

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين 01:

نعتبر متالية الأعداد الحقيقية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ:

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{و } u_0 = -1$$

1) احسب u_2 و استنتج أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية.

2) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n ، المتالية (v_n) بـ:
أ) احسب v_0 . ب) عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n .

ج) استنتاج أن المتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$. د) عبر عن v_n بدلالة n .

3) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n ، المتالية (w_n) بـ:
 $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

أ) احسب w_0 . ب) باستعمال المساواة $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ ، عبر عن w_{n+1} بدلالة u_n و v_n .

ج) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_{n+1} = w_n + 2$. ثم عبر عن w_n عن بدلالة n .

4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5) من أجل كل عدد طبيعي n نضع ،
 $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$

برهن بالترابع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،
 $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

التمرين 02:

I - نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $I = [0; +\infty[$ بـ:

1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال I .

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ:
 $f(x) = x \ln x - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

إعداد الأستاذ بالعبيدي محمد العربي

1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

2) أ) بين أن : $f'(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right) \ln x$ حيث f' مشتق الدالة f على المجال $[0; +\infty]$.

ب) عين إشارة $(f'(x))'$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج) استنتج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعين إحداثياتها.

3) أ) حل في \mathbb{R} المعادلة $(\ln x - 1)(2x - 1 - \ln x) = 0$.

ب) عين معدلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة التي ترتيبها $-\frac{1}{2}$.

4) بين أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $3.3 < \alpha < 3.4$.

5) أ) احسب القيمة المضبوطة لـ $f(e^2)$ ثم قيمة مقربة لها.

ب) ارسم (Δ) و (C_f) .

6) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[0; -\infty)$ بـ $h(x) = x \ln|x| - x + \frac{1}{2}(\ln|x|)^2$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) من أجل كل x من المجال $[0; -\infty)$ ، احسب $f(-x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنين (C_f) و (C_h) ؟

ب) ارسم (C_h) .

التمرين 03:

صندوق يحتوي على 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء وكل الكرات متماثلة وغير متمايزة عند اللمس. نسحب عشوائياً كرة واحدة من الصندوق ونسجل لونها، ثم نعيدها إلى الصندوق ونسحب منه كرة أخرى ونسجل لونها وننهي التجربة.

1) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

أ) "A" الحصول على كرتين بيضاوين".

ب) "B" الحصول على كرتين من نفس اللون".

2) نعرف لعبة حظ كما يلي: تمنح لكل كرة بيضاء العلامة α ($\alpha \in \mathbb{R}$) ولكل كرة سوداء العلامة $(-\alpha)$.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرافق بكل سحب لكرتين جموع النقط المحصل عليها.

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وأحسب أمثلة الرياضياتي $E(X)$.

ب) عين قيمة العدد الحقيقي حتى تكون اللعبة مربحة.

3) نضيف $(n-3)$ كرة سوداء إلى الصندوق ونعيد عملية السحب المعرفة أعلاه.

ما هو عدد الكرات السوداء التي تم إضافتها إلى الصندوق علم أن احتمال الحادثة A يساوي $\frac{1}{4}$.

الموضوع الثاني

التمرين 01:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0,2]$ بـ :

1. ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,2]$

استنتج أنه إذا كان $x \in [1,2]$ فإن $f(x) \in [1,2]$

2. نعرف المتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي :

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ- أنقل الشكل المقابل على ورقة الاجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 مبرزا خطوط الرسم

ب- ما هو تخمينك حول اتجاه تغير و تقارب المتالية (u_n)

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 < u_n \leq 2$

ب- بين أن المتالية (u_n) متناقصة تماما

ج- استنتاج أن المتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها

4. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$

ب- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ و أوجد مرة أخرى

ج- نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معروف $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n : n$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : S_n \leq n + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$

التمرين 02:

دالة معرفة على الجموعة $I =]-1; 1[\cup [1; +\infty)$ بـ :

