التمرين الاول :(04.5 نقطة)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{4u_n}{u_n+2}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n<2$.

2) أدرس رتابة المتتالية (u_n) . هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=1-\frac{2}{u_n}$

أ)بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثمّ عبر عن v_n بدلالة n.

ب)إستنتج عبارة u_n بدلالة n ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\cdots+\frac{1}{u_n}$ ، أحسب S_n بدلالة n .

4) أ) بيّن أنّ : $|u_{n+1}-2|\le\frac{2}{3}|u_n-2|$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب)برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n-2|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثمّ إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثاني :(04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-1;3;1)$ ، $B(0;5;0)$ ، $E(-3;4;0)$ ، المستوي (Q)ذو المعادلة $2x-y+z-2=0$ و سطح الكرة (S) التي مركزها النقطة A وتمس المستوي (Q).

1) بيّن أنّ نصف قطر سطح الكرة(S) هو $\sqrt{6}$ و أكتب معادلة لـ(S)ثمّ جد إحداثيات نقطتي تقاطع (S) وحامل محور التراتيب.

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ويعامد (Q) ثمّ إستنتج إحداثيات النقطة H نقطة تماس (Q)و (S).

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q') الموازي للمستوي (Q) ويمس(S).

4) α عدد حقيقي ، $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء و (P_α) المستوي المعرف بـ : $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{EH}=\alpha$.

أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P_α).

ب)تحقق أنّ A هي منتصف القطعة$[EH]$ثمّ عين قيمة α التي من أجلها يكون (P_α) مستويا محوريا للقطعة $[EH]$.

التمرين الثالث : (04.5 نقطة)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z-4)(z^2-4z+8)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، D و E التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2-2i$ ، $z_B=4$ ، $z_C=\overline{z_A}$ ، $z_D=-z_A$ و $z_E=-6-2i$.

أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي ، ثمّ إستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة Bبالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ، يطلب تعيين نسبة وزاوية التشابه S.

ب)تحقق أنّ النقطة D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$.

ج) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|(1+i)z+4|=8$

تحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ) ، ثمّ عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميّزة .

د) تحقق أنّ $S(D)=E$ ، ثمّ بيّن أنّ الدائرة (Γ') التي مركزها E ونصف قطرها AE هي صورة (Γ) بالتشابه S.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=-x-\ln x$.

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ ثمّ تحقق أنّ: $0.56<\alpha<0.57$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]0;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{-1+(x-1)\ln x}{x}$.

نسمي $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أن : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$ ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) أ) بيّن أنّ : $f(\alpha)=1-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$ ثمّ إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ب) (γ) هو المنحني الممثل للدالة $\ln$ في المعلم السابق . أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$ ، فسّر النتيجة بيانيا ثمّ أدرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى (γ).

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

د) أحسب $f(2)$ و $f(e)$ ثمّ أنشئ (T)، (γ) و $(\mathscr{C}_f)$.

4) A هي مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنيين (γ) و $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x=\alpha$ و $x=e$.

أحسب بـ cm^2 المساحة A وبدلالة α ثمّ تحقق أنّ : $A=\dfrac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ ثمّ عيّن حصراً للمساحة A.

