الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية الشلف — ثانوية الحاج ميلود عبدالحميد

إمتحان البكالوريا التجريبي — دورة: جوان 2018

الشعبة: علوم تجريبية — إختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 ساعات

على كل مترشّح أن يَختار أحد الموضُوعين التاليين :

المَوضُوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

1) أحسب u_1 و v_1.

2) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، ثمّ عبّر عن الحد العام v_n بدلالة n.

3) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

بيّن أنّ : $S_n=\frac{16}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n-3\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $z_B=3-i\sqrt{3}$ و $z_C=-\sqrt{3}+3i$.

1) أكتب العدد z_A على الشكل الأسي ثمّ إستنتج الشكل الأسي للعدد z_B.

2) n عدد طبيعي، L_n هو العدد المركب المعرف بما يلي : $L_n=\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$ ، أحسب L_n بدلالة n

ثمّ إستنتج قيمة L_{2018} يكتب على الشكل الجبري .

3) تحقق أنّ : $z_C=i\,z_A$ ثمّ إستنتج طبيعة المثلث OAC.

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث :

$$\arg\left(3+i\sqrt{3}-z\right)-\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

مع $k\in\mathbb{Z}$ ،تحقق أنّ النقطة O تنتمي إلى (Γ) ثمّ عين طبيعتها .

5) نعتبر النقطة D ذات اللاحقة $z_D=\overline{z_C}$ ، بيّن أنّ المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان .

6) لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=3-\sqrt{3}$ ، S التشابه المستوي المباشر الذي مركزه E ويحول النقطة A إلى النقطة C. عين نسبة وزاوية التشابه S ، ثمّ إستنتج أنّ النقط A ، E، O و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$يطلب تعيين عناصرها.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء ، ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين متشابهة لانفرق بينها باللمس .

نسحب عشوائيا وفي أن واحد أربع كرات من الصندوق . نعتبر الحدثين التاليين :

A : " الحصول على كرة حمراء واحدة فقط " B : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

1) بين أنّ : إحتمال الحدث A $P(A)=\frac{1}{2}$ ثمّ أحسب $P(B)$ إحتمال الحدث B.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) بيّن أنّ : $P(X=0)=\frac{1}{6}$ و $P(X=2)=\frac{3}{10}$.

ج) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثمّ أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=2+(x-2)e^{-x+2}$.

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.14<\alpha<1.15$.

3) إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=2x-1-(x-1)e^{-x+2}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بيّن أن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) أ) بيّن أنّ : $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2}$ ثمّ إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$ ثمّ أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

ج) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

د) أحسب $f(0)$ و $f(2)$ ثمّ أنشئ (Δ)، (T) و (C_f).

4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$(E): 2m-1-(x-1)e^{-x+2}=0$$

III. لتكن H الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $H(x)=(ax+b)e^{-x+2}$ حيث a و b عددان حقيقيان .

أ) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h المعرفة بـ : $h(x)=(x-1)e^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$.

ب) ليكن λ عددا حقيقيا حيث ، $\lambda>1$ و $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x=1$ و $x=\lambda$.

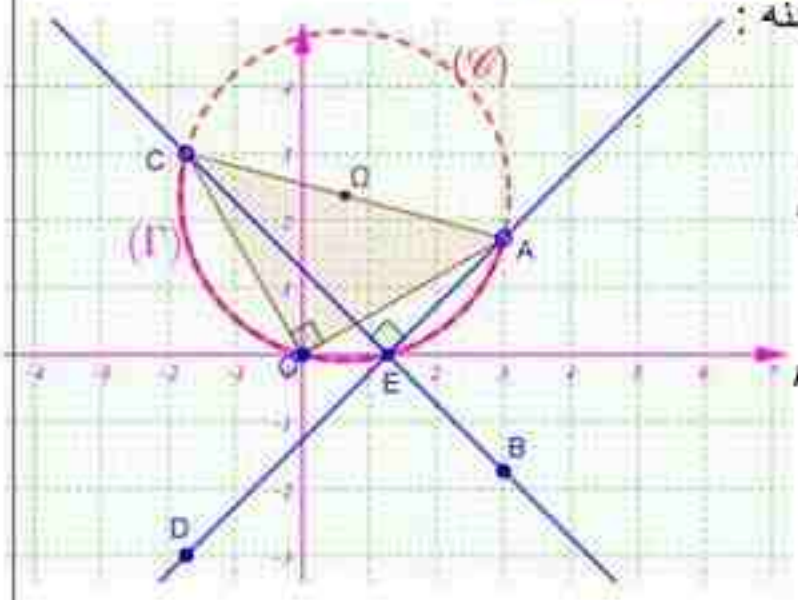
أحسب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ ثمّ أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

