مسألة شاملة في المتتاليات العددية

الجزء الأول : لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\alpha \\ u_{n+1}=\dfrac{8u_n-6}{u_n+1} \end{cases}$$

1. برهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n \neq 1$.
2. حلى في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية : $x^2-7x+6=0$
3. عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

الجزء الثاني : نفرض في كل ما يلي : $u_0=8$.

1. برهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n \geq 6$.
2. أثبت أن : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n-1)(u_n-6)}{u_n+1}$ ،
 - استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).
3. أثبت أن (u_n) متقاربة نحو العدد ℓ وَ يحقق : $\ell^2-7\ell+6=0$
4. عين النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

الجزء الثالث : نعتبر f دالةمعرفة $[1;8]$ بـ: $f(x)=\dfrac{8x-6}{x+1}$

1. أدرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ (C_f) تمثيلها البياني .
2. بين أنه إذا كان $x\in[4;8]$ ، فإن $f(x)\in[4;8]$.
3. برهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $6\leq u_n\leq 8$.
4. مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 وَ u_2.
5. أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .
6. برهن بالتراجع على كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n=1-\dfrac{5}{\left(\dfrac{2}{7}\right)^{n+1}-1}$
 ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

الجزء الرابع : (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} v_0=4 \\ v_{n+1}=f(v_n) \end{cases}$

1. برهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $4\leq v_n\leq 6$.
2. أثبت أن (v_n) متتالية متزايدة ، ماذا تستنتج ؟
3. مثل على محور الفواصل الحدود v_0 ، v_1 وَ v_2 .
4. ما هو تخمينك حول اتجاه تغير المتتالية (v_n) وَ تقاربها .

الجزء الخامس : نضع : $w_n=f(u_n)-f(v_n)$

1. أثبت من أجل $n\in\mathbb{N}$: $w_n=\dfrac{14(u_n-v_n)}{(u_n+1)(v_n+1)}$.
2. برهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n\geq 0$.
3. بين أن : $u_{n+1}-v_{n+1}\leq\dfrac{14}{25}(u_n-v_n)$.
4. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n-v_n\leq\left(\dfrac{14}{25}\right)^n$
 - استنتج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

الجزء السادس : (L_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $L_n=\dfrac{u_n-6}{u_n-1}$.

1. برهن أن (L_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .
2. أوجد عبارة الحد العام L_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .
3. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$ ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟
4. أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=L_0+L_1+L_2+...+L_n$.
 - استنتج بدلالة n المجموعين: $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$
 وَ $S''_n=\dfrac{1}{u_0-1}+\dfrac{1}{u_1-1}+...+\dfrac{1}{u_n-1}$
5. أحسب الجداء: $P_n=L_0^{2018}\times L_1^{2018}\times...\times L_n^{2018}$.

الجزء السابع :

1. برهن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-6=\dfrac{2(u_n-6)}{u_n+1}$.
2. عين عدداً حقيقياً k من المجال $]0;1[$ بحيث :
 $|u_{n+1}-6|\leq k|u_n-6|$.
3. بين من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $|u_n-6|\leq 2\left(\dfrac{2}{7}\right)^n$
4. استنتج أن المتتالية (L_n) متقاربة ، يطلب تعيين نهايتها .