(1-1-\alpha)^2}=\sqrt{\alpha^2+1+2\alpha+1-2\alpha+\alpha^2+\alpha^2}$

أي $MC=\sqrt{3\alpha^2+2}$

وبالتالي إذا كانت M نقطة من (Δ) فإنَ $MA=MB=MC$

ب)تبيان أنه توجد نقطة وحيدة I من المستقيم (Δ) بحيث يكون : $IA=ID$:

$I\in(\Delta)$ يعني أنَ إحداثيات النقطة I من الشكل $M(1+\alpha;\alpha;1+\alpha)$ مع $IA=ID$

أي $\sqrt{(1-1-\alpha)^2+(1-\alpha)^2+(-1-\alpha)^2}=\sqrt{(1-1-\alpha)^2+(1-\alpha)^2+(4-1-\alpha)^2}$

ومنه $\sqrt{\alpha^2+(1-\alpha)^2+(1+\alpha)^2}=\sqrt{\alpha^2+(1-\alpha)^2+(3-\alpha)^2}$

أي $\alpha^2+(1-\alpha)^2+(1+\alpha)^2=\alpha^2+(1-\alpha)^2+(3-\alpha)^2$

وبالتالي $(3-\alpha)^2=(1+\alpha)^2$ أي $1+2\alpha+\alpha^2=9-6\alpha+\alpha^2$

أي $8\alpha=8$ ومنه $\alpha=1$

إذن توجد نقطة وحيدة I من المستقيم (Δ) بحيث يكون : $IA=ID$

إحداثيات النقطة I هي $(2;1;2)$

ج) إستنتاج مما سبق أنَ النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس سطح الكرة (S) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها :

لدينا : $IA=IB=IC=ID$

ومنه نستنتج أنَ النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس سطح الكرة (S) ذات المركز $I(2;1;2)$ ونصف القطر $R=IA=\sqrt{3\times1^2+2}=\sqrt{5}$.

تصحيح التمرين الثالث :☺☺☺☺ الرجوع إلى نص التمرين

1) أ) **حل المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2-4z+16=0$:**

حساب المميز : $\Delta=(-4)^2-4(1)\times(16)=16-4\times16=-3\times16=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$

المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\dfrac{4-4i\sqrt{3}}{2}=2-2i\sqrt{3}$ ، $z_2=\dfrac{4-4i\sqrt{3}}{2}=2+2i\sqrt{3}$

مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{2-2i\sqrt{3};2+2i\sqrt{3}\right\}$

ب) كتابة حلي المعادلة على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1=2-2i\sqrt{3}$

حساب الطويلة : $|z_1|=\left|2-2i\sqrt{3}\right|=\sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=4$

تعيين عمدة للعدد المركب z_1:

نضع : $\theta_1=arg(z_1)$ إذن : $\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_1=-\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta_1=-\dfrac{\pi}{3}(2\pi)$

الشكل الأسي للعدد z_1 : $z_1=4e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ولدينا : $z_2=2+2i\sqrt{3}$ أي $z_2=\overline{z_1}=4e^{i\frac{\pi}{3}}$

الشكل الأسي للعدد z_2 : $z_2=4e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) لدينا النقط A, B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=2+2i\sqrt{3}$, $z_B=2-2i\sqrt{3}$ و $z_C=8$.