إنتهى الموضوع الثاني

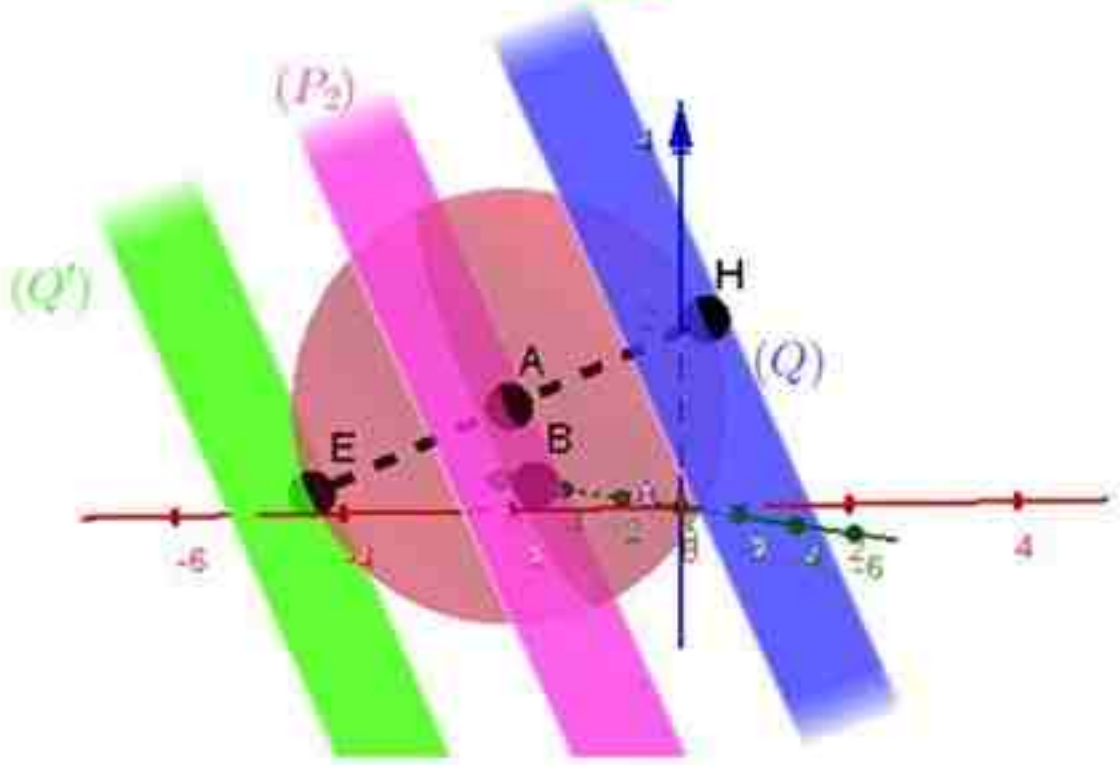
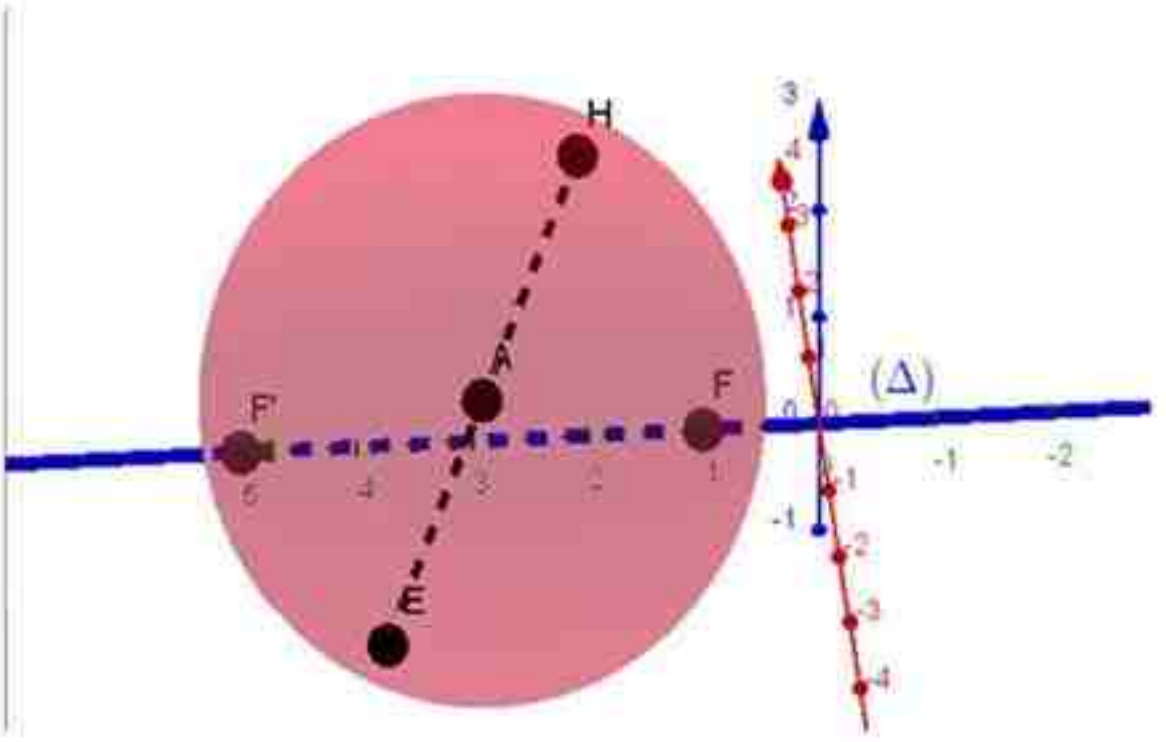
تصحيح الموضوع الثاني

