الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية باتنة — ثانـــويـــة : زانة البيضاء الجديدة

الشعبة: الثالثة علوم تجريبية — دورة ماي 2018

اختبار البكالوريا التجريبي لمادة الريـــاضيـــات — المدة : 3 سا ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقاط)

1) نعتبر (U_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin(x)\,dx$

أ) بين بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $\cos(n\pi)=(-1)^n$

ب) باستخدام المكاملة بالتجزئة مرتين بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n=(-1)^n\dfrac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-n\pi}$

ج) أثبت أن: (U_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

2) نعتبر S_n المجموع المعرف على $\mathbb{N}$ بـــ : $S_n=1+\dfrac{U_1}{U_0}+\left(\dfrac{U_2}{U_1}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{U_n}{U_{n-1}}\right)^n$

أ) عبر عن S_n بدلالة n ، ثم أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

3) عبر بدلالة n عن الجداء P_n المعرف على $\mathbb{N}$ بـــ : $P_n=U_0\times U_1\times\ldots\times U_n$.

التمرين الثاني:(04 نقاط)

I. في الفضـــاء المنســوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر (P) و (Q) المســتويين المعرفين بالمعادلتين الديكارتيتين التاليتين: $x+y-z-2=0$ و $2x+y+3z=0$ على الترتيب .

و (Δ) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases}x=2k\\ y=k-2, \quad k\in\mathbb{R}\\ z=-k\end{cases}$

أ. أثبت أن: المستويين (P) و (Q) متعامدان .

ب. أعط تمثيلا وسيطيا لــ (D) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q) .

ج. أدرس الوضعية النسبية للمستقيمين (Δ) و (D).

د. أحسب المسافة بين النقطة $B(-2;5;0)$ و المستقيم (D).

II. لنعتبر f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=\dfrac{2-(\ln x)^2}{1+(\ln x)^2}$

أ. أدرس تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها .

ب. عين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياتها تحقق الجملة: $\begin{cases} x = 2f(\alpha) \\ y = f(\alpha)-2, \quad \alpha \in]0;+\infty[\\ z = -f(\alpha) \end{cases}$

التمرين الثالث(05,5 نقطة)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A: و B صورتي العددين Z_A: و Z_B على الترتيب حيث : $Z_A = i$ و $Z_B = -i$.

1) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z حيث $Z \neq Z_A$: النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $Z' = \dfrac{\overline{Z}(Z-i)}{\overline{Z}+i}$

أ) أثبت أن: إذا كان: $Z \neq 0$ و $Z' \neq 0$ فإن : $\begin{cases} |Z'| = |Z| \\ \arg(Z') \equiv 2\arg(Z-i) - \arg(Z)[2\pi] \end{cases}$.

(لاحظ أن: العددين $\overline{Z}+i$ و $Z-i$ مترافقان)

ب) بين أن: إذا كان: $|Z| = 1$ فإن: $Z' = -i$.

2) أ) أثبت أن: $Z'+i = \dfrac{Z\overline{Z}-1}{|\overline{Z}+i|^2}(Z-i)$ و أن: $Z'-Z = \dfrac{-i(Z+\overline{Z})}{|\overline{Z}+i|^2}(Z-i)$

ب) استنتج أن الشعاعين: $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM'}$ مرتبطان خطيا و أن الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدان.

ج) أعط طريقة لإنشاء النقطة M' .

3) أ) عين (E_1) مجموعة النقط M التي تنطبق على صورها M' .

ب) عين (E_2) مجوعة النقط M حيث Z' تخيلي صرف.

التمرين الرابع:(06,5 نقطة)

نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x) = (x-1)e^x + 1$

1) أدرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج إشارة $f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

2) نعتبر g الدالة المعرفة على بـــ $\mathbb{R}$: $g(x) = (x-2)e^x + x - 2$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 1cm$.

أ) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنجز جدول تغيراتها.

ب) بين أن : $y = x-2$ معادلة ديكارتية لــ(D) المستقيم المقارب المائل لـــ (C) بجوار $-\infty$.

ج) أدرس الوضعية النسبية لـــ (C) و (D).

د) بين أن: (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب حساب إحداثيتيها.

ه) عين إحداثيتي النقطة C التي يكون (T) مماس (C) فيها موازيا للمستقيم (D)، ثم بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : (C) يقع أعلى من (T) .

و) أرسم (D) و (T) ثم أنشئ (C).

3) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x) = x+m$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(05 نقاط)

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب Z_A ، Z_B و Z_C حيث : $Z_A = 1+i$ ، $Z_B = \sqrt{3}-i$ و $Z_C = 4$.

أ) أكتب الأعداد: Z_A ، Z_B و $\dfrac{Z_A}{Z_B}$ على الشكل المثلثي ، ثم استنتج الشكل الأسي للأعداد السابقة.

ب) أكتب العدد المركب $\dfrac{Z_A}{Z_B}$ على شكله الجبري، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

ج) أوجد قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n = \dfrac{1}{8}\left(1-\sqrt{3}i\right)$ ، أحسب $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^8$.

نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل النقطة $M\left(z\right)$ النقطة $M'\left(z'\right)$ حيث : $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}z$

أ) حدد طبيعة التحويل النقطي S و عناصره المميزة .

ب) عين المجموعة $\left(\Gamma_1\right)$ للنقط $M\left(z\right)$ من المستوي والتي تحقق: $z = z_c + 2e^{i\theta}$ لما θ تمسح $\mathbb{R}$.

ج) عين المجموعة $\left(\Gamma_2\right)$ للنقط $M\left(z\right)$ من المستوي والتي تحقق: $Arg\left(z-z_c\right) = \dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

د) أوجد صورة $\left(\Gamma_1\right)$ بالتحويل النقطي S ، ثم استنتج مساحتها.

التمرين الثاني:(04 نقاط)

يحتوي كيس U_1 على قريصتين تحملان الرقم 1 وعلى أربع قريصات تحمل الرقم 2، ويحتوي كيس U_2 على سبع كريات ثلاثة منها حمراء والأخرى خضراء. (ملاحظة : لا يمكن التمييز بين القريصات وكذا الكريات باللمس)

نسحب عشوائيا قريصة واحدة من U_1 ونسجل رقمها، إذا كان هذا الرقم 1 نقوم بسحب كرية واحدة من U_2 و إذا كان هذا الرقم 2 نقوم بسحب كريتين في أن واحد من U_2 .