إنتهى الموضوع الأول

التصحيح	النقطة مجزأة
التمرين الاول :	**04 نقاط**
لدينا : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ و $v_n=u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n$	
1) حساب u_1 و v_1: $u_1=\frac{1}{4}u_0+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{2}\times 1=1$ و $v_1=u_1-\left(\frac{3}{4}\right)^1=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$	2×0.25
2) تبيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$: (v_n) هندسية يعني $v_{n+1}=v_n\times q$ لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{1}{4}\left(v_n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)+\frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ أي $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{1}{4}v_n$ ومنه : $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0=u_0-\left(\frac{3}{4}\right)^0=2-1=1$	0.75 2×0.25
- التعبير عن الحد العام v_n بدلالة n: لدينا : $v_n=v_0\times q^n=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$ إذن : $v_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$	0.5
3) إستنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$: لدينا : $v_n=u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ومنه $u_n=v_n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$ وبالتالي : $u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$	0.5
حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)=0$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0\end{cases}$	0.25
لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ تبيان أنّ : $S_n=\frac{16}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n-3\left(\frac{3}{4}\right)^n$	

0.25	لدينا : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ و $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ نضع : $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ و منه $u_n = v_n + a_n$ حيث (a_n) متتالية هندسية حدها الاول $a_0 = 1$ وأساسها $\frac{3}{4}$ إذن : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + a_0 + v_1 + a_1 + \cdots + v_n + a_n$ أي $S_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = v_0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} + a_0 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}$ ومنه $S_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} + 1 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}}$ أي $S_n = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$
0.5	وبالتالي : $S_n = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$
0.25	حساب $\lim_{n\to+\infty} S_n$: لدينا : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{16}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = \frac{16}{3}$ أي $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{16}{3}$ لأن $\begin{cases}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0\end{cases}$
05 نقاط	**التمرين الثاني :**
	لدينا : $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = -\sqrt{3} + 3i$.
0.5 0.25	**1) كتابة العدد z_A على الشكل الأسي ثمّ إستنتاج الشكل الأسي للعدد z_B :** لدينا : $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ حساب الطويلة : $\lvert z_A\rvert = \lvert 3 + i\sqrt{3}\rvert = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$ تعيين عمدة للعدد z_A : نضع $\theta_A = \arg(z_A)$ إذن : $\begin{cases}\cos\theta_A = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta_A = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ الشكل الأسي للعدد z_A هو : $z_A = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ إستنتاج الشكل الأسي للعدد z_B : $z_B = \overline{z_A} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