أ) التحقق أنَ : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$:

لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{2-2i\sqrt{3}-8}{2+2i\sqrt{3}-8}=\frac{-6-2i\sqrt{3}}{-6+2i\sqrt{3}}\times\frac{-6-2i\sqrt{3}}{-6-2i\sqrt{3}}=\frac{36+24i\sqrt{3}-12}{36+12}$

ومنه $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{24+24i\sqrt{3}}{48}=\frac{24}{48}+\frac{24i\sqrt{3}}{48}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

أي $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ب)كتابة العدد $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ على الشكل المثلثي:

لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ ومنه $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

الشكل المثلثي : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

ج) استنتاج طبيعة المثلث ABC:

لدينا : $\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=\left|\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right|=1$ ومنه $\frac{CB}{CA}=1$ أي $CB=CA$

و $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ ومنه $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$

إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=4$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

أ) كتابة العبارة المركبة للدوران r:

$M(z)\xrightarrow{r}M'(z')$ يعني $z'-z_\Omega=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-z_\Omega)$

أي $z'-4=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-4)$ ومنه $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z-4e^{i\frac{2\pi}{3}}+4=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+4$

أي $z'=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+2-2i\sqrt{3}+4=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+6-2i\sqrt{3}$

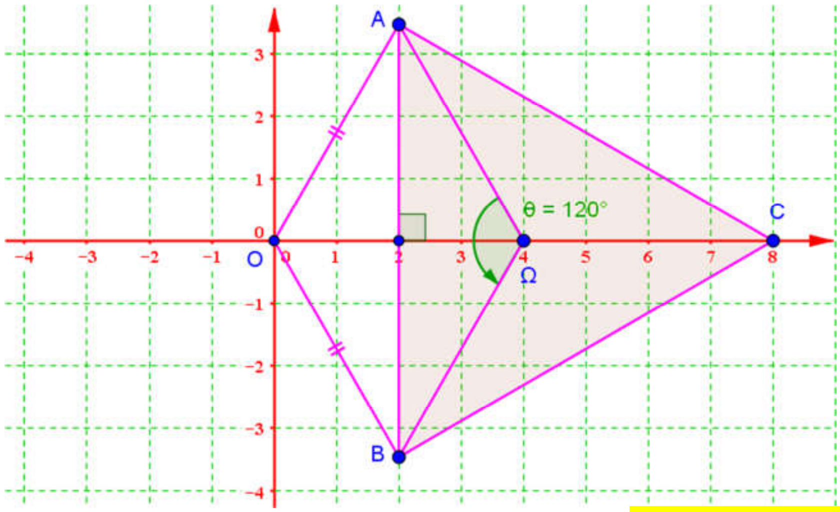
العبارة المركبة للدوران r هي من الشكل : $z'=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+6-2i\sqrt{3}$

ب)تبيان أنَ صورة النقطة A بالدوران r هي النقطة B:

لدينا : $r(A)=A'$ يعني $z_{A'}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_A+6-2i\sqrt{3}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(2+2i\sqrt{3}\right)+6-2i\sqrt{3}$

ومنه $z_{A'}=-1-i\sqrt{3}+i\sqrt{3}-3+6-2i\sqrt{3}=2-2i\sqrt{3}=z_B$

أي أنَ صورة النقطة A بالدوران r هي النقطة B



ج) تعيين طبيعة الرباعي $OA\Omega B$:

لدينا : $z_{\overline{OB}} = z_B - z_O = 2 - 2i\sqrt{3}$ و $z_{\overline{A\Omega}} = z_\Omega - z_A = 4 - \left(2 + 2i\sqrt{3}\right) = 4 - 2 - 2i\sqrt{3} = 2 - 2i\sqrt{3}$

أي لدينا : $z_{\overline{OB}} = z_{\overline{A\Omega}}$ ومنه الرباعي $OA\Omega B$ متوازي أضلاع .