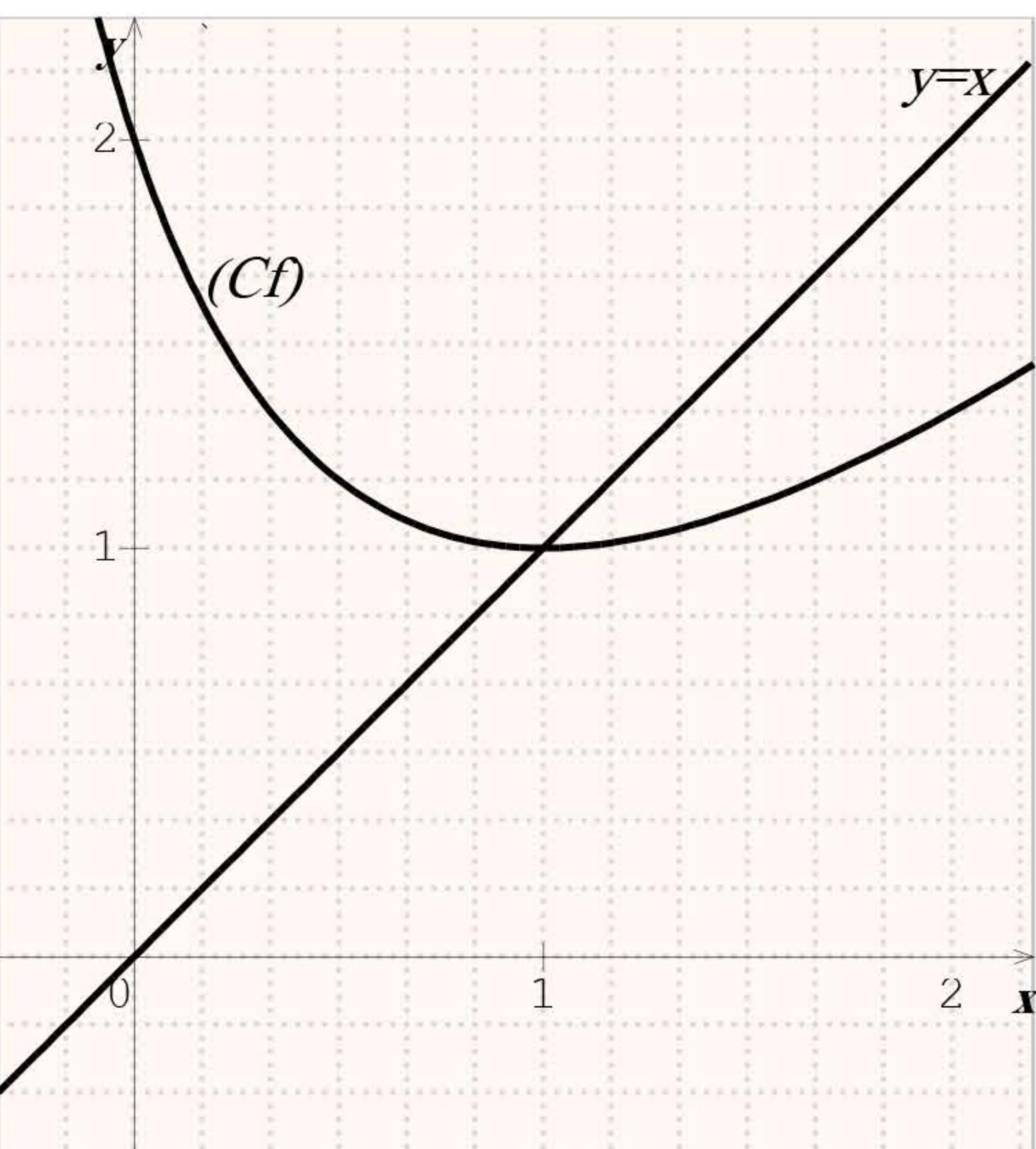
و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}; \vec{j})$.

1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$. ثم احسب $L(C_f)$.

2- أ- بين أن $f'(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$. ثم استنتاج إشارة $f'(x)$ على I ثم شكل جدول تغيرات f .

ب- عين معادلة المماس $L(C_f)$ في نقطته ذات الفاصلة 2

3- دالة معرفة على $[1; +\infty)$ بـ :



أ) بين أنه من أجل كل x من $[1; +\infty)$. ثم استنتج إشارة (x) على المجال $[1; +\infty)$.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. ماذا تستنتج ؟

ج) نسمى (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$. حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (C) على $[1; +\infty)$.

د) ارسم (C) و (Δ) ثم المنحني (C_f) .

4) حل بياً حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماماً المعادلة التالية: $(x-1)\ln\left(\frac{x+1}{m}\right) = -1$

التمرين 03:

صندوق A يحتوي على 4 كريات حمراء و 6 كريات سوداء و صندوق B يحتوي على كرية واحدة حمراء و 9 كريات سوداء مع أن كل الكريات متساوية الاحتمال .

(I) يرمي لاعب زهرة نرد غير مزيفة و مرقطة من 1 إلى 6 مرّة واحدة في الهواء .

– إذا تحصل على الرقم 1 يسحب كرة واحدة من الصندوق A .

– إذا لم يتحصل على الرقم 1 فيسحب كرة واحدة من الصندوق B .

1) شكل شجرة الاحتمالات لهذه التجربة .

2) نسمى R الحادثة : "الحصول على كرية حمراء" بين أن $P(R) = 0,15$

3) تحصل اللاعب على كرية حمراء ، بين أن احتمال أن تكون من الصندوق B أكبر أو تساوي من احتمال أن تكون من الصندوق A

(II) اللاعب يكرر هذه اللعبة مرتان (اللعبة المنصوص عليها في الجزء في نفس الشروط المتماثلة و المستقلة عن بعضها يعني يعيد الصندوقين إلى تعدادها الأول بعد اللعبة الأولى)

ليكن x عدد طبيعي غير معروف ، بعد اللاعبين يتحصل اللاعب على نقطة عن كل كرية حمراء و يخسر نقطة عن كل كرية سوداء .

نرمز بـ G إلى قيمة الربح أو الخسارة بعد اللاعبين .

1) بين أن G يأخذ القيم $-4, -2, 2x$.

2) أوجد قانون الاحتمال وأحسب الأمل الرياضي $E(G)$ للمتغير العشوائي G بدالة x .

3) ما هي أصغر قيمة لـ x حتى تكون اللعبة مربحة .