ثانوية: زريمش عيسى (حمام دباغ) — بتاريخ: 2017/10/17

المستوى: 3عتج + 3تر + 3ر — المدة: ساعة

فرض الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

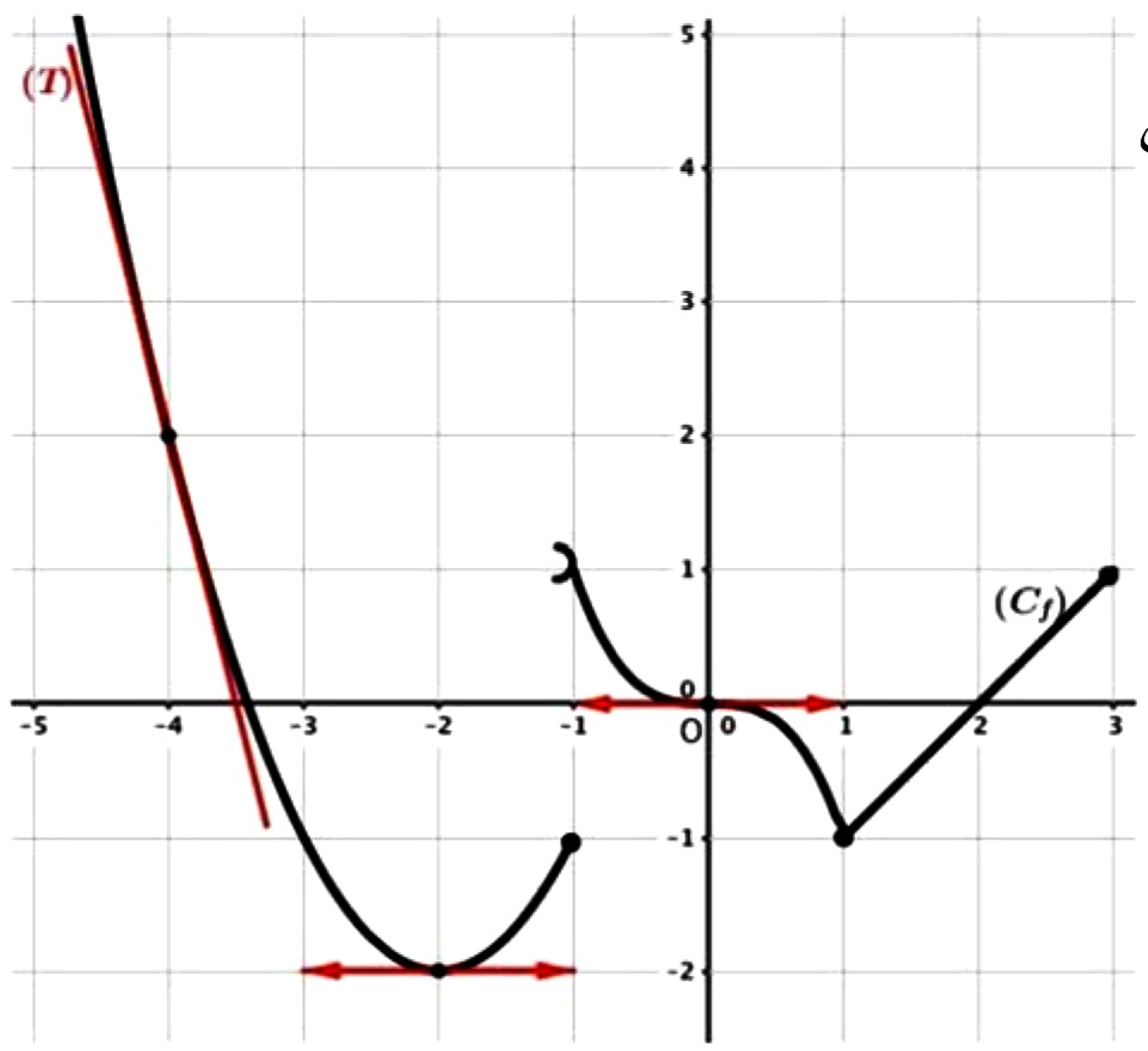
التمرين الأول:(06 نقاط)

اجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ ، **2** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=+\infty$ ، **3** القيمة التقريبية للعدد $(0.98)^2$ هي 0.96

4 حلول المعادلة التفاضلية $y'=\dfrac{1}{x^2}$ في $]0;+\infty[$ هي الدوال y حيث: $y=\dfrac{1}{x}+c$ مع c ثابت حقيقي.

