2023-2022

الفرض الأول للثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

المدة: 01 سا

تجنّب الشطب و استعمال المصحّح.

التمرين الأول: (14 نقطة)

I) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

① عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

II) نضع في كل ما يلي: $\alpha = 0$.

① عين العددين الحقيقين a و b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = a + \dfrac{b}{u_n + 3}$.

② برهن بالتراجع أنه من من أجل كل عدد طبيعي n، $-1 \leq u_n \leq 0$.

③ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). ثم برر تقاربها.

④ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

أ- برهن أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\dfrac{1}{2}$، يطلب تعيين حدها الأول v_0.

ب- اكتب v_n بدلالة n، ثم u_n بدلالة n. واحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. ماذا تستنتج ؟

جـ- احسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n = \ln\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right) + \cdots\cdots + \ln\left(\dfrac{v_n}{v_{n-1}}\right)$

$T_n = \dfrac{2023}{u_0 + 1} + \dfrac{2023}{u_1 + 1} + \cdots\cdots + \dfrac{2023}{u_n + 1}$.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\ln x$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول هي: $1\,cm$.

① احسب التكامل التالي: $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$.

② بين أن: $H : x \mapsto 2\ln(x) - x$ هي دالة أصلية لـ $h : x \mapsto \dfrac{2}{x} - 1$ على المجال $]0;+\infty[$.

③ باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن: $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x\,dx = (1 - \ln 2)^2$.

④ احسب S مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات $y = x$ ، $x = 1$ و $x = 2$.

************ الأستاذ: فراحتية المحفوظ ************

الأستاذ: فراحتية المحفوظ — تصحيح الفرض الأول للفصل الثاني في مادة الرياضيات — سنة ثالثة علوم تجريبية

• حل التمرين الأول

I - $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ ، $u_0 = \alpha$

① - تعيين قيمة α حتى تكون (u_n) ثابتة:

(u_n) ثابتة معناه $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$

بالتعويض في العلاقة التراجعية نجد:

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 3} = \alpha$$

تكافئ $\alpha(\alpha + 3) = \alpha - 1$

تكافئ $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ أي $(\alpha + 1)^2 = 0$

تكافئ $\alpha + 1 = 0$ تكافئ $\boxed{\alpha = -1}$

II - نضع $\alpha = 0$ أي $u_0 = 0$

① - تعيين العددين a و b حيث: $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 3}$

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{u_n - 1 + 3 - 3}{u_n + 3}$$

$$= \frac{u_n + 3}{u_n + 3} - \frac{4}{u_n + 3} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$$

إذا $\boxed{a = 1}$ و $\boxed{b = -4}$

② - البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq u_n \leq 0$

(أ) - من أجل $n = 0$ نجد $u_0 = 0$

ولدينا $-1 \leq 0 \leq 0$

إذا $-1 \leq u_0 \leq 0$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

(ب) - لنكن $n \in \mathbb{N}$، نفترض $-1 \leq u_n \leq 0$

ونبرهن أن $-1 \leq u_{n+1} \leq 0$

(ب) لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq u_n \leq 0$

تكافئ $2 \leq u_n + 3 \leq 3$

تكافئ $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n + 3} \leq \frac{1}{2}$

تكافئ $-2 \leq \frac{-4}{u_n + 3} \leq -\frac{4}{3}$

تكافئ $-1 \leq 1 - \frac{4}{u_n + 3} \leq -\frac{1}{3} \leq 0$

تكافئ $-1 \leq u_{n+1} \leq 0$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

من (أ) و (ب) وحسب الاستدلال بالتراجع

فإنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq u_n \leq 0$

③ - دراسة اتجاه تغير (u_n):

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} - u_n$$

$$= \frac{u_n - 1 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3}$$

$$= \frac{-u_n^2 - 2u_n - 1}{u_n + 3}$$

$$= \frac{-(u_n + 1)^2}{u_n + 3} \leq 0$$

لأن $-(u_n + 1)^2 \leq 0$ و $u_n + 3 > 0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

• التقارب:

المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

④ $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

أ. برهان أن (v_n) متتالية حسابية:

- لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$:

(1) $T_n = \frac{2023}{u_0+1} + \frac{2023}{u_1+1} + \dots + \frac{2023}{u_n+1}$

$= 2023\left(\frac{1}{u_0+1} + \frac{1}{u_1+1} + \dots + \frac{1}{u_n+1}\right)$

$= 2023\left(V_0 + V_1 + \dots + V_n\right)$

$= 2023\left(\frac{n+1}{2}(V_0 + V_n)\right)$

$= 2023 \times \frac{n+1}{2}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}n\right)$

$= 2023 \times \frac{n+1}{2}\left(\frac{4+n}{2}\right)$

$= \frac{2023}{4}(n+1)(4+n)$

06 حل التمرين الثاني

$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x$

(1) ① - حساب التكامل $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$:

$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\ln x\, dx$

$= \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2$

$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$

$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

② - تبيين أن $H : x \longrightarrow 2\ln(x) - x$

(1) دالة أصلية لـ $h : x \longrightarrow \frac{2}{x} - 1$

H دالة معرفة وقابلة للاشتقاق

على مجال $]0;+\infty[$ حيث

$H'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right) - 1$

$= \frac{2}{x} - 1 = h(x)$

ومنه الدالة H دالة أصلية للدالة h

على المجال $]0;+\infty[$

$V_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}+1} = \frac{1}{\frac{u_n-1}{u_n+3}+1}$

$= \frac{1}{\frac{u_n-1+u_n+3}{u_n+3}} = \frac{1}{\frac{2u_n+2}{u_n+3}}$

$= \frac{u_n+3}{2u_n+2} = \frac{u_n+3}{2(u_n+1)}$

$= \frac{u_n+1+2}{2(u_n+1)} = \frac{u_n+1}{2(u_n+1)} + \frac{2}{2(u_n+1)}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{2} + V_n$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{2}$ وحدها الأول V_0 حيث

(0,5) $V_0 = \frac{1}{u_0+1} = \frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$

ب- كتابة V_n بدلالة n:

(1) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $V_n = V_0 + nr$

$V_n = 1 + \frac{1}{2}n$

• كتابة u_n بدلالة n:

(1) لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؛ $V_n = \frac{1}{u_n+1}$

معناه $\frac{1}{V_n} = u_n + 1$ أي $u_n = \frac{1}{V_n} - 1$

إذن $u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}n} - 1 = \frac{2}{2+n} - 1$

$u_n = \frac{-n}{2+n}$

(1) • حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{n} = -1$

(0,5) • الاستنتاج: المتتالية (u_n) متقاربة نحو -1.

جـ - حساب بدلالة n المجموعتين S_n و T_n:

(1) $S_n = \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) + \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)$

$= \ln\left(\frac{V_1}{V_0} \times \frac{V_2}{V_1} \times \dots \times \frac{V_n}{V_{n-1}}\right)$

$= \ln\left(\frac{V_n}{V_0}\right)$

$= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}n}{1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{2}n\right)$

③ - باستعمال التكامل بالتجزئة نبين أن:

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right) \ln x \, dx = (1-\ln 2)^2$$

نضع $u(x)=\ln x$ و $v'(x)=\frac{2}{x}-1$

نجد $u'(x)=\frac{1}{x}$ و $v(x)=2\ln(x)-x$

ومنه

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x \, dx = \left[\ln(x)\times(2\ln(x)-x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2\ln x}{x}-1 \, dx$$

$$= \left[\ln(x)\times(2\ln(x)-x)\right]_1^2 - \left[2\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2-x\right]_1^2$$

$$= \ln 2(2\ln 2-2)-0-\left((\ln 2)^2-2-0+1\right)$$

$$= 2(\ln 2)^2-2\ln 2-(\ln 2)^2+1$$

$$= (\ln 2)^2-2\ln 2+1$$

$$= (\ln(2)-1)^2$$

$$= (1-\ln(2))^2$$

④ - حساب مساحة الحيز S المحدد

بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات

$y=x$ ، $x=1$ و $x=2$

- من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا

$$f(x)-y = x+\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x - x$$

$$= \left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = \left(\frac{x-2}{x}\right)\ln x$$

ولدينا من أجل $x\in[1,2]$ ؛ $\ln x>0$

و $\frac{x-2}{x}<0$

ومنه $f(x)-y<0$

إذن $S=\int_1^2 -\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x \, dx \, (1\times 1)\, cm^2$

$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x \, dx \; cm^2$$

$$S = (1-\ln 2)^2 \, cm^2$$