التصحيح	العلامة مجزأة
التمرين الاول	**04.5 نقطة**
لدينا : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{u_n+2}$	
1) البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n<2$: نسمي $P(n)$ هذه الخاصية . 1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=1$ و $1\le 1<2$ ومنه $1\le u_0<2$ أي $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$. 2- نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$. لدينا : $1\le u_n<2$ فرضا . ومنه : $3\le u_n+2<4$ إذن : $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{u_n+2}\le\dfrac{1}{3}$ ومنه $-\dfrac{8}{3}\le-\dfrac{8}{u_n+2}<-\dfrac{8}{4}$ وبالتالي : $4-\dfrac{8}{3}\le 4-\dfrac{8}{u_n+2}<4-\dfrac{8}{4}$ لأنّ : $u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{u_n+2}=4-\dfrac{8}{u_n+2}$ إذن : $4-\dfrac{8}{3}\le 4-\dfrac{8}{u_n+2}<4-\dfrac{8}{4}$ أي $\dfrac{4}{3}\le u_{n+1}<2$ وبالتالي $1\le u_{n+1}<2$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة . 3- حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.	0.5
2) دراسة رتابة المتتالية (u_n): ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{4u_n}{u_n+2}-u_n=\dfrac{4u_n-u_n^2-2u_n}{u_n+2}$ أي $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n-u_n^2}{u_n+2}=\dfrac{u_n(2-u_n)}{u_n+2}$ **جدول إشارة الفرق :** $u_n\in$: 1 ، 2 u_n : $+$ $2-u_n$: $+$ u_n+2 : $+$ $u_{n+1}-u_n$: $+$ **وبالتالي : $u_{n+1}-u_n>0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما .**	0.25×2
دراسة تقارب المتتالية (u_n): (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .	0.25