1) مثل هذه الوضعية بشجرة الاحتمالات.

2) أحسب احتمال كل من الحدثين التاليين:

A : القريصة المسحوبة تحمل الرقم 1 .

B: القريصة المسحوبة تحمل الرقم 2 .

3) نعتبر الحدثين التاليين :

E_1: الحصول بالضبط على كرية حمراء .

E_2: الحصول على كريتين حمراوين .

أ) بين أن : $P\left(E_1\right) = \dfrac{11}{21}$ و $P\left(E_2\right) = \dfrac{2}{21}$.

ب) أحسب احتمال الحدث A علما أن الحدث E_1 محقق .

التمرين الثالث:(04 نقاط)

نعتبر المتتاليتين $\left(U_n\right)$ و $\left(V_n\right)$ المعرفتين على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $U_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$ و $V_n=U_n+\frac{1}{n(n!)}$.

1) بين أن: $\left(U_n\right)$ متزايدة و أن $\left(V_n\right)$ متناقصة .

2) بين أن: من أجل كل عددين طبيعيين غير معدومين p و q : $U_p\le V_q$.

3) استنتج أن: 2 حاد من الأسفل لــ $\left(V_n\right)$ و أن 3 حاد من الأعلى لــ $\left(U_n\right)$ ــ

4) بين أن المتتاليتين $\left(U_n\right)$ و $\left(V_n\right)$ متقاربتان و أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

التمرين الرابع:(07 نقاط)

1) نعتبر f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بــ : $f\left(x\right)=\frac{\ln\left(x\right)}{x}$

$\left(C\right)$تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث: $\left\|\vec{i}\right\|=1cm$.

أ. أدرس تغيرات الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها .

ب. أكتب معادلة ديكارتية لــ $\left(T\right)$ مماس $\left(C\right)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

ج. أرسم $\left(T\right)$ ثم أنشئ $\left(C\right)$.

د. احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $\left(C\right)$ و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

ه. ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $\ln\left(x\right)-mx=0$.

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : نرمز بــ $f^{(n)}$ إلى المشتقة من الرتبة n للدالة f .

أ) أحسب: $f^{(2)}\left(x\right)$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$.

ب) بين بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا:من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f^{(n)}\left(x\right)=\frac{U_n+V_n\ln\left(x\right)}{x^{n+1}}$$

حيث: $\begin{cases}U_1=1\\U_{n+1}=V_n-\left(n+1\right)U_n\end{cases}$ و $\begin{cases}V_1=-1\\V_{n+1}=-\left(n+1\right)V_n\end{cases}$

ج) عبر بدلالة n عن V_n.

د) بين بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n=\left(-1\right)^{n+1}n!\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)$

ه) استنتج عبارة $f^{(n)}\left(x\right)$ بدلالة n.

و) باستخدام المكاملة بالتجزئة أحسب التكامل : $\int_1^e xf^{(3)}\left(x\right)dx$

بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2018

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية باتنة — ثانـــويـــة : زانة البيضاء الجديدة

الشعبة: الثالثة علوم تجريبية — دورة ماي 2018

الإجابة النموذجية لاختبار البكالوريا التجريبي لمادة الريـــاضيـــات

الموضوع الأول

حل التمرين الأول:(04 نقاط)

أ) الإثبات بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $\cos(n\pi)=(-1)^n$

نرمز بـــ $P(n)$ للخاصية : $\cos(n\pi)=(-1)^n$ حيث n عدد طبيعي .

المرحلة الأولى: نتحقق من صحة $P(0)$.

لدينا : $\cos(0\pi)=\cos(0\pi)=1=(-1)^0$ ومنه $P(0)$ محققة.

المرحلة الثانية: نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي 0.

أي : $\cos(n\pi)=(-1)^n$.

ونبرهن صحة $P(n+1)$ ، أي نبرهن أن : $\cos((n+1)\pi)=(-1)^{n+1}$.

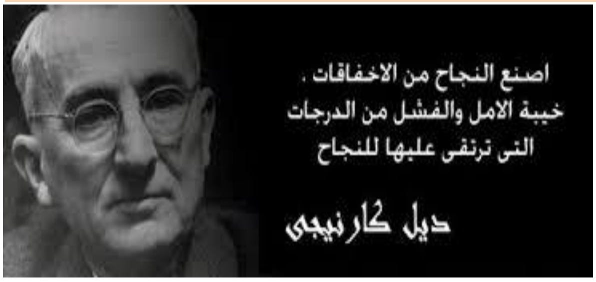
لدينا : $\cos((n+1)\pi)=\cos(n\pi+\pi)=-\cos(n\pi)$

ومنه : $\cos((n+1)\pi)=-(-1)^n=(-1)^{n+1}$

إذن : $P(n+1)$ صحيحة .

الاستنتاج : من أجل كل عدد طبيعي n: $\cos(n\pi)=(-1)^n$

ب) إثبات أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n=(-1)^n\dfrac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-n\pi}$



بوضع : $\begin{cases}U(x)=e^{-x}\\ v'(x)=\sin(x)\end{cases}$ نجد : $\begin{cases}U'(x)=-e^{-x}\\ v(x)=-\cos(x)\end{cases}$

ومنه: $U_n=\left[-e^{-x}\cos(x)\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi}-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\cos(x)dx$

نحسب: $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\cos(x)dx$

نضع مجددا : $\begin{cases}U(x)=e^{-x}\\ v'(x)=\cos(x)\end{cases}$ نجد: $\begin{cases}U'(x)=-e^{-x}\\ v(x)=\sin(x)\end{cases}$

ومنه: $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\cos(x)\,dx = \left[e^{-x}\sin(x)\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} + U_n$

ومنه: من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n = (-1)^n \dfrac{e^{-\pi}+1}{2} e^{-n\pi}$