0.5 0.25	2) لدينا : العدد المركب $L_n=\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$ **حساب L_n بدلالة n :** لدينا : $L_n=\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n=\left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^n+\left(\frac{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{6}}+e^{-i\frac{n\pi}{6}}$ ومنه : $L_n=e^{i\frac{n\pi}{6}}+e^{-i\frac{n\pi}{6}}=\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}+\cos\left(-\frac{n\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{6}\right)$ أي $L_n=e^{i\frac{n\pi}{6}}+e^{-i\frac{n\pi}{6}}=\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}+\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}$ وبالتالي : $L_n=2\cos\frac{n\pi}{6}$ **إستنتاج قيمة L_{2018} :** $L_{2018}=2\cos\left(\frac{2018\pi}{6}\right)=2\cos\left(336\pi+\frac{2\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}=1$ إذن $L_{2018}=1$
0.25	3) **التحقق أنّ $z_C=i\,z_A$ ثمّ إستنتاج طبيعة المثلث OAC:** لدينا : $i\,z_A=i\left(3+i\sqrt{3}\right)=3i-\sqrt{3}=-\sqrt{3}+3i=z_C$ أي $z_C=i\,z_A$
0.5	**إستنتاج طبيعة المثلث OAC :** لدينا : $z_C=i\,z_A$ ومنه $\frac{z_C}{z_A}=i$ أي $\frac{z_C-z_O}{z_A-z_O}=i$ إذن لدينا : $\left\lvert\frac{z_C-z_O}{z_A-z_O}\right\rvert=\lvert i\rvert=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_O}{z_A-z_O}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ وبالتالي : $OC=OA$ و $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث OAC قائم ومتساوي الساقين
0.25	4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\arg\left(3+i\sqrt{3}-z\right)-\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ **التحقق أنّ النقطة O تنتمي إلى (Γ) ثمّ تعيين طبيعتها :** O تنتمي إلى (Γ) يعني $\arg\left(3+i\sqrt{3}-z_O\right)-\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z_O\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ لدينا : $\arg\left(3+i\sqrt{3}-z_O\right)-\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z_O\right)=\arg\left(3+i\sqrt{3}\right)-\arg\left(-\sqrt{3}+3i\right)$ أي $\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z_O\right)-\arg\left(3+i\sqrt{3}-z_O\right)=\arg(z_A)-\arg(z_C)=\arg(z_A)-\arg(i\times z_A)$ ومنه : $\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z_O\right)-\arg\left(3+i\sqrt{3}-z_O\right)=\arg(z_A)-\arg(z_A)-\arg(i)=-\frac{\pi}{2}$ ومنه $O\in(\Gamma)$

0.5	**تعيين طبيعة (Γ):** $\arg\left(3+i\sqrt{3}-z\right)-\arg\left(-\sqrt{3}+3i-z\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ يعني $\arg\left(z_A-z\right)-\arg\left(z_C-z\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ومنه $\arg\left(\frac{z_A-z}{z_C-z}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ أي $\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ وبالتالي مجموعة النقط (Γ) هي نصف الدائرة التي أحد أقطارها القطعة $[AC]$ والتي تشمل النقطة O ماعدا النقطتين A و C
0.5	**5) تبيان أنّ المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان :** لدينا : $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_B}=\frac{\overline{z_C}-z_A}{i\,z_A-\overline{z_A}}=\frac{-i\,\overline{z_A}-z_A}{i\,z_A+i^2\,z_A}=\frac{-\left(z_A+i\overline{z_A}\right)}{i\left(z_A+i\overline{z_A}\right)}=-\frac{1}{i}=i$ ومنه : $\arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_C-z_B}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ يعني $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$ وبالتالي: **المستقيمان (AD) و (BC) متعامدان**
0.5 2×0.25	**6) تعيين نسبة وزاوية التشابه S:** لدينا : العبارة المركبة للتشابه S من الشكل : $z'=az+b$ ولدينا : $\begin{cases}S(A)=C\\S(E)=E\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}z_C=a\,z_A+b\\z_E=a\,z_E+b\end{cases}$ وبالتالي $a=\frac{z_C-z_E}{z_A-z_E}=\frac{-\sqrt{3}+3i-3+\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}-3+\sqrt{3}}=\frac{3i-3}{i\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{3(-1+i)}{\sqrt{3}(1+i)}\times\frac{1-i}{1-i}$ ومنه : $a=\frac{3(-1+i)}{\sqrt{3}(1+i)}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2i=i\sqrt{3}$ إذن : $a=i\sqrt{3}$ نسبة التشابه S : $k=\lvert a\rvert=\lvert i\sqrt{3}\rvert=\sqrt{3}$ وزاوية التشابه S : $\theta=\arg(a)=\frac{\pi}{2}$
0.5	**إستنتاج أنّ النقط A ، E ، O و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$:** لدينا : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=-\frac{\pi}{2}$ و $\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه : AEC و AOC مثلثان قائمان . وبالتالي النقط A ، E ، O و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها Ω منتصف القطعة $[AC]$ ونصف قطرها $r=O\Omega=\lvert z_\Omega\rvert=\left\lvert\frac{z_C+z_A}{2}\right\rvert=\left\lvert\frac{iz_A+z_A}{2}\right\rvert$ $r=\frac{\lvert z_A(1+i)\rvert}{2}=\frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$ 

