الموضوع الثاني

التمرين الأول:(05 نقط)

ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1.حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $\left(\overline{z}+\sqrt{3}+i\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$.

2.نعتبر النقط A ، B ،و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}-i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$ ، $z_C=\overline{z_B}-2z_A$

أ) اكتب كل من z_A و z_B على شكل أسي.

ب) احسب الأطوال OA ، OB و AB . استنتج طبيعة المثلث OAB.

3.عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

4.أ)جد لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(O;-1),(D;1),(B;1)\}$ ، ثم بين أن: $\frac{z_G}{2\sqrt{3}}=\left(\frac{z_G}{2\sqrt{3}}\right)^{1945}$.

ب) علم النقط A ، B ، C ، D و G ثم بين أن النقط C ، D و G في استقامية.

ج) عين طبيعة كل من الرباعي $OBGD$ و المثلث AGC .

التمرين الثاني : :(04 نقط)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$ و $u_0=\frac{1}{8}$

1) أ- أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة 8cm)، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحني (C) الممثل للدالة f المعرفة على $[0;2]$ بـ : $f(x)=x(2-x)$

2)أ-باستعمال الرسم السابق،مثل على حامل محور الفواصل،دون حساب كلا من u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3

ب - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

3) أ- برهن بالتراجع أنه لكل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة استنتج أن (u_n) متقاربة ، ما هي نهايتها ؟

4) 3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(1-u_n)$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب-استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

5) أ) احسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n=(1-u_0)(1-u_1).....(1-u_n)$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$

التمرين الثالث: :(04نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

تعطى النقط $A(1,1,-2)$ ، $B(1,2,-2)$ ، $C(0,1,1)$.

1)بيّن أنّ النقط A،B،C تعرّف مستويا P.

2) تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}=3\vec{i}+\vec{j}$ ناظمي للمستوي P ، ثم استنتج معادلة ديكارتيّة لـِ P.

3) ليكن المستوي Q المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم (AC).

ا) أعط معادلة ديكارتيّة للمستوي Q. ب) برهن أنّ P و Q متعامدان وفق المستقيم (AB).

4) S_m مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث: $x^2+y^2+z^2-2x-2my+4z+4=0$ ؛ (m وسيط حقيقي)

ا) برهن أنه مهما كان m، فإنّ S_m هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_m ونصف قطرها R_m.

ب) بيّن أنه عندما يتغيّر m في $\mathbb{R}$ فإنّ مجموعة النقط I_m هي المستقيم (AB).

التمرين الرابع : :(07 نقطة)

I- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$

و (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $1-\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{1+e^{-x}}$. ثم بين أن f دالة فردية .

1. احسب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3. أ) بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ثم استنتج جدول تغيرات f على $\mathbb{R}^+$

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x، $1-\frac{2}{e^x+1}\le\frac{1}{2}x$.

4. احسب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

5. ارسم المستقيم (Δ) الذي معادلة له $y=-\frac{1}{2}x+1$ والمنحنى (C_f).

6. أ) بين أن الدالة $x\mapsto\ln(e^{-x}+1)$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto-\frac{1}{e^x+1}$ على $\mathbb{R}$.

ب) احسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلتها على الترتيب:

$y=0$ ، $x=-1$ و $x=0$.

II- (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1}$.

1. إذا علمت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$ بين أن $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$.

2. استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

3. بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم احسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.