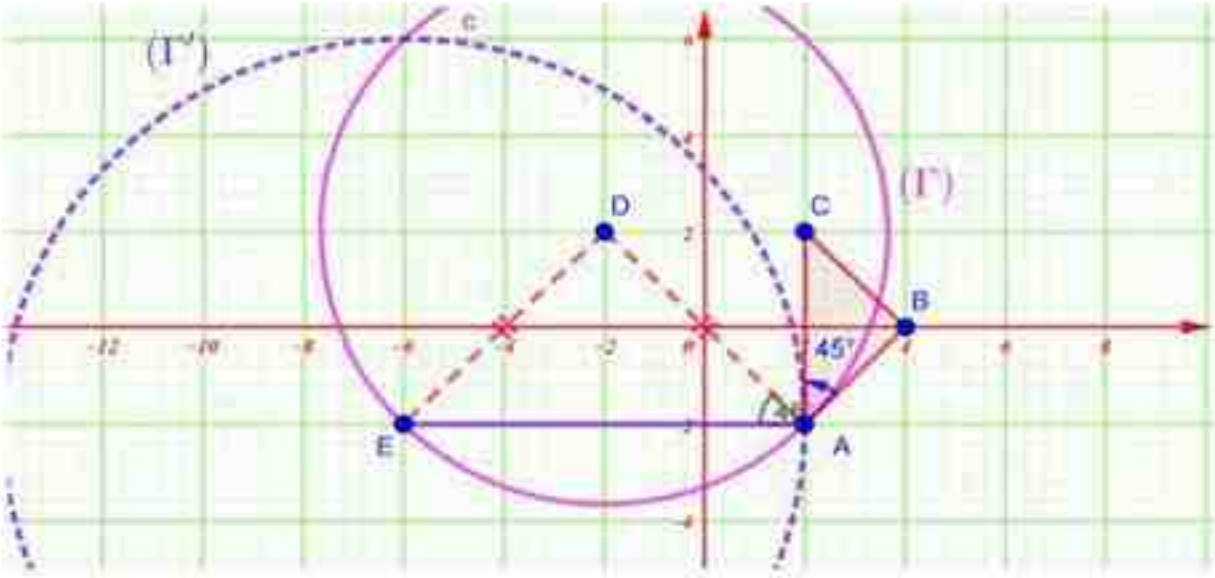
3) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ **أ) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية :** (v_n) متتالية هندسية يعني $v_{n+1} = v_n \times q$ لدينا: $v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{4u_n}{u_n+2}} = 1 - \frac{2(u_n+2)}{4u_n} = \frac{4u_n - 2u_n - 4}{4u_n} = \frac{2u_n - 4}{4u_n} = \frac{2}{4} \times \frac{u_n - 2}{u_n}$ ومنه : $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{u_n}\right) = \frac{1}{2} v_n$ أي (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 1 - \frac{2}{u_0} = 1 - \frac{2}{1} = -1$	0.5
التعبير عن v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$	0.25
ب) إستنتاج عبارة u_n بدلالة n: لدينا : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ ومنه $\frac{2}{u_n} = 1 - v_n$ أي $u_n = \frac{2}{1 - v_n}$ وبالتالي : $u_n = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$	0.5
حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2$ لأنّ $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$	0.25
ج) حساب S_n بدلالة n : لدينا : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}$ ولدينا : $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{2}(1 - v_n)$ ومنه : $S_n = \frac{1}{2}(1 - v_0) + \frac{1}{2}(1 - v_1) + \cdots + \frac{1}{2}(1 - v_n) = \frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{2}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$ أي $S_n = \frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{2}\left(v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{2} \times \left(-1 \times 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)$ $S_n = \frac{1}{2}(n+1) + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $S_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$	0.5
4) أ)تبيان أنّ : $\lvert u_{n+1} - 2 \rvert \le \frac{2}{3} \lvert u_n - 2 \rvert$ من أجل كل عدد طبيعي n : لدينا : $u_{n+1} - 2 = \frac{4u_n}{u_n + 2} - 2 = \frac{4u_n - 2u_n - 4}{u_n + 2} = \frac{2u_n - 4}{u_n + 2} = \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 2}$ ومنه $\lvert u_{n+1} - 2 \rvert = \left\lvert \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 2} \right\rvert = 2 \times \left\lvert \frac{u_n - 2}{u_n + 2} \right\rvert = \frac{2}{\lvert u_n + 2 \rvert} \times \lvert u_n - 2 \rvert = \frac{2}{u_n + 2} \times \lvert u_n - 2 \rvert$ لأنّ $3 \le u_n + 2 < 4$	

ولدينا : $1 \le u_n < 2$ ومنه $3 \le u_n + 2 < 4$ إذن $\frac{1}{4} < \frac{1}{u_n+2} \le \frac{1}{3}$ وبالتالي : $\lvert u_{n+1} - 2 \rvert \le \frac{2}{3} \times \lvert u_n - 2 \rvert$	0.5
ب) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\lvert u_n - 2 \rvert \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$: لدينا : $\lvert u_{n+1} - 2 \rvert \le \frac{2}{3} \lvert u_n - 2 \rvert$ من أجل كل عدد طبيعي n. ومنه : $\lvert u_1 - 2 \rvert \le \frac{2}{3} \lvert u_0 - 2 \rvert$ $\lvert u_2 - 2 \rvert \le \frac{2}{3} \lvert u_1 - 2 \rvert$ $\vdots$ $\lvert u_n - 2 \rvert \le \frac{2}{3} \lvert u_{n-1} - 2 \rvert$ أي $\lvert u_1 - 2 \rvert \times \lvert u_2 - 2 \rvert \times \cdots \times \lvert u_n - 2 \rvert \le \frac{2}{3} \lvert u_0 - 2 \rvert \times \frac{2}{3} \lvert u_1 - 2 \rvert \times \cdots \times \frac{2}{3} \lvert u_{n-1} - 2 \rvert$ بالإختزال نجد : $\lvert u_n - 2 \rvert \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n	0.5
إستنتاج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$: لدينا : $\lvert u_n - 2 \rvert \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه $-\left(\frac{2}{3}\right)^n \le u_n - 2 \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ولدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - 2) = 0$ حسب مبرهنة الحصر . إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$	0.25
التمرين الثاني	**04 نقاط**
لدينا : $A(-1;3;1)$ ، $B(0;5;0)$ ، $E(-3;4;0)$ و المستوي (Q) ذو المعادلة $2x - y + z - 2 = 0$	
1) بيّن أنّ نصف قطر سطح الكرة (S) هو $\sqrt{6}$: (S) مركزها النقطة A وتمس المستوي (Q) يعني $R = d(A;(Q)) = \frac{\lvert 2x_A - y_A + z_A - 2 \rvert}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{\lvert 2(-1) - 3 + 1 - 2 \rvert}{\sqrt{6}} = \frac{\lvert -6 \rvert}{\sqrt{6}}$ ومنه $R = \sqrt{6}$	0.5
كتابة معادلة لـ (S): هي من الشكل : $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$ أي $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6$	0.5
إيجاد إحداثيات نقطتي تقاطع (S) وحامل محور التراتيب: هي حل الجملة : $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6 \\ x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} (t-3)^2 = 4 \\ x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ $(t-3)^2 = 4$ يكافئ $t - 3 = -2$ أو $t - 3 = 2$ يكافئ $t = 1$ أو $t = 5$	2×0.25