ج) إثبات أن : (U_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n: $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = (-1)^{n+1}\dfrac{e^{-\pi}+1}{2}e^{-(n+1)\pi}(-1)^{-n}\dfrac{2}{e^{-\pi}+1}e^{n\pi} = -e^{-\pi}$

وبالتالي: (U_n) متتالية هندسية أساسها q حيث : $q=-e^{-\pi}$ وحدها الأول هو : $U_0 = \dfrac{e^{-\pi}+1}{2}$

أ) التعبير عن S_n بدلالة n ، ثم حساب : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = 1 + \dfrac{U_1}{U_0} + \left(\dfrac{U_2}{U_1}\right)^2 + \dots + \left(\dfrac{U_n}{U_{n-1}}\right)^n$

ومنه : من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{1+(-1)^n e^{-(n+1)\pi}}{1+e^{-\pi}}$

و لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1+e^{-\pi}}$

1) التعبير بدلالة n عن الجداء P_n :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n: $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n = U_0(U_0 q)\dots(U_0 q)^n = U_0^{n+1} q^{1+2+\dots+n}$.

ومنه: من أجل كل عدد طبيعي n: $P_n = \left(\dfrac{e^{-\pi}+1}{2}\right)^{n+1}\left(-e^{-\pi}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

التمرين الثاني:(04 نقاط)

أ. إثبات أن: المستويين (P) و (Q) متعامدان:

نعتبر $\vec{n}(1;1;-1)$ و $\vec{n}'(2;1;3)$ شعاعين ناظميين لكل من (P) و (Q) على الترتيب .

بما أن: $\vec{n}.\vec{n}'=0$ فإن: $(P)\perp(Q)$

ب. إعطاء تمثيل وسيطي لــ(D) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q) :

بما أن: $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مرتبطين خطيا فإن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (D) الجملة

تمثيل ديكارتي له: $\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$

بوضع: $z=t$ نجد: $\begin{cases} x=-2-4t \\ y=4+5t \\ z=t \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$

ج. دراسة الوضعية النسبية للمستقيمين (Δ) و (D):

ليكن : $\vec{U}(2;1;-1)$ و $\vec{v}(-4;5;1)$ شعاعي توجيه لكل من (Δ) و (D).

ندرس الارتباط الخطي للشعاعين $\vec{U}$ و $\vec{v}$.

بما أن: $\frac{5}{1} \neq \frac{-4}{2}$ فإن: $\vec{U}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا.

وبالتالي المستقيمان (Δ) و (D) إما متقاطعان في نقطة $H(x,y,z)$ و إما ليسا من نفس المستوي.

لدينا: $H \in (\Delta) \cap (D)$ يكافئ : $\begin{cases} H \in (\Delta) \\ H \in (D) \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} 2k = -2-4t \\ k-2 = 4+5t \\ -k = t \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} t = -1 \\ k = 1 \end{cases}$

و بالتالي : $H(2,-1,-1)$

د. حساب المسافة بين النقطة $B(-2;5;0)$ و المستقيم (D):

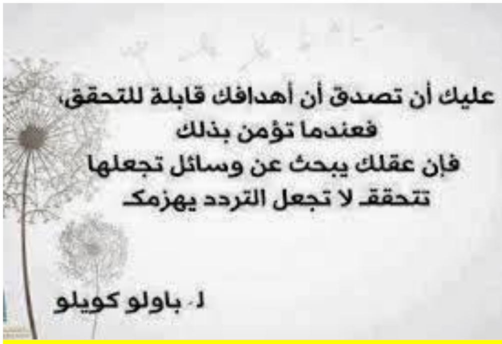
$$d(B;(D)) = \sqrt{d^2(B;(Q)) + d^2(B;(P))} = \sqrt{\left(\frac{|2(-2)+1(5)+3(0)|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}\right)^2 + \left(\frac{|(-2)+1(5)-1(0)-2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{42}}$$

ا. لنعتبر f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x) = \frac{2-(\ln x)^2}{1+(\ln x)^2}$

أ. دراسة تغيرات الدالة f ثم إنجاز جدول تغيراتها :

حساب النهايتين:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2-(\ln x)^2}{1+(\ln x)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2\left(\frac{2}{(\ln x)^2}-1\right)}{(\ln x)^2\left(\frac{1}{(\ln x)^2}+1\right)} = -1$.



$$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{2-(\ln x)^2}{1+(\ln x)^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{(\ln x)^2\left(\frac{2}{(\ln x)^2}-1\right)}{(\ln x)^2\left(\frac{1}{(\ln x)^2}+1\right)} = -1$$

حساب المشتقة :

لدينا : من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{-6\ln(x)}{x\left(1+(\ln(x))^2\right)^2}$

جدول التغيرات :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$f(x)$	$-1 \nearrow 2$	$2 \searrow 1$

ب. تعيين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياتها تحقق الجملة: $\begin{cases} x=2f(\alpha) \\ y=f(\alpha)-2, \quad \alpha\in]0;+\infty[\\ z=-f(\alpha) \end{cases}$

لدينا : إذا كان: $\alpha\in]0;+\infty[$ فإن : $f(\alpha)\in]-1;2]$

ومنه : $\begin{cases} x=2f(\alpha) \\ y=f(\alpha)-2, \quad f(\alpha)\in]-1;2] \\ z=-f(\alpha) \end{cases}$

وبالتالي: مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AC]$ باستثناء النقطة A حيث : $C(4;0;-2)$ و $A(-2;-3;1)$.

التمرين الثالث(05,5 نقطة)

أ) إثبات أن: إذا كان: $Z\neq 0$ و $Z'\neq 0$ فإن : $\begin{cases} |Z'|=|Z| \\ \arg(Z')\equiv 2\arg(Z-i)-\arg(Z)[2\pi] \end{cases}$.

بفرض أن: $Z\neq 0$ و $Z'\neq 0$ يكون لدينا : $|Z'|=\left|\frac{\overline{Z}(Z-i)}{\overline{Z}+i}\right|=\frac{|\overline{Z}||(Z-i)|}{|\overline{Z}+i|}=|\overline{Z}|=|Z|$

$$\arg(Z')\equiv\arg\left(\frac{\overline{Z}(Z-i)}{\overline{Z}+i}\right)[2\pi]$$

و :

$$\arg(Z')\equiv\arg\overline{Z}(Z-i)-\arg\left(\overline{Z-i}\right)[2\pi]$$

$$\arg(Z')\equiv\arg\overline{Z}+\arg(Z-i)+\arg(Z-i)[2\pi]$$

$$\arg(Z')\equiv-\arg Z+2\arg(Z-i)[2\pi]$$

ب) إثبات أن: إذا كان: $|Z|=1$ فإن: $Z'=-i$.

