المستوى:الثالثة رياضيات	**فيفري 2023**
فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات	**المدة : ساعتين.**

التمرين1

الشكل في الورقة المرفقة هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x)=\frac{3x}{2x+1}$

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\frac{1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ)مثل على محور الفواصل الحدود $u_0;u_1;u_2;u_3$ للمتتالية (u_n) دون حسابها .مبرزا خطوط التمثيل .

ب)ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ)اثبت من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<1$

ب)أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n=\frac{1-u_n}{2u_n}$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0

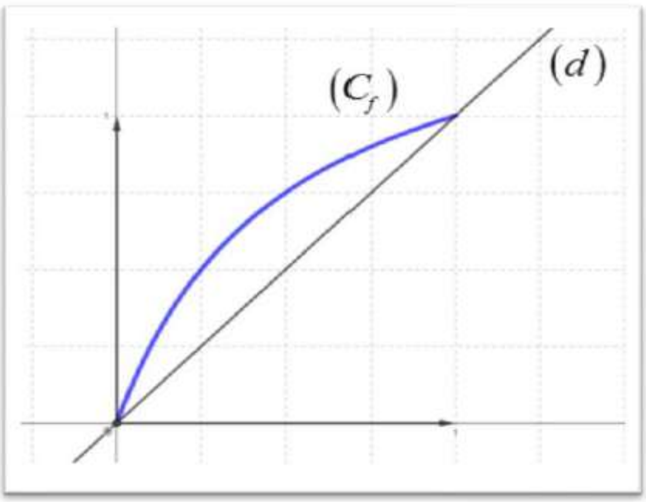
ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n.ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4)احسب بدلالة n المجموع S_n والجداء P_n حيث: $S_n=v_0+2v_1+2^2v_2+..+2^nv_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times...\times v_n$.

الملحق: يرجع مع ورقة الاجابة

الإسم واللقب: ....

القسم:.........................



✂ ---

التمرين 2

(v_n) متتالية هندسية موجبة تماما ومعرفة على $\mathbb{N}$ بحيث : $\begin{cases} v_1 - v_3 = \dfrac{7}{16} \\ v_1 \times v_2 \times v_3 = \dfrac{27}{64} \end{cases}$

1) أ- اثبت ان $v_2 = \dfrac{3}{4}$ والاساس $q = \dfrac{3}{4}$

ب- اكتب v_n بدلالة n

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = -\dfrac{2}{3}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n - \dfrac{1}{2}$

أ- احسب الحدود u_1، u_2 و u_3

ب- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n > -2$

ج- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة

3) المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = u_n - v_n$

أ- اثبت بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $w_n = -2$

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم احسب نهايتها

4) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \dfrac{u_1}{v_1} + \dfrac{u_2}{v_2} + \dots + \dfrac{u_n}{v_n}$

التمرين 3

a, n و b أعداد صحيحة نسبية حيث: $a = 2n + 9$ و $b = 5n + 14$.

1) بين أن كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 17.

2) عين القيم الممكنة لـ $pgcd(a;b)$.

3)عين حسب قيم n , $pgcd(a;b)$.

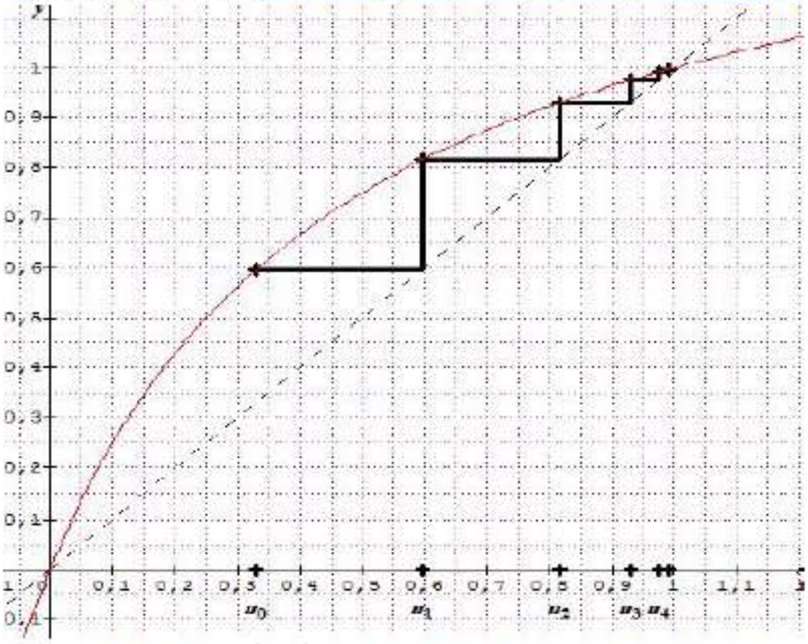
4) أوجد حلا خاصا لـ (E) بحيث : (E) : $1190x + 561y = 17$