حامل محور التراتيب يقطع (S) في النقطتين $F(0;1;0)$ و $F'(0;5;0)$	
2) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ويعامد (Q): الشعاع الناظمي للمستوي (Q) هو توجيه للمستقيم (Δ) وهو $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) يعني $\overrightarrow{AM}\parallel\vec{u}$ ومنه $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$ أي $\begin{cases}x+1=2\lambda\\y-3=-\lambda\\z-1=\lambda\end{cases}$ ومنه جملة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) هي $\begin{cases}x=2\lambda-1\\y=-\lambda+3;(\lambda\in\mathbb{R})\\z=\lambda+1\end{cases}$	0.5
إستنتاج إحداثيات النقطة H نقطة تماس (Q)و(S): H هي النقطة المشتركة بين (Δ) و (Q). إحداثيات H هي حل للجملة $\begin{cases}x=2\lambda-1\\y=-\lambda+3\\z=\lambda+1\\2x-y+z-2=0\end{cases}$ إذن $2(2\lambda-1)-(-\lambda+3)+\lambda+1-2=0$ أي $6\lambda-6=0$ ومنه $\lambda=1$ إذن إحداثيات H : $\begin{cases}x=2(1)-1=1\\y=-1+3=2\\z=\lambda+1=2\end{cases}$ أي $H(1;2;2)$	0.5
3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q') الموازي للمستوي (Q) والمماس لـ(S): (Q') يوازي (Q) يعني للمستوي (Q') معادلة من الشكل : $2x-y+z+d=0$ لحساب d نعوض بإحداثيات النقطة H' نظيرة النقطة H بالنسبة إلى A مركز سطح الكرة (S). إذن إحداثيات النقطة H' هي : $\begin{cases}x_{H'}=2x_A-x_H=2\times(-1)-1=-3\\y_{H'}=2y_A-y_H=2\times3-2=4\\z_{H'}=2z_A-z_H=2\times1-2=0\end{cases}$ أي $H'(-3;4;0)$ أي $E(-3;4;0)$ بالتعويض في معادلة (Q') نجد : $2(-3)-4+0+d=0$ أي $d=10$ ومنه معادلة (Q') هي $2x-y+z+10=0$	0.5
4) لدينا : (P_α) المستوي المعرف بـ : $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{EH}=\alpha$. **أ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P_α):** لدينا : $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x\\y-5\\z\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}1+3\\2-4\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{EH}=\alpha$ يكافئ $4x-2(y-5)+2z=\alpha$ ومنه $4x-2y+2z+10-\alpha=0$ معادلة للمستوي (P_α)	0.5

0.25	**ب) التحقق أنّ A هي منتصف القطعة $[EH]$:** $\frac{x_E+x_H}{2}=\frac{-3+1}{2}=-1=x_A$ $\frac{y_E+y_H}{2}=\frac{4+2}{2}=3=y_A$ ومنه A هي منتصف القطعة $[EH]$ $\frac{z_E+z_H}{2}=\frac{0+2}{2}=1=z_A$
0.25	**تعيين قيمة α التي من أجلها يكون (P_α) مستويا محوريا للقطعة $[EH]$:** (P_α) مستويا محوريا للقطعة $[EH]$ يعني $A\in(P_\alpha)$ ومنه : $4(-1)-2(3)+2\times1+10-\alpha=0$ أي $\alpha=2$  