نفرض أن : $|Z|=1$ ومنه : $Z'+i=\frac{\overline{Z}(Z-i)}{\overline{Z}+i}+i=\frac{\overline{Z}(Z-i)+i(\overline{Z}+i)}{\overline{Z}+i}=\frac{\overline{Z}Z-1}{\overline{Z}+i}=\frac{|Z|^2-1}{\overline{Z}+i}=0$

إذن: إذا كان: $|Z|=1$ فإن: $Z'=-i$.

1) أ) إثبات أن: $Z'+i=\frac{Z\overline{Z}-1}{|\overline{Z}+i|^2}(Z-i)$ و أن: $Z'-Z=\frac{-i(Z+\overline{Z})}{|\overline{Z}+i|^2}(Z-i)$

$$Z'+i=\frac{\overline{Z}(Z-i)}{\overline{Z}+i}+i=\frac{\overline{Z}(Z-i)+i(\overline{Z}+i)}{\overline{Z}+i}=\frac{\overline{Z}Z-1}{\overline{Z}+i}=\frac{\overline{Z}Z-1}{|\overline{Z}+i|^2}(Z-i)$$

$$Z'-Z=\frac{\overline{Z}(Z-i)}{\overline{Z}+i}-Z=\frac{\overline{Z}(Z-i)-Z(\overline{Z}+i)}{\overline{Z}+i}=\frac{-i(Z+\overline{Z})}{\overline{Z}+i}=\frac{-i(Z+\overline{Z})}{|\overline{Z}+i|^2}(Z-i)$$

ب) استنتاج أن الشعاعين: $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM'}$ مرتبطان خطيا و أن الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدان:

بما أن : $Z'+i=\dfrac{Z\overline{Z}-1}{\left|\overline{Z}+i\right|^2}(Z-i)$ فإن : $\dfrac{Z'+i}{Z-i}=\dfrac{Z\overline{Z}-1}{\left|\overline{Z}+i\right|^2}$

$$\arg\left(\frac{Z'+i}{Z-i}\right)\equiv\frac{Z\overline{Z}-1}{\left|\overline{Z}+i\right|^2}[2\pi]$$

إذن: $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM'}\right)\equiv\dfrac{|Z|^2-1}{\left|\overline{Z}+i\right|^2}[2\pi]$

$$\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM'}\right)\equiv 0[\pi]$$

وبالتالي الشعاعان: $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM'}$ مرتبطان خطيا.

بما أن: $Z'-Z=\dfrac{-i\left(Z+\overline{Z}\right)}{\left|\overline{Z}+i\right|^2}(Z-i)$ فإن: $\dfrac{Z'-Z}{Z-i}=\dfrac{-i\left(Z+\overline{Z}\right)}{\left|\overline{Z}+i\right|^2}$

$$\arg\left(\frac{Z'-Z}{Z-i}\right)\equiv\frac{-i\left(Z+\overline{Z}\right)}{\left|\overline{Z}+i\right|^2}[2\pi]$$

إذن : $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{MM'}\right)\equiv\dfrac{-2i\,\mathrm{Rel}(Z)}{\left|\overline{Z}+i\right|^2}[2\pi]$

$$\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{MM'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$$

وبالتالي: الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدان

ج) إعطاء طريقة لإنشاء النقطة M' :

نرسم المستقيم (Δ) العمودي (AM) على في النقطة M ،ثم نرسم المستقيم (D) الموازي لــ (AM) المار بالنقطة B نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D) هي النقطة M'.

2) أ) تعيين (E_1) مجموعة النقط M التي تنطبق على صورها M' :

مجموعة النقط M التي تنطبق على صورها M' يكافيء $Z'=Z$ و $Z\neq Z_A$

أي: $\dfrac{-i\left(Z+\overline{Z}\right)}{\left|\overline{Z}+i\right|^2}(Z-i)=0$ و $Z\neq Z_A$

ومنه: $\left(Z+\overline{Z}\right)=0$ و $Z\neq Z_A$

إذن: $\mathrm{Rel}(Z)=0$ و $Z\neq Z_A$

وبالتالي : $(E_1)=(Oy)-\{A\}$

ت) تعيين (E_2) مجموعة النقط M حيث Z' تخيلي صرف:

Z' تخيلي صرف يكافئ $\mathrm{Rel}(Z')=0$

ومنه: $\left(Z'+\overline{Z'}\right)=0$

$$\frac{\overline{Z}(Z-i)}{\overline{Z}+i}+\overline{\left(\frac{\overline{Z}(Z-i)}{\overline{Z}+i}\right)}=0$$

$$\frac{\overline{Z}(Z-i)}{\overline{Z}+i}+\frac{Z(\overline{Z}+i)}{Z-i}=0$$

$$\frac{\overline{Z}(Z-i)}{\overline{Z}+i}+\frac{Z(\overline{Z}+i)}{Z-i}=0$$

$$\frac{\overline{Z}(Z-i)^2+Z(\overline{Z}+i)^2}{|\overline{Z}+i|^2}=0$$

$$\begin{cases}\overline{Z}(Z-i)^2+Z(\overline{Z}+i)^2=0\\ Z\neq Z_A\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overline{Z}\left(Z^2-1-2iZ\right)+Z\left(\overline{Z}^2-1+2iZ\right)=0\\ Z\neq Z_A\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(Z\overline{Z}-1\right)\left(Z+\overline{Z}\right)=0\\ Z\neq Z_A\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(|Z|^2-1\right)=0Z\ \ \mathrm{Re}\ (\ \ )\cancel{b}0\\ Z\neq Z_A\end{cases}$$

وبالتالي: (E_2) هي اتحاد الدائرة المثلثية و المستقيم $(0y)$ باستثناء النقطة A.

