المستوى الثالثة ثانوي شعبة رياضيات
فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات **2سا**

التمرين الأول :

f ،g ،h و k دوال معرفة على المجال $]1\,;\,+\infty[$ كما يلي:

$f(x) = \frac{x}{(x-4)^4} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ، $g(x) = \frac{x}{(x-1)^4}$ ، $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ و $k(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}$.

1) بين أنه من أجل كل $x > 1$ فإن: $g(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4}$.

2) استنتج عبارة $G(x)$ حيث G دالة أصلية للدالة g على المجال $]1\,;\,+\infty[$.

3) أحسب $k'(x)$ من أجل كل x من المجال $]1\,;\,+\infty[$.

4) عين دالة أصلية للدالة h على المجال $]1\,;\,+\infty[$.

5) أوجد دالة أصلية F للدالة f على المجال $]1\,;\,+\infty[$.

6) استنتج الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]1\,;\,+\infty[$ والتي تنعدم عند 2.

التمرين الثاني :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x\,dx$

1) أحسب u_0 ثم باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب u_1.

2) أ) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

ب) بين أنه من أجل كل n عدد طبيعي: $0 \le u_n \le e-1$.

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

د) بين أنه من أجل كل n عدد طبيعي : $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{e}{n+1}$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n).

3) باستعمال التكامل بالتجزئة، بين أنه من أجل كل n عدد طبيعي، $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$

ثم استنتج قيمة u_2.

4) نعتبر العدد A الحقيقي المعرف بـ : $A = \int_0^1 (2x^2 - 3x + 1)e^x dx$

أ) عين العددان الحقيقيان α و β حيث، من أجل كل عدد حقيقي x،

$$2x^2 - 3x + 1 = \alpha(x-1)^2 + \beta(x-1)$$

ب) استنتج القيمة المضبوطة للعدد A.

التصحيح النموذجي

التمرين الأول :

1) نبين أنه من أجل كل $x > 1$ فإن: $g(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4}$:

لدينا من أجل كل $x > 1$: $g(x) = \frac{x}{(x-1)^4} = \frac{x-1+1}{(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^4} + \frac{1}{(x-1)^3}$ وهو المطلوب.

2) استنتاج عبارة $G(x)$ حيث G دالة أصلية للدالة g على المجال $]1 ; +\infty[$:

الدالة g مستمرة على المجال $]1 ; +\infty[$ فهي تقبل دالة أصلية: $G(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c$

مع c ثابت حقيقي

3) حساب $k'(x)$: $k'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

4) تعيين دالة أصلية للدالة h على المجال $]1 ; +\infty[$

من السؤال السابق نلاحظ أنه من أجل كل $x > 1$ فإن: $k'(x) = h(x)$ ومنه الدالة k أصلية للدالة h أي :

$H(x) = k(x) + c'$ مع c' ثابت حقيقي

5) تعيين دالة أصلية F للدالة f على المجال $]1 ; +\infty[$: نلاحظ أن الدالة f تكتب من الشكل :

$f(x) = g(x) + h(x)$ وعليه $F(x) = G(x) + k(x) + c"$ مع $c"$ ثابت حقيقي ومنه :

$$F(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c"$$

6) $F(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \frac{5}{6} - \ln(2+\sqrt{3})$

التمرين الثاني :

1) $u_0 = e - 1$ و $u_1 = e - 2$

2) أ) $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 -x(1-x)^n e^x \, dx$ ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$

(u_n) متناقصة.

ب) من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq e - 1$

ج) (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

د) من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$ ، $\lim(u_n) = 0$

3) بالمكاملة بالتجزئة نجد : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ و $u_2 = 2e - 5$

4) $\alpha = 2$ ، $\beta = 1$ ومنه $2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)^2 + x - 1 = 2(1-x)^2 - (1-x)$

ب) القيمة المضبوطة للعدد A هي : $A = 2u_2 - u_1 = 3e - 8$.