التمرين الثالث	04.5 نقطة
1) الحل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z-4)(z^2-4z+8)=0$: $(z-4)(z^2-4z+8)=0$ تكافئ $z-4=0$ أو $z^2-4z+8=0$ $z-4=0$ يعني $z=4$ حل المعادلة $z^2-4z+8=0$: حساب المميز : $\Delta=(-4)^2-4\times 8=16-32=-16=(4i)^2$ المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $z_1=\frac{4-4i}{2}=2-2i$ $z_2=2+2i$ مجموعة حلول المعادلة : $S=\{4;2-2i;2+2i\}$	4×0.25
2) لدينا $z_A=2-2i$ ، $z_B=4$ ، $z_C=\overline{z_A}$ ، $z_D=-z_A$ و $z_E=-6-2i$ **أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي:** لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2+2i-2+2i}{4-2+2i}=\frac{4i}{2+2i}\times\frac{2-2i}{2-2i}=\frac{8i+8}{8}=1+i$ أي $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=1+i$ ومنه $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	0.5
إستنتاج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ، يطلب تعيين نسبة وزاوية التشابه S: لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $\frac{AC}{AB}=\sqrt{2}$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{4}$ وبالتالي النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ونسبته $k=\sqrt{2}$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{4}$	0.75
ب) التحقق أنّ النقطة D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$: لدينا : $1-2+2=1\neq 0$ ومنه مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$ موجود لاحقته هي $\frac{z_A-2z_B+2z_C}{1-2+2}=\frac{2-2i-8+4+4i}{1}=-2+2i=z_D$ ومنه D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-2),(C;2)\}$	0.5
ج) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\lvert(1+i)z+4\rvert=8$ **التحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ):** $A\in(\Gamma)$ يعني $\lvert(1+i)z_A+4\rvert=8$ لدينا : $\lvert(1+i)z_A+4\rvert=\lvert(1+i)(2-2i)+4\rvert=\lvert 4+4\rvert=\lvert 8\rvert=8$ ومنه $A\in(\Gamma)$	0.25

تعيين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة: لدينا : $\lvert(1+i)z+4\rvert=8$ يكافئ $\left\lvert(1+i)\left(z+\frac{4}{1+i}\right)\right\rvert=8$ أي $\lvert 1+i\rvert\times\left\lvert z+\frac{4}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right\rvert=8$ ومنه $\sqrt{2}\times\lvert z+2-2i\rvert=8$ إذن $\lvert z-(-2+2i)\rvert=\frac{8}{\sqrt{2}}$ وبالتالي $\lvert z-z_D\rvert=4\sqrt{2}$ أي $DM=4\sqrt{2}$ ومنه (Γ) هي دائرة مركزها النقطة D ونصف قطرها $R=4\sqrt{2}$	0.5
د) التحقق أنّ $S(D)=E$: لدينا : $\frac{z_E-z_A}{z_D-z_A}=\frac{-6-2i-2+2i}{-2+2i-2+2i}=\frac{-8}{-4+4i}=\frac{-8(-4-4i)}{(-4+4i)(-4-4i)}=\frac{32(1+i)}{16+16}$ ومنه $\frac{z_E-z_A}{z_D-z_A}=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ وبالتالي : $S(D)=E$	0.5
تبيان أنّ الدائرة (Γ') التي مركزها E ونصف قطرها AE هي صورة (Γ) بالتشابه S : (Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة D ونصف قطرها $AD=R=4\sqrt{2}$ صورتها هي الدائرة (Γ') التي مركزها $E=S(D)$ ونصف قطرها $R'=\sqrt{2}AD=AE$ لأنّ $\frac{AE}{AD}=\sqrt{2}$  	0.5