حل التمرين الرابع:(06,5 نقطة)

1) دراسة تغيرات الدالة f ، ثم استنتاج إشارة $f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x :

حساب النهايتين:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x-1)}{x}\left(xe^x\right)+1\right]=1 \text{ و } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^x+1\right]=+\infty$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{x}\right]=1$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=0$.

حساب المشتقة:

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=xe^x$

إشارة المشتقة:

إشارة: $f'(x)$ هي إشارة x لأن: من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x\succ 0$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

إشارة الدالة f :

من جدول التغيرات لدينا من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x)\geq 0$

نلخص إشارة الدالة f في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

أ) دراسة تغيرات الدالة g ، ثم إنجاز جدول تغيراتها:

حساب النهايتين :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x-2)\left(e^{x}+1\right)\right]=-\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-2)e^{x}+x-2\right]=+\infty$$

حساب المشتقة:

من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)=f(x)$

إشارة المشتقة :

من أجل كل عدد حقيقي x إشارة: $g(x)$ هي إشارة $f(x)$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$		↗		$+\infty$

ب) إثبات أن : $y=x-2$ معادلة ديكارتية لـ(D) المستقيم المقارب المائل لـ (C) بجوار $-\infty$:

لدينا: $\lim_{x\to-\infty}\left[g(x)-(x-2)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x-2}{x}\left(xe^{x}\right)\right]=0$

ومنه : $(D): y=x-2$ المستقيم المقارب المائل لـ (C) بجوار $-\infty$

ج) دراسة الوضعية النسبية لـ (C) و (D):

ندرس إشارة الفرق : $\left[g(x)-(x-2)\right]$

من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)-(x-2)=(x-2)e^{x}$

من أجل كل عدد حقيقي x إشارة: $\left[g(x)-(x-2)\right]$ هي إشارة $(x-2)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$\left[g(x)-(x-2)\right]$		$-$	0	$+$	

الوضع النسبي لـ (C) و (D)	(C) أسفل	(D) يقطع (C)	(C) أعلى (D) (D)

إثبات أن: (C) يقبل نقطة انعطاف :

لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x : $g''(x)=f'(x)$

ومنه : من أجل كل عدد حقيقي x إشارة: $g''(x)$ هي إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

بما أن المشتقة الثانية للدالة g انعدمت من أجل $x=0$ مغيرة إشارتها فإن النقطة التي إحداثيتها $(0;-4)$ نقطة انعطاف لـ (C) .

ه) تعيين إحداثيتي النقطة C التي يكون (T) مماس (C) فيها موازيا للمستقيم (D) :

لدينا مستقيمان متوازيان يكافئ أن لهما نفس معامل التوجيه

إذن نبحث عن مجموعة حلول المعادلة: $g'(x)=1$

$g'(x)=1$ يكافئ

$$(x-1)e^x+1=1$$
$$(x-1)e^x=0$$
$$(x-1)=0$$
$$x=1$$

ومنه : إحداثيتي النقطة C هما : $(1;-1-e)$

إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي x : (C) يقع أعلى من (T) :

كتابة معادلة ديكارتية لـ (T) :

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$(T): y=x-e-2$$

ندرس إشارة الفرق : $[g(x)-(x-e-2)]$

من أجل كل عدد حقيقي x : $[g(x)-(x-e-2)]=(x-2)e^x+e$

لهذا الغرض نرس اتجاه تغير الدالة U المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $U(x)=(x-2)e^x+e$

حساب المشتقة:

من أجل كل عدد حقيقي x : $U'(x)=(x-1)e^x$

إشارة المشتقة :

من أجل كل عدد حقيقي x إشارة: $U'(x)$ هي إشارة $(x-1)$

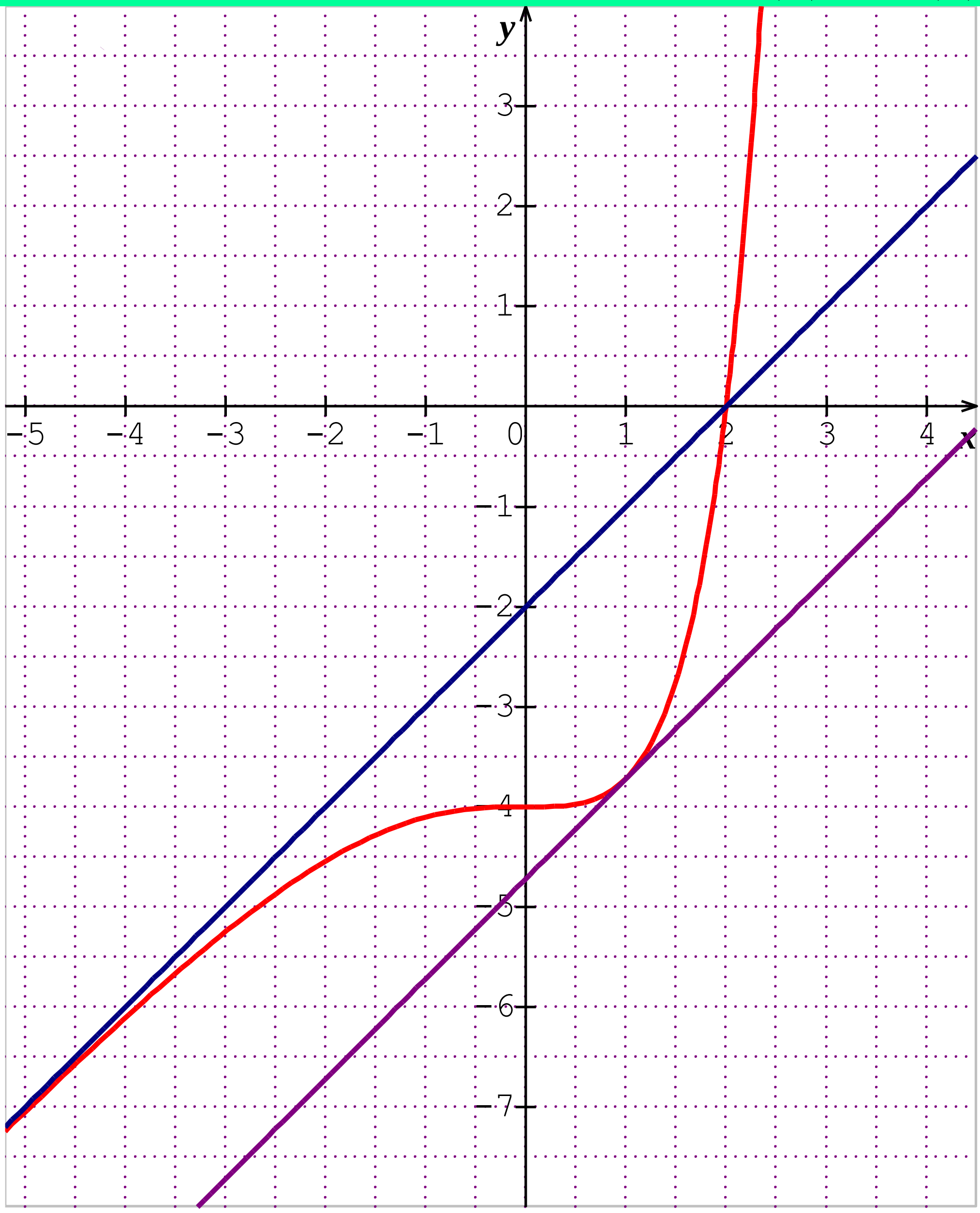
جدول تغيرات الدالة U:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$U'(x)$		$-$	0	$+$	
$U(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $U(x)\geq 0$