التمرين الثالث	04 نقاط
لدينا : صندوق على خمس كرات بيضاء ، ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من الصندوق. 1) تبيان أنّ : $P(A)=\frac{1}{2}$ $P(A)=\frac{C_3^1\times C_7^3}{C_{10}^4}=\frac{3\times 35}{210}=\frac{105}{210}=\frac{1}{2}$ حساب $P(B)$: $P(B)=\frac{C_5^1\times C_5^3+C_5^2\times C_5^2+C_5^3\times C_5^1+C_5^4}{C_{10}^4}=\frac{5\times 10+10\times 10+10\times 5+5}{210}$ أي $P(B)=\frac{205}{210}=$	2×0.5
2) أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X: قيم X هي $\{0;1;2;3\}$	0.75
ب) تبيان أنّ : $P(X=0)=\frac{1}{6}$ و $P(X=2)=\frac{3}{10}$: لدينا : $P(X=0)=\frac{C_3^0\times C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{1\times 35}{210}=\frac{1}{6}$ و $P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_7^2}{C_{10}^4}=\frac{3\times 21}{210}=\frac{3}{10}$	2×0.5
ج) قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X معرف بالجدول : $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P(X=x_i) & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{30} \end{array}$ لدينا : $P(X=3)=\frac{C_3^3\times C_7^1}{C_{10}^4}=\frac{1\times 7}{210}=\frac{1}{30}$ و $P(X=1)=\frac{C_3^1\times C_7^3}{C_{10}^4}=\frac{3\times 35}{210}=\frac{1}{2}$	0.75
حساب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X: $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=1.2$	0.5
التمرين الرابع :	**07 نقاط**
I. لدينا $g(x)=2+(x-2)e^{-x+2}$ المعرفة على $\mathbb{R}$	
1) دراسة تغيرات الدالة g: - حساب النهايات : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^{-x+2}=-\infty\end{cases}$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+(x-2)e^{-x+2}\right)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+(x-2)e^{-x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{x-2}{e^{x-2}}\right)=2$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2}{e^{x-2}}=0$	2×0.25
حساب المشتقة : $g'(x)=e^{-x+2}+(x-2)\left(-e^{-x+2}\right)=(1-x+2)e^{-x+2}=(3-x)e^{-x+2}$ أي $g'(x)=(3-x)e^{-x+2}$	0.25

دراسة إشارة المشتقة :

$g'(x)=0$ يعني $(3-x)e^{-x+2}=0$ ومنه $3-x=0$ لأن $e^{-x+2}\neq 0$

أي $x=3$

جدول إشارة المشتقة : إشارة المشتقة من إشارة $3-x$ لأن $e^{-x+2}>0$

0.25

$x\in$	$-\infty$		3		$+\infty$
$3-x$		+	0	-	
$g'(x)$		+	0	-	

جدول تغيرات الدالة g :

0.25

$x\in$	$-\infty$		3		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$2-e^{-1}$	↘	2

2) تبيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.14<\alpha<1.15$:

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.14;1.15]$

0.25

ولدينا : $\begin{cases} g(1.14)=2+(1.14-2)e^{-1.14+2}=-0.03 \\ g(1.15)=2+(1.15-2)e^{-1.15+2}=0.01 \end{cases}$ أي $g(1.14)\times g(1.15)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.14<\alpha<1.15$

3) إستنتاج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$:

0.25

$x\in$	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

$g(x)<0$ إذا كان $x\in]-\infty;\alpha[$

$g(x)=0$ إذا كان $x=\alpha$.