التمرين الرابع	07 نقاط
I. لدينا : $g(x)=-x-\ln x$ و $D_g=]0;+\infty[$	
1) دراسة تغيرات الدالة g : - **حساب النهايات :** $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}(-x-\ln x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(-1-\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$	2×0.25
- **حساب المشتقة :** $g'(x)=-1-\frac{1}{x}=\frac{-x-1}{x}=-\left(\frac{x+1}{x}\right)$ - **دراسة إشارة المشتقة :** من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $-\left(\frac{x+1}{x}\right)<0$ ومنه $g'(x)<0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$	2×0.25
- **جدول تغيرات الدالة g :** $\begin{array}{c\|c} x\in & 0 \qquad\qquad +\infty \\ \hline g'(x) & \| \quad - \\ \hline g(x) & \| \; +\infty \searrow -\infty \end{array}$	0.25
2) **تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$:** الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وصورة المجال $]0;+\infty[$ بالدالة g هو المجال $]-\infty;+\infty[$ و 0 موجود في المجال $]-\infty;+\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$. **التحقق أنّ $0.56<\alpha<0.57$:** لدينا : $g(0.56)=-0.56-\ln 0.56=0.02$ $g(0.57)=-0.57-\ln 0.57=-0.01$ أي $g(0.56)\times g(0.57)<0$ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.56<\alpha<0.57$	0.75
3) **إستنتاج إشارة $g(x)$:** $\begin{array}{c\|ccccc} x\in & 0 & & \alpha & & +\infty \\ \hline g(x) & \| & + & 0 & - & \end{array}$	0.25
II. لدينا : $f(x)=\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}$ معرفة على $D_f=]0;+\infty[$	
1) **حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:** $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left[-1+(x-1)\ln x\right]=+\infty$	0.25

0.25	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}+\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\ln x\right]=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\ln x=+\infty$
0.25	**2) تبيان أنّ $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$:** لدينا : $f'(x)=\frac{\left[\ln x+(x-1)\times\frac{1}{x}\right]\times x-(-1+(x-1)\ln x)}{x^2}$ $f'(x)=\frac{x\ln x+x-1+1-x\ln x+\ln x}{x^2}$ ومنه $f'(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}$ أي $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$
0.5	**جدول تغيرات الدالة f :** $x\in$: 0 ‖ α ‖ $+\infty$ $f'(x)$: ‖ - 0 + $f(x)$: ‖ $+\infty$ ↘ $f(\alpha)$ ↗ $+\infty$
0.25	**3) أ) تبيان أنّ $f(\alpha)=1-\alpha-\frac{1}{\alpha}$:** لدينا : $f(\alpha)=\frac{-1+(\alpha-1)\ln\alpha}{\alpha}=-\frac{1}{\alpha}+\frac{(\alpha-1)\ln\alpha}{\alpha}$ ولدينا : $g(\alpha)=0$ ومنه $-\alpha-\ln\alpha=0$ أي $\ln\alpha=-\alpha$ وبالتالي : $f(\alpha)==-\frac{1}{\alpha}+\frac{(\alpha-1)(-\alpha)}{\alpha}=-\frac{1}{\alpha}+(\alpha-1)(-1)=1-\alpha-\frac{1}{\alpha}$ أي $f(\alpha)=1-\alpha-\frac{1}{\alpha}$
0.25	**حصر $f(\alpha)$:** لدينا : $0.56<\alpha<0.57$ ومنه $\frac{1}{0.57}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{0.56}$ أي $1.75<\frac{1}{\alpha}<1.78$ ومنه $-1.78<-\frac{1}{\alpha}<-1.75$ و $-0.57<-\alpha<-0.56$ إذن $1-0.57-1.78<1-\alpha-\frac{1}{\alpha}<1-0.56-1.75$ ومنه $1-0.57-1.78<1-\alpha-\frac{1}{\alpha}<1-0.56-1.75$ وبالتالي $-1.35<f(\alpha)<-1.31$

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$:

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+x\ln x-\ln x-x\ln x}{x}$$

0.25

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1-\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=0$

التفسير الهندسي :

المنحني (γ) منحني مقارب للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (γ):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-\ln x=\frac{-1-\ln x}{x}$

0.5

$x\in$	0		α		$+\infty$
$f(x)-\ln x$	‖	+	0	-	
الوضع النسبي		$(\mathcal{C}_f)$ فوق (γ)	$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (γ)	$(\mathcal{C}_f)$ تحت (γ)	