وبالتالي: من أجل كل عدد حقيقي x: (C) يقع أعلى من (T).

و) رسم (D) و (T) وإنشاء (C):



2) المناقشة بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)=x+m$:

مجموعة الحلول البيانية للمعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيم (Δ_m) حيث $y=x+m$ معادلة له .

($(\Delta_m)\|(T)$ ويقع حامل محور التراتيب في النقطة التي ترتيبها m)

إذا كان : $m\in]-\infty,-e-2[$ فإن المعادلة لاتقبل حلولا .

إذا كان : $m=-e-2$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

إذا كان : $m\in]-e-2,-4[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين .

إذا كان : $m=-4$ فإن المعادلة تقبل حلا معدوما .

إذا كان : $m\in]-4,-2[$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

إذا كان : $m\in]-\infty,-e-2[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا.

الموضوع الثاني

حل التمرين الأول:(05 نقاط)

أ) كتابة الأعداد: Z_A ، Z_B و $\frac{Z_A}{Z_B}$ على الشكل المثلثي ، ثم استنتاج الشكل الأسي لها:

الشكل المثلثي للأعداد: $Z_A=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$Z_B=\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\overline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\frac{Z_A}{Z_B}=\frac{\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]}{\left[2,-\frac{\pi}{6}\right]}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right]=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5\pi}{12}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

الشكل الأسي للأعداد السابقة : $Z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $Z_B=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $\frac{Z_A}{Z_B}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

ب) كتابة العدد المركب $\frac{Z_A}{Z_B}$ على شكله الجبري، ثم استنتاج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

لدينا : $\frac{Z_A}{Z_B}=\frac{Z_A\overline{Z_B}}{Z_B\overline{Z_B}}=\frac{Z_A\overline{Z_B}}{|Z_B|^2}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

ومنه : $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{4}\end{cases}$

وبالتالي: $\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

ج) إيجاد قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1}{8}\left(1-\sqrt{3}i\right)$ ، ثم حساب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^8$:

نكتب العدد على الشكل الأسي : $\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{3}i\right) = \frac{2}{8}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4\overline{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ولدينا: $\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{5n\pi}{12}}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{5n\pi}{12}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه: $\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^2} \\ \frac{5n\pi}{12} \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{2^2} \\ \frac{5n\pi}{12} \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

ومنه: $n=4$

أ) تحديد طبيعة التحويل النقطي S و عناصره المميزة :

لدينا العبارة المركبة للتحويل S من الشكل: $Z' = aZ + b$ حيث: $a = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ و $b=0$.

وبما أن: $\begin{cases} a \in \mathbb{C}^* - \{1\} \\ |a| \neq 1 \end{cases}$ فإن: S تشابه مباشر نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{5\pi}{12}$ قيس لزاويته ومركزه النقطة O.

ب) تعيين المجموعة (Γ_1) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق: $z = z_c + 2e^{i\theta}$ لما θ تمسح $\mathbb{R}$:

لديناَ : $z = z_c + 2e^{i\theta}$

$$z - z_c = 2e^{i\theta}$$

ومنه: $|z - z_c| = |2e^{i\theta}|$

$$|z - z_c| = 2$$

وبالتالي : (Γ_1) هي الدائرة التي مركزها C وطول نصف قطرها 2 .

ج) تعيين المجموعة (Γ_2) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق: $Arg(z-z_c)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

لدينا: $Arg(z-z_c)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

ومنه : $(\overrightarrow{U},\overrightarrow{CM})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

وبالتالي: (Γ_2) هي نصف المستقيم المفتوح الذي مبدؤه النقطة C و الذي يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$ قيس لها.

د) تعيين صورة (Γ_1) بالتحويل النقطي S ، ثم استنتاج مساحتها:

صورة (Γ_1) بالتشابه المباشر S هي الدائرة (C) التي مركزها النقطة Ω حيث

$$\Omega=S(C)$$

$$Z_\Omega=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}Z_C$$

$$Z_\Omega=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

وطول نصف قطرها r حيث $r=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2$.

$$r=\sqrt{2}$$

استنتاج مساحتها: $S_{(C)}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 S_{(\Gamma_1)}$

$$S_{(C)}=2\pi \quad ua$$

حل **التمرين الثاني:(04 نقاط)**

1) تمثيل هذه الوضعية بشجرة الاحتمالات:

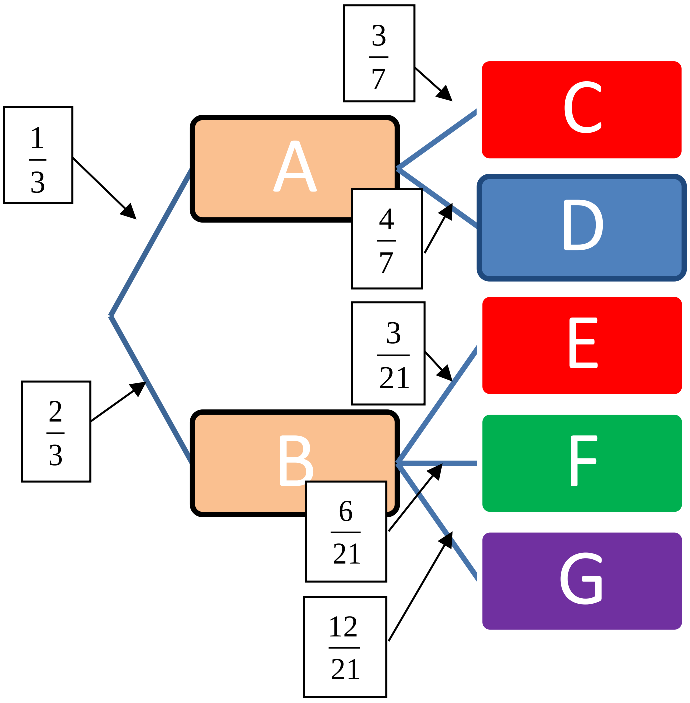
نرمز بـــ : C للحادثة " الكرية المسحوبة حمراء"

D للحادثة " الكرية المسحوبة خضراء "

E للحادثة " الكريتين المسحوبتين حمراوين "

F للحادثة " الكريتين المسحوبتين خضراوين "

G للحادثة " الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون "



2) حساب احتمال كل من الحدثين التاليين:

$$P(B)=\frac{2}{3} \text{،} \; P(A)=\frac{1}{3}$$

3) نعتبر الحدثين التاليين :

E_1: الحصول بالضبط على كرية حمراء .أي: الكرية المسحوبة حمراء وإما إحدى الكريتين لمسحوبتين حمراء

.

E_2: الحصول على كريتين حمراوين .أي : الكريتين المسحوبتين حمراوين.

أ) إثبات أن :

$$P(E_1)=P(A\cap C)+P(B\cap G)$$
$$P(E_1)=P(A)P_A(C)+P(B)P_B(G)$$
$$P(E_1)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{C_3^2}{C_7^2}$$
$$P(E_1)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{21}$$
$$P(E_1)=\frac{11}{21}$$

و

$$P(E_2)=P(B\cap E)$$
$$P(E_2)=P(B)P_B(E)$$
$$.\,P(E_2)=\frac{2}{3}\times\frac{C_3^2}{C_7^2}$$
$$P(E_2)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{21}$$
$$P(E_2)=\frac{2}{21}$$

ب) حساب احتمال الحدث A علما أن الحدث E_1 محقق .

$$P_{E_1}(A)=\frac{P(A\cap E_1)}{P(E_1)}=\frac{P(A)P_A(E_1)}{P(E_1)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}}{\frac{11}{21}}=\frac{3}{11}$$

حل التمرين الثالث:(04 نقاط)

1) إثبات أن: (U_n) متزايدة و أن (V_n) متناقصة:

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{(n+1)!}$

وبما أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $\frac{1}{(n+1)!}\succ 0$ فإن : (U_n) متزايدة .

$$V_{n+1}-V_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+1)!}-\frac{1}{n(n)!}$$

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$V_{n+1}-V_{n+1}=\frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$V_{n+1}-V_{n+1}=\frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$$

وبما أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $\frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}\prec 0$ فإن: (V_n) متناقصة.

2) إثبات أن: من أجل كل عددين طبيعيين غير معدومين p و q : $U_p\le V_q$:

نميز حالتين :

الحالة الأولى: $p\le q$

إذا كان: $p\le q$ فإن: $U_p\le U_q$ لأن المتتالية (U_n) متزايدة .

ومنه: $U_p\le U_q+\frac{1}{q(q)!}$

و بالتالي: $U_p\le V_q$

الحالة الثانية: $p\ge q$

إذا كان: $p\ge q$ فإن: $V_p\le V_q$ لأن المتتالية (V_n) متناقصة .

أي: $U_p+\frac{1}{p(p)!}\le V_q$

و بالتالي: $U_p\le V_q$

وعليه: من أجل كل عددين طبيعيين غير معدومين p و q : $U_p\le V_q$.

3) استنتاج أن: 2 حاد من الأسفل لـ (V_n) و أن 3 حاد من الأعلى لـ (U_n):

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $U_1 \le U_2 \le \ldots \le U_n$ و $V_n \le V_{n-1} \le \ldots \le V_1$ لأن المتتالية (U_n) متزايدة والمتتالية (V_n) متناقصة .

ومن السؤال السابق لدينا: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$U_1 \le U_2 \le \ldots \le U_n \le V_n \le V_{n-1} \le \ldots \le V_1$$

وبالتالي : (U_n) محدودة من الأعلى بـ V_1: و (V_n) محدودة من الأسفل بـ U_1.

وعليه: 2 حاد من الأسفل لـ (V_n) و 3 حاد من الأعلى لـ (U_n).

4) إثبات أن المتتاليتين: (U_n) و (V_n) متقاربتان و أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$:

بما أن : (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو العدد الحقيقي l ، وبما أن: (V_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو العدد الحقيقي l'.

إثبات أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(U_n + \dfrac{1}{n(n)!}\right)$

ومنه: $l' = l$

حل التمرين الرابع:(07 نقاط)

أ. دراسة تغيرات الدالة f ، ثم إنجاز جدول تغيراتها :

حساب النهايتين :

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\>}}\left[\frac{1}{x}\ln(x)\right] = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x}\right] = 0$$

حساب المشتقة:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

إشارة المشتقة :

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$:إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1-\ln(x)$

جدول تغيرات الدالة :