ولدينا : $OB = \left|z_{\overline{OB}}\right| = \left|2 - 2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$

و $OA = \left|z_{\overline{OA}}\right| = \left|2 + 2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$

إذن : $OA = OB = 4$

وبالتالي طبيعة الرباعي $OA\Omega B$ معين

تصحيح التمرين الرابع : ☺☺☺☺ الرجوع إلى نص التمرين

I. لدينا الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = (2x+1)e^x - 1$

1) دراسة تغيرات الدالة g:

- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[(2x+1)e^x - 1\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[2xe^x + e^x - 1\right] = -1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2x+1)e^x - 1\right] = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

- **حساب المشتقة :**

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$g'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x$$

$$g'(x) = (2x+3)e^x$$

- دراسة إشارة المشتقة :

$g'(x)=0$ يعني $(2x+3)e^{x}=0$ ومنه $2x+3=0$

أي $x=-\frac{3}{2}$

- جدول إشارة المشتقة :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة g متناقصةعلى المجال $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ ومتزايدة على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$

- جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$g\left(-\frac{3}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$g\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(2\left(-\frac{3}{2}\right)+1\right)e^{-\frac{3}{2}}-1=-2e^{-\frac{3}{2}}-1$

2) حساب $g(0)$ ثمّ إستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

- حساب $g(0)$:

$g(0)=(2\times0+1)e^{0}-1=1-1=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

إذا كان $x\in]-\infty;0]$ فإنّ $g(x)\leq0$

إذا كان $x\in[0;+\infty[$ فإنّ $g(x)\geq0$

.II f الدالة العددية المعر فة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x\left(e^{x}-1\right)^{2}$

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(e^{x}-1\right)^{2}\right]=-\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(e^{x}-1\right)^{2}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) أ)تبيان أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$:

لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(e^{x}-1\right)^{2}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{2x}-2xe^{x}+x-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{2x}-2xe^{x}\right)=0$$

أي $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$

لدينا : $f(x)-x=xe^{2x}-2xe^{x}=xe^{x}\left(e^{x}-2\right)$

x	$-\infty$	0		$\ln 2$		$+\infty$
x	-	0	+		+	
$e^{x}-2$	-		-	0	+	
$f(x)-x$	+	0	-	0	+	

الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ) :

إ ذا كان $x\in]-\infty;0[\cup]ln2;+\infty[$ فإن $(\mathscr{C}_f)$ فوق (Δ)

إذا كان $x\in]0;ln2[$ فإن $(\mathscr{C}_f)$ تحت (Δ)

إذا كان $x=0$ أو $x=ln2$ فإنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقطع (Δ)

3) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=\left(e^{x}-1\right)\times g(x)$:

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$f'(x)=\left(e^{x}-1\right)^{2}+2xe^{x}\left(e^{x}-1\right)=\left(e^{x}-1\right)\left[e^{x}-1+2xe^{x}\right]$ ومنه $f'(x)=\left(e^{x}-1\right)\left[(2x+1)e^{x}-1\right]$

أي $f'(x)=\left(e^{x}-1\right)\times g(x)$

ب) إستنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

إشارة المشتقة $f'(x)$:

x	$-\infty$	0		$+\infty$
$e^{x}-1$	-	0	+	
$g(x)$	-	0	+	
$f'(x)$	+	0	+	

جدول تغيرات الدالة f :