التمرين الثاني:(06 نقاط)



f دالة عددية معرفة على المجال $]-\infty;3]$ بتمثيلها البياني (C_f) في الشكل المقابل ، (T) مماس لـ (C_f) في النقطة التي فاصلتها (-4)

1) بقراءة بيـــــانية:

أ*/ عين: $f(-2)$ ، $f'(-2)$ ، $f(-4)$ ، $f'(-4)$.

ب*/ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)$ ماذا تستنتج ؟

ج*/ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α في $[-4;-3]$

3) أكتب معادلة المماس (T) .

4) شكل جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $]-\infty;-2]$ بـ: $g(x)=f(x+1)$

التمرين الثالث: (08 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=(x-1)\sqrt{x^2-1} & ; x\in[1;+\infty[\\ f(x)=-x+\dfrac{3}{2}-\dfrac{x}{x^2+1} & ; x\in]-\infty;1[\end{cases}$$

1) أوجد الأعداد الحقيقية $a;b;c$ حيث: $x\in]-\infty;1[$ و $f(x)=\dfrac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{2(x^2+1)}$.

2) أ*/ بين أن الدالة f مستمرة عند 1.

ب*/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. ثم أحسب كل من: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{f(x)}{x-1}$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{f(x)}{x-1}$ ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا.

3) أ* لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f. بين أن:

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}} & ; x\in]1;+\infty[\\ f'(x)=-\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2} & ; x\in]-\infty;1[\end{cases}$$

، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

ب*/ بين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته.ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف في المجال $]-\infty;1[$ يطلب تعيين إحداثيتيهما. **5)** ارسم (Δ) و (C_f) .

ثانوية: زريمش عيسى **2018/2017**

تصحيح الفرض الأول للثلاثي الأول--3عتج +3 تر+ 3 ر

التمرين الأول: (06 نقاط)

سؤال1	سؤال2	سؤال3	سؤال4
صحيح	خاطئ	صحيح	خاطئ

التبرير: 1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$$

2) لدينا: $1+2+3+...+n=\frac{n}{2}(1+n)$ مجموع حدود متتالية حسابية حدها الأول 1 وأساسها 1 وحدها الأخير n

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

3) بوضع: $f(x)=x^2$ ، $(0.98)^2=f(1-0.02)$ لدينا

$h=-0.02; x_0=1$ ، $f(x_0+h)\approx hf'(x_0)+f(x_0)$

بما أن $f(1-0.02)\approx 0.02f'(1)+f(1)$ فإن $(0.98)^2\approx 0.96$

4) حلول المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{x^2}$ في $]0;+\infty[$ هي

الدوال y حيث: $y=-\frac{1}{x}+c$ مع c ثابت حقيقي.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

1) بقراءة بيانية: أ*/ تعيين:

$f'(-2)=0$ ، $f(-4)=2$ ، $f(-2)=-2$ ، $f'(-4)=-4$

ب*/ $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=1$ ، $\lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x)=-1$ ، بما أن

$\lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x)\neq \lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ فإن الدالة غير مستمرة عند -1

ج*/ $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$ ، $\lim_{x\to 0} f\left(\frac{\tan x}{x}\right)=-1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-0}{x-0}=f''(0)=0$$

2) نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α في $[-4;-3]$

لدينا: الدالة f معرفة ومستمرة ورتيبة تماما على $[-4;-3]$ و

$f(-4)f(-3)\prec 0$ لأن $f(-1)=-1$ ، $f(-4)=2$ ح. م. القيم

المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α في $[-4;-3]$

3) كتابة معادلة المماس (T):

$(T): y=f'(-4)(x+4)+f(-4)$ ومنه $(T): y=-4x-14$

4) تشكيل جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $]-\infty;-2]$:

بـ: $g(x)=f(x+1)$ ، $g'(x)=f'(x+1)$

x	$-\infty$		-3		-2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

التمرين الثالث: (08 نقاط)

1) إيجاد الاعداد الحقيقية $a;b;c$ حيث $x\in]-\infty;1[$ و

لدينا: $f(x)=\frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{2(x^2+1)}$

$$f(x)=-x+\frac{3}{2}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{-2x^3+3x^2-4x+3}{2(x^2+1)}$$

باستعمال طريقة هورنر نجد: ومنه $c=-3; b=1; a=-2$

	-2	3	-4	3
1		-2	1	-3
	-2	1	-3	0

$$f(x)=\frac{(x-1)(-2x^2+x-3)}{2(x^2+1)}$$

2) أ*/ نبين أن الدالة f مستمرة عند 1:

لدينا: $f(1)=0$ ، $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 1}(x-1)\sqrt{x^2-1}=0$ و

$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{<} 1}\left(-x+\frac{3}{2}-\frac{x}{x^2+1}\right)=0$ بما أن

$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)=f(1)$ فإن f مستمرة عند 1.