ج) كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

0.5

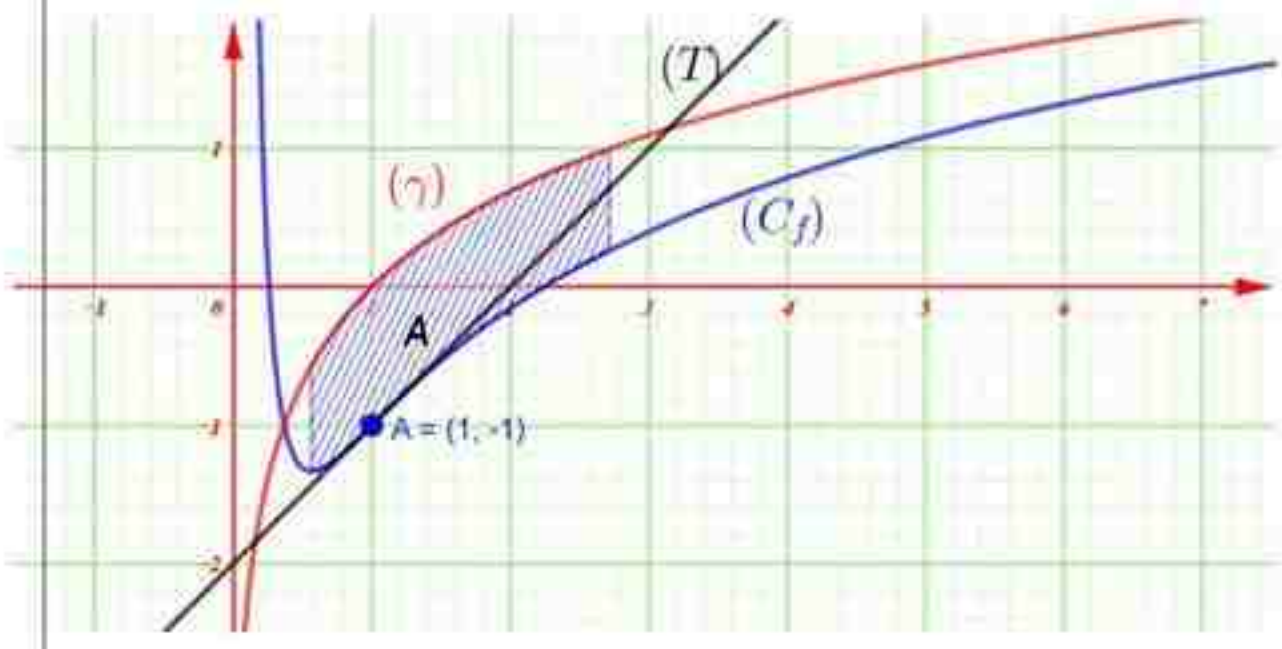
$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ $\qquad$ $(T): y=1\times(x-1)-1=x-2$

إذن $(T): y=x-2$

د) حساب $f(2)$ ، $f(e)$ والرسم :

$f(2)=-0.15$ ، $f(e)=0.26$

0.75



0.5	**5) حساب المساحة A :** $A=\int_{\alpha}^{e}\left[\ln x-f(x)\right]dx=\int_{\alpha}^{e}\left[\ln x-\frac{-1+x\ln x-\ln x}{x}\right]dx=\int_{\alpha}^{e}\left[\frac{x\ln x+1-x\ln x+\ln x}{x}\right]dx$ أي $A=\int_{\alpha}^{e}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left[\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\alpha}^{e}$ ومنه : $A=\int_{\alpha}^{e}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left[\ln e+\frac{1}{2}(\ln e)^2\right]-\left[\ln\alpha+\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2\right]=\left(\frac{3}{2}-\ln\alpha-\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2\right)us$ وبالتالي $A=\frac{1}{2}\left(3-2\ln\alpha-(\ln\alpha)^2\right)cm^2$
0.25	**التحقق أنّ : $A=\frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$** لدينا : $A=\frac{3-2\ln\alpha-(\ln\alpha)^2}{2}$ و $\ln\alpha=-\alpha$ ومنه $A=\frac{3-2(-\alpha)-(-\alpha)^2}{2}=\frac{3+2\alpha-\alpha^2}{2}=\frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ وبالتالي $A=\frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$
0.25	**تعيين حصرا لـ A:** لدينا: $0.56<\alpha<0.57$ ومنه $1.56<1+\alpha<1.57$ و $-0.57<-\alpha<-0.56$ ومنه $2.43<3-\alpha<2.44$ إذن $\frac{1.56\times2.43}{2}<\frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}<\frac{1.57\times2.44}{2}$ وبالتالي $1.90<A<1.92$

إنتهى تصحيح الموضوع الثاني