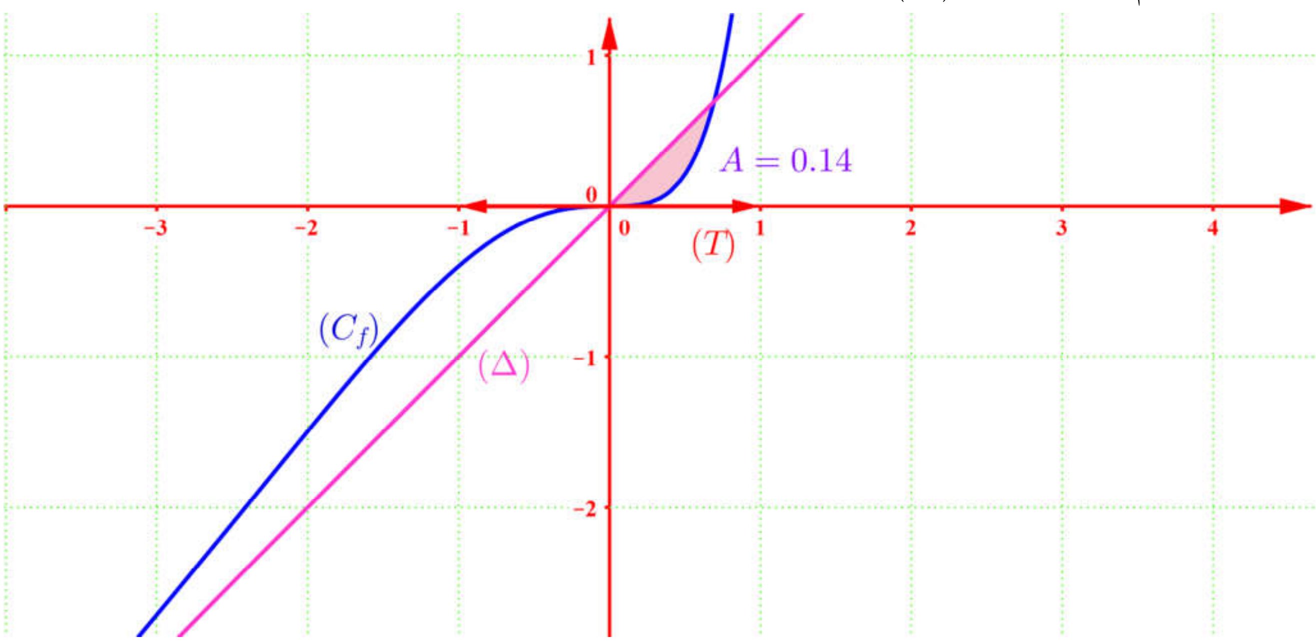
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) أ) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)=0$

معادلة المماس $(T): y=0$

ب) رسم (T) ، (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$:



5) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(E): f(x)=mx$.

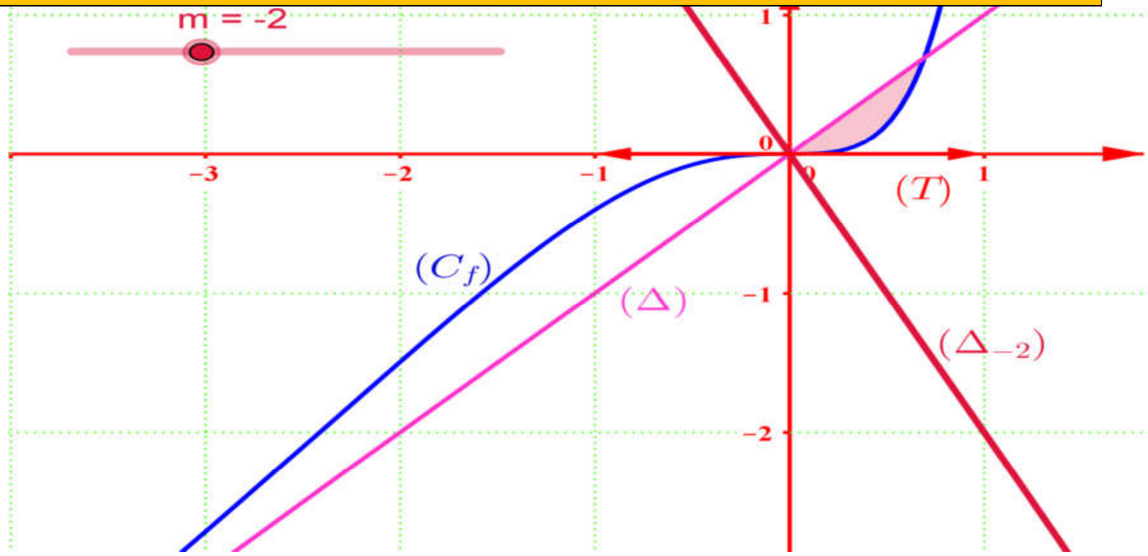
حلول المعادلة بيانيا هي فواصل النقط المشتركة بين المنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ_m) الذي يدور حول المبدأ O.(مناقشة دورانية)

إذا كان $m \in]-\infty;0]$ المعادلة (E) تقبل حلا معدوما .

