الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية المسيلة

ثانوية: الشهيد حميدي عيسى - أولاد دراج - — المستوى: سنة ثالثة هندسة طرائق

2023 - 2024 — **الفرض الأول للثلاثي الثاني في الرياضيات** — المدة: 01 سا

تجنّب الشطب و استعمال المصحّح.

التمرين الأول: (10 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_0 = 3$، ومن أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$.

① احسب الحدين u_1 و u_2. هل المتتالية (u_n) رتيبة؟ برر إجابتك.

② أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $n \leq u_n \leq n+3$.

ب- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. ماذا تستنتج ؟

③ لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - n$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0.

ب- عبر عن v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n.

جـ- عين أكبر عدد طبيعي n بحيث: $u_n \geq \frac{3}{256} + n$.

④ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموعين S_n و S'_n حيث:

$$S_n = \left(\frac{3}{u_0}\right)^2 + \left(\frac{3}{u_1 - 1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{u_n - n}\right)^2$$ و $$S'_n = \ln\left(\frac{u_0}{3}\right) + \ln\left(\frac{u_1 - 1}{3}\right) \cdots + \ln\left(\frac{u_n - n}{3}\right)$$.

التمرين الثاني: (10 نقاط)

ليكن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ و $g(x) = \frac{1}{e^x + 1}$. نضع: $I = \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$ و $J = \int_0^{\ln 2} g(x)\,dx$. وحدة الطول هي $1\,cm$.

① بين أنه من أجل كل x من المجال $[0;\ln 2]$ فإن: $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$. ثم عين حصرا للتكامل J.

② أثبت أن: $I - J = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1)\,dx$. ثم استنتج مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمين ذو المعادلتين: $x = 0$ و $x = \ln 2$.

③ تحقق أنه من أجل كل x من المجال $[0;\ln 2]$ فإن: $f(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}$. ثم احسب التكامل I.

④ استنتج قيمة التكامل J. ثم فسر النتيجة هندسيا.

************* الأستاذ: فراحتية المحفوظ *************

خليل مطران:

اعزم وكد فإن مضيت فلا تقف — واصبر وثابر فالنجاح محقق

2023 - 2024

الإجابة النموذجية للفرض الأول للثلاثي الثاني في الرياضيات

المدة: 01 سا

التمرين الأول: (10 نقاط)

(u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}n+1$.	
1) أ) $u_1=\frac{5}{2}$ ، $u_2=\frac{11}{4}$	(1)
ب) لدينا $u_0>u_1$ و $u_1<u_2$ وبالتالي (u_n) ليست رتيبة.	(0.5)
2) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $n\le u_n\le n+3$.	(2)
ب) لدينا $u_n\ge n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ والمتتالية (u_n) متباعدة.	(1)
3) أ) من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=3$	(1.5)
ب) $v_n=v_0\times q^n=3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $u_n=v_n+n=3\left(\frac{1}{2}\right)^n+n$	(1)
جـ) تعيين أكبر عدد طبيعي n بحيث: $u_n\ge\frac{3}{256}+n$. $u_n\ge\frac{3}{256}+n$ يكافئ $\left(\frac{1}{2}\right)^n\ge\frac{1}{256}$ أي: $\left(\frac{1}{2}\right)^n\ge\left(\frac{1}{2}\right)^8$ وبالتالي $n\le 8$ وأكبر عدد طبيعي n هو 8	(1)
4) $S_n=\left(\frac{3}{u_0}\right)^2+\left(\frac{3}{u_1-1}\right)^2+\left(\frac{3}{u_2-2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{u_n-n}\right)^2$ ، $S_n=\left(\frac{3}{v_0}\right)^2+\left(\frac{3}{v_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{v_n}\right)^2$ و $\left(\frac{3}{v_n}\right)^2=\left(\frac{3}{3\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)^2=(2^n)^2=4^n$	(1)
وبالتالي: $S_n=4^0+4^1+\cdots+4^n=\frac{4^{n+1}-1}{3}$ ، $S'_n=\ln\left(\frac{u_0}{3}\right)+\ln\left(\frac{u_1-1}{3}\right)+\ln\left(\frac{u_2-2}{3}\right)+\cdots\ln\left(\frac{u_n-n}{3}\right)$ ، لدينا $\frac{u_n-n}{3}=\frac{v_n}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، $S'_n=\ln\left(\frac{1}{2}\right)^0+\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $=\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]\times(0+1+2+3+\cdots+n)$ $=\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{-n(n+1)\ln 2}{2}$	(1)

التمرين الثاني: (10 نقاط)

1) تبيان أن: $\frac{1}{3} \le g(x) \le \frac{1}{2}$ لدينا: $g'(x) = \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}$ ومنه: الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0;\ln 2]$ ولدينا $0 \le x \le \ln 2$ ومنه: $g(\ln 2) \le g(x) \le g(0)$ إذا: $\frac{1}{3} \le g(x) \le \frac{1}{2}$. ➢ **حصر J :** لدينا: $\frac{1}{3} \le g(x) \le \frac{1}{2}$ ومنه: $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{3} dx \le \int_0^{\ln 2} g(x) dx \le \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2} dx$ أي: $\left[\frac{1}{3}x\right]_0^{\ln 2} \le J \le \left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\ln 2}$ إذا: $\frac{\ln 2}{3} \le J \le \frac{\ln 2}{2}$	(2) (1)
2) إثبات أن: $I - J = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx$ لدينا: $I - J = \int_0^{\ln 2} f(x) dx - \int_0^{\ln 2} g(x) dx$ ومنه: $I - J = \int_0^{\ln 2} [f(x) - g(x)] dx$ ومنه: $I - J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} dx$ ومنه: $I - J = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1} dx$ وعليه: $I - J = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx$ ➢ **مساحة الحيز :** لدينا: $S = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx$ ومنه: $S = [e^x - x]_0^{\ln 2}$ وعليه : $S = 1 - \ln 2 u.a$	(2) (1)
3) التحقق أن: $f(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x+1}$ $e^x - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x(e^x+1) - e^x}{e^x+1} = \frac{e^{2x} + e^x - e^x}{e^x+1} = \frac{e^{2x}}{e^x+1} = f(x)$ ➢ **حساب التكامل I:** لدينا: $I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx$ ومنه: $I = \int_0^{\ln 2} \left(e^x - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx$ أي: $I = [e^x - \ln(e^x+1)]_0^{\ln 2}$ إذن : $I = 1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$.	(1) (1)
4) استنتاج قيمة التكامل J: لدينا: $I - J = 1 - \ln 2$ ومنه: $J = I - 1 + \ln 2$ أي: $J = 1 + \ln 2 - \ln 3 - 1 + \ln 2$ إذا: $J = 2\ln 2 - \ln 3 ua$.	(1)
➢ **التفسير الهندسي:** J هي مساحة الحيز من المستوي المحصور بين (C_g) و محور الفواصل و المستقيمين ذي المعادلتين: $x = 0$ و $x = \ln 2$.	(1)

************* الأستاذ: فراحتية المحفوظ *************