$g(x)>0$ إذا كان $x\in]\alpha;+\infty[$.

II. لدينا الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=2x-1-(x-1)e^{-x+2}$$

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

2×0.25

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x-1-(x-1)e^{-x+2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x\left(1-\frac{1}{2x}-\left(\frac{x-1}{2x}\right)e^{-x+2}\right)\right]=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-1-(x-1)e^{-x+2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-1-\frac{x-1}{x-2}\times\frac{x-2}{e^{x-2}}\right]=+\infty$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x-1}{x-2}}_{\to 1}\times\underbrace{\frac{x-2}{e^{x-2}}}_{\to 0}=0$

2) تبيان أنّ : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$:

0.25

لدينا :

$$f'(x)=2-\left[e^{-x+2}-(x-1)e^{-x+2}\right]=2-(2-x)e^{-x+2}=2+(x-2)e^{-x+2}=g(x)$$

جدول تغيرات الدالة f :

$x\in$	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

0.5

3) أ) تبيان أنّ : $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2}$ ثمّ إستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا : $f(\alpha)=2\alpha-1-(\alpha-1)e^{-\alpha+2}$

لدينا : $g(\alpha)=0$ و منه $2+(\alpha-2)e^{-\alpha+2}=0$ أي $e^{-\alpha+2}=-\frac{2}{\alpha-2}$

إذن : $f(\alpha)=2\alpha-1-(\alpha-1)\left(\frac{-2}{\alpha-2}\right)=2\alpha-1+\frac{2\alpha-2}{\alpha-2}=2\alpha-1+2+\frac{2}{\alpha-2}$

إذن $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2}$

0.5

حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $1.14<\alpha<1.15$ ومنه

$1.14-2<\alpha-2<1.15-2$

$-0.86<\alpha-2<-0.85$

$\frac{2}{-0.85}<\frac{2}{\alpha-2}<\frac{2}{-0.86}$

$-2.35<\frac{2}{\alpha-2}<-2.32$

و $2\times1.14+1<2\alpha+1<2\times1.15+1$

$3.28<2\alpha+1<3.30$

وبالتالي $3.28-2.35<2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2}<3.30-2.32$ أي $0.93<f(\alpha)<0.98$

0.25

ب) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-1-(x-1)e^{-x+2}-(2x-1)\right]$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-(x-1)e^{-x+2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{x-1}{x-2}\times\frac{x-2}{e^{x-2}}\right]=0$

أي المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$

دراسة الوضعية النسبية للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y=-(x-1)e^{-x+2}$

$x\in$	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		-	0	+	
$f(x)-y$		+	0	-	
الوضع النسبي		$(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ)	

0.5

ج) تبيان أنّ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) :

(T) يوازي المستقيم (Δ) يعني معامل توجيه (T) يساوي 2 أي $f'(x)=2$

إذن : $2+(x-2)e^{-x+2}=2$ ومنه $(x-2)e^{-x+2}=0$

0.5

وبالتالي $x=2$

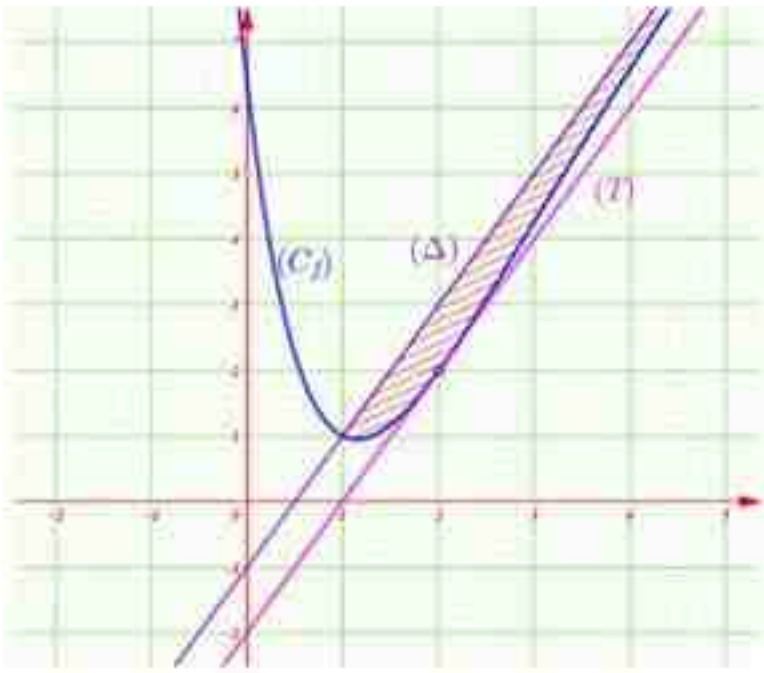
كتابة معادلة المماس (T):