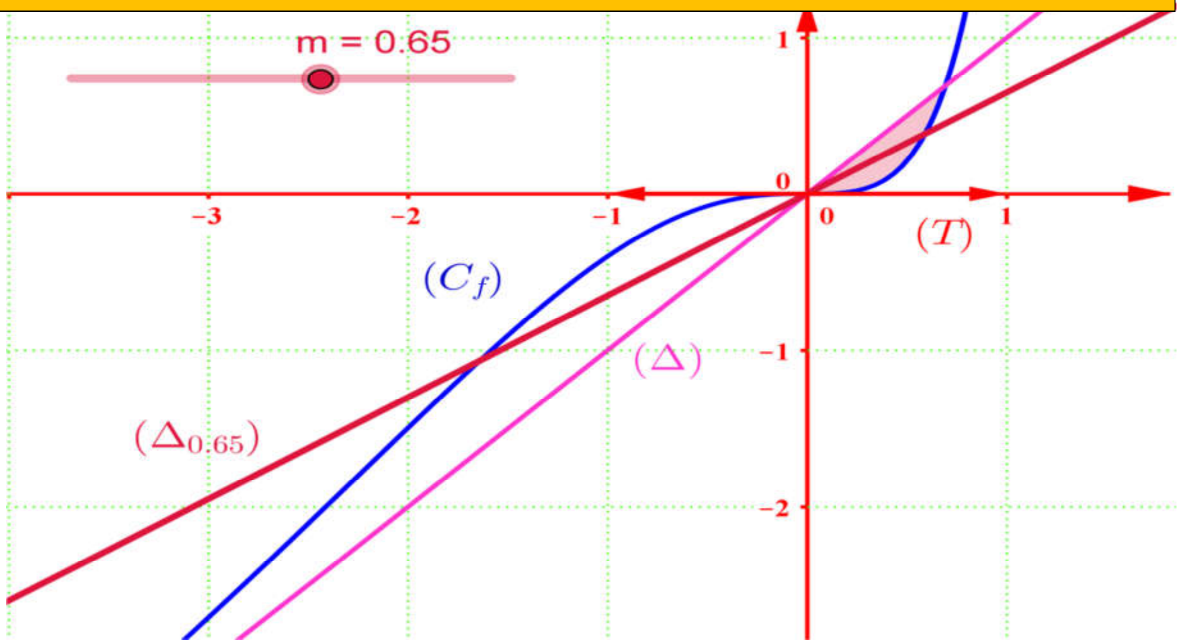
إذا كان $m \in]0;1[$ المعادلة (E) تقبل ثلاثة حلول ، حلا سالبا ، حلا معدوما و حلا موجبا .

إذا كان $m \in [1;+\infty[$ المعادلة (E) تقبل حلين ، حلا معدوما وحلا موجبا .