بالتوفيق

التصحيح النموذجي

العلامة	الحل	رقم التمرين

1) أ) تمثيلعلى محور الفواصل الحدود $u_0;u_1;u_2;u_3$:



ب) وضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها:

المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة

2) أ) اثبات من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$

نبرهن بالبرهان بالتراجع

] من أجل $n=0$: $0<u_0<1$ محققة لان: $u_0=\frac{1}{3}$

] نفرض أنمن أجل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$ صحيحة

ونبرهن ان : $0<u_{n+1}<1$

لدينا: $0<u_n<1$ و $f(1)=1$; $f(0)=0$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

بما أن f متزايدة تماما على $[0;1]$ فإن $f(0)<f(u_n)<f(1)$

ومنه : $0<u_{n+1}<1$.

من] و] نستنتج حسب البرهان بالتراجعانه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج أنها متقاربة

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{-2u_n^2+2u_n}{2u_n+1}=\frac{-2u_n(u_n-1)}{2u_n+1}$

بما أن: $0<u_n<1$ فإن $0<$ و $u_n-1<0$ ، ومنه: $u_{n+1}-u_n>0$

نستنتج أن (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو عدد حقيقي ℓ

لأنها:محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما.

****حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$:**

$\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3u_n}{2u_n+1}$ يكافئ $\ell=\frac{3\ell}{2\ell+1}$ يكافئ $\frac{-2\ell(\ell-1)}{2\ell+1}=0$

التمرين1

ومنه $\ell = 0$ (مرفوض)أو $\ell = 1$ (مقبول محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما)، ومنه $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

3) أ)نبين أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{1-u_{n+1}}{2u_{n+1}} = \frac{1-\frac{3u_n}{2u_n+1}}{2\left(\frac{3u_n}{2u_n+1}\right)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1-u_n}{2u_n}\right) = \frac{1}{3}v_n$$ ومنه

(v_n) م.هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1-u_0}{2u_0} = 1$

ب)كتابة v_n بدلالة n واستنتاج u_n بدلالة n: $v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا $u_n = \frac{1}{2v_n+1}$ ومنه $u_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}$ ، $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

جـ حساب بدلالة n المجموع S_n و الجداء P_n:

$$S_n = v_0 + 2v_1 + 2^2 v_2 + \ldots + 2^n v_n$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

هومجموع $n+1$ حدا لمتتالية هندسية حدها الأول $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

وأساسها $\frac{2}{3}$ ومنه: $S_n = 1\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right] = 3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$$
$$= v_0 \times (v_0 q) \times (v_0 q^2) \times \ldots \times (v_0 q^n)$$
$$= (v_0)^{n+1} \times q^{0+1+2+\ldots+n} = (1)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

	1) إثبات أن $V_n = \frac{3}{4}$ و $q=\frac{3}{4}$: V_3 و V_2و V_1 حدود متتابعة لمتتالية هندسية معناه : $V_3 . V_1 = {V_2}^2$ ومنه $V_2 = \frac{3}{4}$ و $q=\frac{3}{4}$ ب) كتابة V_n بدلالة n : $V_n = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 2) حساب الحدود : $U_3 = -\frac{23}{16}$; $U_2 = -\frac{5}{4}$; $U_1 = -1;$ ب- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n > -2$ ج) اتجاه تغير المتتالية (U_n): $U_{n+1} - U_n = -\frac{U_n+2}{4} < 0$ ومنه المتتالية (U_n) متناقصة تماما لدينا المتتالية (U_n) متناقصة تماما و $U_n > -2$ ومنه المتتالية (U_n) متقاربة. 3) أ- اثبت بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $w_n = -2$ ب) استنتاج U_n بدلالة n : $U_n = -2 + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ومنه : $\lim_{n \to +\infty} U_n = -2$ 4) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$ $S_n = n - 6[\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1]$	**التمرين2**
	1) تبيتن أن كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 17: نضع $pgcd(a;b) = d$ ومنه d/a و d/b ومنه d/5a-2b أي d/17 2)) تعيين القيم الممكنة لـ $pgcd(a;b)$: d/17 معناه $d \in D_{17}$ أي $d \in \{1; 17\}$ 3)تعيين حسب قيم n , $pgcd(a;b)$: إذا كان $pgcd(a;b) = 17$ فإن : $n=17k+21$; $k \in \mathbb{Z}$ إذا كان $pgcd(a;b) = 1$ فإن : $n \neq 17k+21$; $k \in \mathbb{Z}$ 4) إيجاد حلا خاصا لـ (E) بحيث : $(E) : 1190x + 561y = 17$ باستعمال خوارزمية إقليدس نجد :	**التمرين3**