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=2(x-2)+2=2x-2$ أي $(T)\ y=2x-2$

د) حساب $f(0)$ و $f(2)$ ثمّ أنشاء (Δ)، (T) و $(\mathcal{C}_f)$:

$f(0)=2\times0-1-(0-1)e^{2-0}=-1+e^2=6.39$

$f(2)=2\times2-1+(2-1)e^{2-2}=2$



0.75

4) مناقشة حلول المعادلة : $(E):2m-1-(x-1)e^{-x+2}=0$

(E) تكافئ $-1-(x-1)e^{-x+2}=-2m$

تكافئ $2x-1-(x-1)e^{-x+2}=2x-2m$

ومنه $f(x)=2x-2m$

حلول المعادلة هي فواصل النقط المشتركة بين $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم ذي المعادلة $y=2x-2m$ الموازي لكل من (Δ)و(T).

- إذا كان $-2m\in]-\infty,-2[$ أي $m\in]1,+\infty[$ فإنّ المعادلة ليس لها حل .
- إذا كان $-2m=-2$ أي $m=1$ فإنّ المعادلة لها حل وحيد موجب.
- إذا كان $-2m\in]-2,-1[$ أي $m\in\left]\frac{1}{2},1\right[$ فإنّ المعادلة تقبل حلين موجبين .
- إذا كان $-2m\in]-1,-1+e^2[$ أي $m\in\left]\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{e^2}{2}\right[$ فإنّ المعادلة لها حل موجب .

إذا كان $-2m=-1+e^2$ أي $m=\frac{1}{2}-\frac{e^2}{2}$ فإنّ المعادلة لها حل معدوم .

- إذا كان $-2m\in]-1+e^2,+\infty[$ أي $m\in\left]-\infty,\frac{1}{2}-\frac{e^2}{2}\right[$ فإنّ المعادلة لها حل وحيد سالب .

0.75

III. لدينا : $H(x)=(ax+b)e^{-x+2}$ **أ)تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h المعرفة بـ :** **$h(x)=(x-1)e^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$:** لدينا : $H'(x)=a\times e^{-x+2}+(ax+b)\left(-e^{-x+2}\right)=(a-ax-b)e^{-x+2}$ $H'(x)=(a-b-ax)e^{-x+2}$ H دالة أصلية للدالة h يعني $H'(x)=h(x)$ أي $(a-b-ax)e^{-x+2}=(x-1)e^{-x+2}$ بالمطابقة نجد : $\begin{cases}-a=1\\a-b=-1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$ أي $H(x)=-xe^{-x+2}$	0.25
ب) حساب $A(\lambda)$: في المجال $[1;\lambda]$ المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) ومنه $A(\lambda)=\int_1^{\lambda}\left(2x-1-f(x)\right)dx=\int_1^{\lambda}(x-1)e^{2-x}\,dx=\left[H(x)\right]_1^{\lambda}$ إذن : $A(\lambda)=H(\lambda)-H(1)=-\lambda e^{2-\lambda}+e$	0.25
حساب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(-\lambda e^{2-\lambda}+e\right)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(-\frac{\lambda}{e^{\lambda}}\times e^{2}\right)+e=e$	0.25

إنتهى تصحيح الموضوع الأول