ب*/ حساب مايلي: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)\sqrt{x^2-1}=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{3}{2}-\frac{x}{x^2+1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x \xrightarrow{>} 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \xrightarrow{>} 1}\frac{(x-1)\sqrt{x^2-1}}{x-1}=0$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x \xrightarrow{<} 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \xrightarrow{<} 1}\frac{(x-1)(-2x^2+x-3)}{(x-1)2(x^2+1)}=-1$$

بما ان $\lim_{x \xrightarrow{<} 1}\frac{f(x)}{x-1}\neq\lim_{x \xrightarrow{>} 1}\frac{f(x)}{x-1}$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1.

التفسير البياني: $A(1;0)$ هي نقطة زاوية للمنحنى (C_f)

3) أ/*نبين أن:

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}} \; ; x\in]1;+\infty[\\ f'(x)=-\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2} \; ; x\in]-\infty;1[\end{cases}$$

*الدالة f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة f':

$$f'(x)=\sqrt{x^2-1}+\frac{2x(x-1)}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

*الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;1[$ ودالتها المشتقة f':

$$f'(x)=-1-\left[\frac{(x^2+1)-2x\,x}{(x^2+1)^2}\right]=-\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

ومنه:

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}} \; ; x\in]1;+\infty[\\ f'(x)=-\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2} \; ; x\in]-\infty;1[\end{cases}$$

**** تشكيل جدول تغيرات الدالة f :**

****إشارة $f'(x)$ في المجال $]1;+\infty[$:**

إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارة البسط لان المقام موجب

$f'(x)=0$ يكافئ $\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x^2-1}}=0$ يكافئ $2x^2-x-1=0$

حساب Δ: $\Delta=9$ ، $x_1=1$ أو $x_2=\frac{-1}{2}$ مرفوضين

$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

بما أن $f'(x)\succ 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$

***إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;1[$:** لدينا: $-\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}\prec 0$

بما أن $f'(x)\prec 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	-1 ‖ 0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

ب*/ نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) **بجوار** $-\infty$ **يطلب تعيين معادلته:** من أجل كل $x\in]-\infty;1[$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(-x+\frac{3}{2}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)=0$$ **ومنه**

$(\Delta): y=-x+\frac{3}{2}$ م.مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

****دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ** (Δ):

ندرس إشارة الفرق: $\left[f(x)-\left(-x+\frac{3}{2}\right)\right]=-\frac{x}{x^2+1}$

x	$-\infty$	0	1
$-x$	$+$	0	$-$
x^2+1	$+$		$+$
$\frac{-x}{x^2+1}$	$+$	0	$-$
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	$(C_f)\cap(\Delta)=\left\{A'\left(0;\frac{3}{2}\right)\right\}$	(C_f) تحت (Δ)

4) نبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف في المجال $]-\infty;1[$ يطلب تعيين إحداثيتيهما:

لدينا: $f'(x)=-\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}$; $x\in]-\infty;1[$

الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على المجال $]-\infty;1[$:

$$f''(x)=\frac{-2x^3+6x}{(x^2+1)^3}=-\frac{2x(x^2-3)}{x^6+3x^4+3x^2+1}$$

إشارة $f''(x)$ على $]-\infty;1[$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		1
$-2x$	$+$		$+$	0	$-$	
x^2-3	$+$	0	$-$		$-$	
$(x^2+1)^3$	$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$f''(x)$ انعدمت مغيرة إشارتها عند $-\sqrt{3}$ و 0 ومنه: المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف في المجال $]-\infty;1[$ هما $A'\left(0;\frac{3}{2}\right)$ و $B\left(-\sqrt{3};\frac{5}{4}\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)$ ، $\frac{5}{4}\sqrt{3}+\frac{3}{2}=3.67$

5) رسم (Δ) و (C_f).