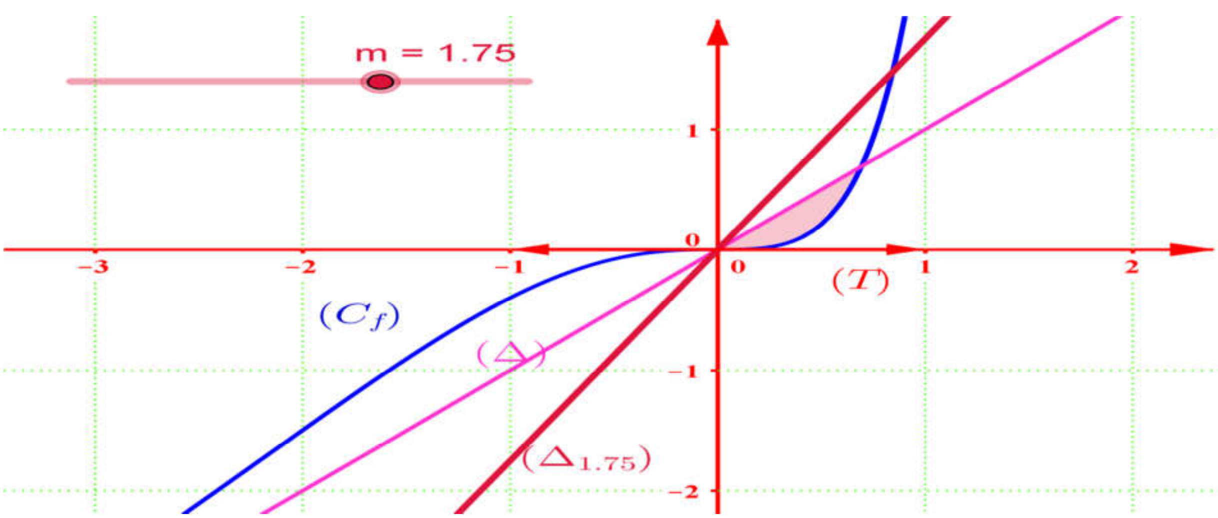
إذا كان $m\in]-\infty;0]$ المعادلة (E) تقبل حلا معدوما .



إذا كان $m\in]0;1[$ المعادلة (E) تقبل ثلاثة حلول حلا سالبا ، حلا معدوما و حلا موجبا .



إذا كان $m\in[1;+\infty[$ المعادلة (E) تقبل حلين ، حلا معدوما وحلا موجبا .



6) حساب المساحة A :

من أجل $x \in [0; ln 2]$ المنحني $(\mathscr{C}_f)$ تحت المستقيم المقارب (Δ)وبالتالي :

$$A = \int_0^{ln 2} (x - f(x))\, dx$$ أي $$A = \int_0^{ln 2} \left(x - x\left(e^x - 1\right)^2\right) dx \quad A = \int_0^{ln 2} \left(x - xe^{2x} + 2xe^x - x\right) dx$$

$$A = \int_0^{ln 2} x\left(-e^{2x} + 2e^x\right) dx$$

نضع : $u(x) = x$ ومنه $u'(x) = 1$

و $v'(x) = -e^{2x} + 2e^x$ ومنه $v(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x$

إذن : $$A = \left[x\left(-\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x\right)\right]_0^{ln 2} - \int_0^{ln 2} \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x\right) dx$$

ومنه : $$A = \left[x\left(-\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x\right)\right]_0^{ln 2} + \left[\frac{1}{4}e^{2x} - 2e^x\right]_0^{ln 2} = \left[x\left(-\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x\right) + \frac{1}{4}e^{2x} - 2e^x\right]_0^{ln 2}$$

أي $$A = \left[ln 2\left(-\frac{1}{2}e^{2ln 2} + 2e^{ln 2}\right) + \frac{1}{4}e^{2ln 2} - 2e^{ln 2}\right] - \left[0 \times \left(-\frac{1}{2}e^{2\times 0} + 2e^0\right) + \frac{1}{4}e^{2(0)} - 2e^0\right]$$

ومنه $$A = \left[ln 2\left(-\frac{1}{2} \times 4 + 2 \times 2\right) + \frac{1}{4} \times 4 - 2 \times 2\right] - \left[\frac{1}{4} - 2\right] = \left(ln 2 \times (-2 + 4) + 1 - 4\right) - \left(\frac{1}{4} - 2\right)$$

$$A = 2\,ln 2 - 3 - \frac{1}{4} + 2 = (2\,ln 2 - 1.25)us$$

أي $A = 0.14cm^2$

إنتهى تصحيح الموضوع
بالتوفيق والنجاح
BAC 2018