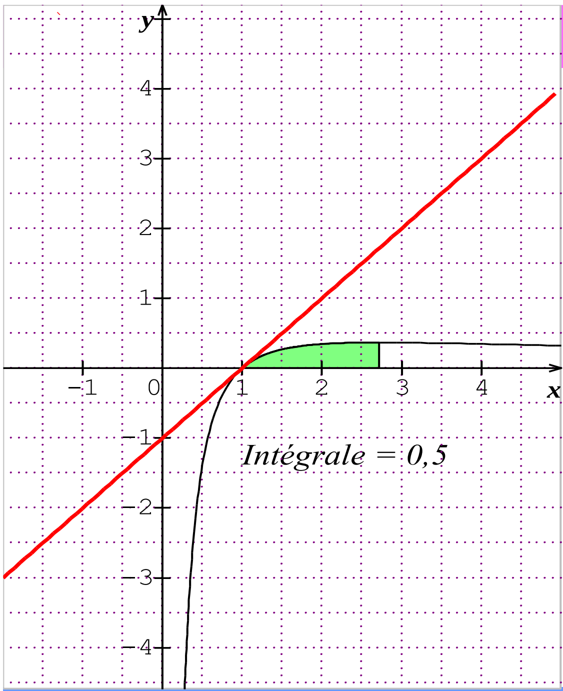
x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

كتابة معادلة ديكارتية لـــ (T) مماس (C) في النقطة ذات الفاصلة 1:

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T): y = x-1$$

ب. رسم (T) وإنشاء (C) :



ج. حساب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$

$$A = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$$

نضع : $t = \ln(x)$ ومنه : $dt = \dfrac{dx}{x}$

إذا كان: $x=1$ فإن: $t=0$ و إذا كان: $x=e$ فإن: $t=1$

ومنه: $A = \int_0^1 t dt = \left[\dfrac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}cm^2$

د. المناقشة البيانية تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $\ln(x) - mx = 0$:

مجموعة الحلول البيانية للمعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيم (Δ_m) حيث $y=m$ معادلة له.

((Δ_m) يقع حامل محور التراتيب في النقطة التي ترتيبها m)

إذا كان: $m \in]-\infty, 0]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا.

إذا كان : $m \in]0, e^{-1}[$ فإن المعادلة تقبل حلين .

إذا كان: $m = e^{-1}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا .

إذا كان : $m \in]e^{-1}, +\infty[$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا.

أ) حساب: $f^{(2)}(x)$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f^{(2)}(x) = \dfrac{-3 + 2\ln(x)}{x^3}$

ب) إثبات بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا:

من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f^{(n)}(x)=\dfrac{U_n+V_n\ln(x)}{x^{n+1}}$

حيث: $\begin{cases}U_1=1\\ U_{n+1}=V_n-(n+1)U_n\end{cases}$ و $\begin{cases}V_1=-1\\ V_{n+1}=-(n+1)V_n\end{cases}$

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية : $f^{(n)}(x)=\dfrac{U_n+V_n\ln(x)}{x^{n+1}}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم و $x\in\mathbb{R}_+^*$

المرحلة الأولى: نتحقق من صحة $P(1)$.

لدينا : $\dfrac{U_1+V_1\ln(x)}{x^{1+1}}=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}=f'(x)$ ومنه $P(1)$ محققة.

المرحلة الثانية : نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي 1.

أي : $f^{(n)}(x)=\dfrac{U_n+V_n\ln(x)}{x^{n+1}}$.

ونبرهن صحة $P(n+1)$ ، أي نبرهن أن : $f^{(n+1)}(x)=\dfrac{U_{n+1}+V_{n+1}\ln(x)}{x^{n+2}}$.

لدينا : $f^{(n)}(x)=\dfrac{U_n+V_n\ln(x)}{x^{n+1}}$

ومنه : $f^{(n+1)}(x)=\dfrac{U_{n+1}+V_{n+1}\ln(x)}{x^{n+2}}$

إذن : $P(n+1)$ صحيحة .

الاستنتاج : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f^{(n)}(x)=\dfrac{U_n+V_n\ln(x)}{x^{n+1}}$

ج) التعبير بدلالة n عن V_n:

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$\begin{cases}V_n=-nV_{n-1}\\ V_{n-1}=-(n-1)V_{n-2}\\ V_{n-2}=-(n-2)V_{n-3}\\ \vdots\\ V_2=-2V_1\end{cases}$$

ومنه: بضرب أطراف المساويات السابقة طرفا لطرف وبعد التبسيط نجد:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $V_n=(-1)^n n!$

د) إثبات بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n=(-1)^{n+1}n!\left(1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}\right)$

نرمز بـ $P(n)$ للخاصية : $U_n=(-1)^{n+1}n!\left(1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}\right)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

المرحلة الأولى: نتحقق من صحة $P(1)$.

لدينا : $(-1)^{1+1}1!\times1=1=U_1$ ومنه $P(1)$ محققة.

المرحلة الثانية : نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي 1.

أي : $U_n=(-1)^{n+1}n!\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$.

ونبرهن صحة $P(n+1)$ ، أي نبرهن أن : $U_{n+1}=(-1)^n(n+1)!\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$.

لدينا : $U_{n+1}=V_n-(n+1)U_n$

ومنه :

$$U_{n+1}=(-1)^n n!-(n+1)(-1)^{n+1}n!\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

$$U_{n+1}=(-1)^n n!+(-1)^n(n+1)!\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$$

$$U_{n+1}=(-1)^n(n+1)!\left[\frac{1}{n+1}+\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$U_{n+1}=(-1)^n(n+1)!\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

إذن : $P(n+1)$ صحيحة .

الاستنتاج : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n=(-1)^{n+1}n!\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$

ه) استنتاج عبارة $f^{(n)}(x)$ بدلالة n:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}n!\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)+(-1)^n n!\ln(x)}{x^{n+1}}$

و) باستخدام المكاملة بالتجزئة أحسب التكامل : $\int_1^e xf^{(3)}(x)dx$

نضع : $U(x)=x$ و $v'(x)=f^{(3)}(x)$

ومنه : $U'(x)=1$ و $v(x)=f^{(2)}(x)$

وبالتالي:

$$\int_1^e xf^{(3)}(x)dx=\left[xf^{(2)}(x)\right]_1^e-\int_1^e f^{(2)}(x)dx$$

$$\int_1^e xf^{(3)}(x)dx=\left[xf^{(2)}(x)\right]_1^e-\left[f'(x)\right]_1^e$$

$$\int_1^e xf^{(3)}(x)d=4-e^{-2}$$