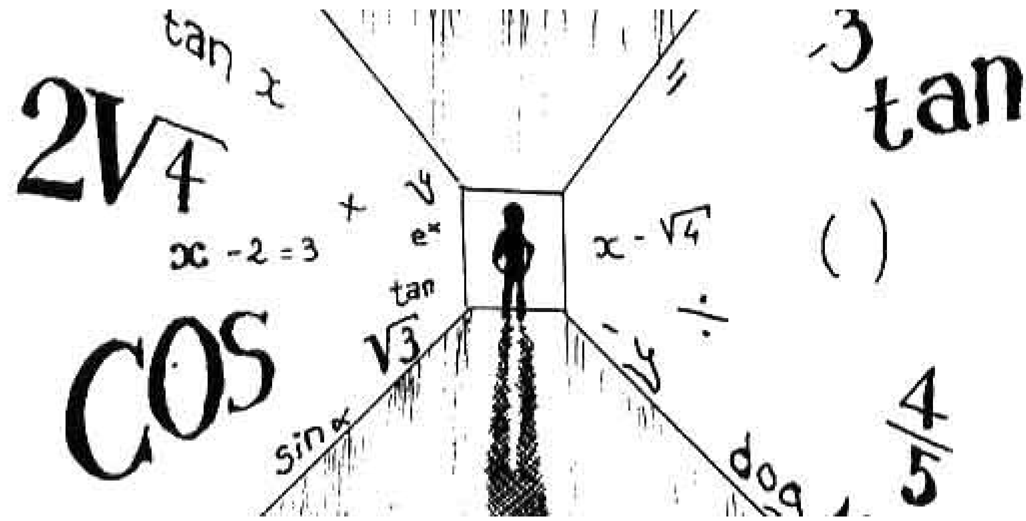
Exercices de maths

-- La Trigonométrie 2AS --

Par Mr Moula



02 / 04 /2009

Classe :2AS	# الحسابات المثلثية (السلسلة الثانية)	الأستـــاذ Moula

التمرين الأول

$A(X)$ عبارة لـــ X معرفة بـــ : $A(X)=a\cos 3x+b\sin 3x$

1) عين العددين b,a الحقيقيين حيث: $A\left(\frac{\pi}{6}\right)=3, A\left(\frac{\pi}{3}\right)=-3$

2) نعرف الآن: $f(x)=3\cos 3x+3\sin 3x$

1. تحقق أن لكل X من $\mathbb{R}$: $f(x)=3\sqrt{2}\cos(3x-\theta)$

مع θ عدد حقيقي يطلب تعينه.

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x)=3$ ثم عين الحلول في المجال $[0,2\pi[$.

التمرين الثاني

I. 1) أثبت أن : $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\times\sin(x+\frac{\pi}{4})$

2) استنتج في $\mathbb{R}$ ،حلول المعادلة : $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1=0$

II. x عدد حقيقي يختلف عن (KM) حيث: $K\in Z$

1) أثبت أن : $\cos x\times\cos(2x)\times\cos(4x)=\dfrac{\sin(8x)}{8\sin x}$

2) استنتج قيمة : $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

التمرين الثالث

لتكن العبارة $A(x)$ المعرفة كما يلي : $A(x)=\cos 3x+\sqrt{3}\sin x$

1) عين الأعداد الحقيقية δ,β,α حيث: $A(x)=\alpha\sin(\beta x+\delta)$

2) نضع : $\delta=\frac{\pi}{6},\beta=1,\alpha=2$

- حل في المعادلة : $A(x)=1$
- حل في المجال $[-\pi,\pi]$ المتراجحة : $A(x)\leq 1$

التمرين الرابع

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$

2) حل في المجال $]2\pi,0[$ المتراجحة : $\dfrac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\sin nx-1}\geq 0$

التمرين الخامس

- أحسب الإحداثيات القطبية للنقط التالية المعرفة بإحداثياتها الديكارتية:

$1)A(-1,1)$ $2)B(0,-3)$ $3)C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$4)D\left(3\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$ $5)E\left(-\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ $6)E\left(-1,\sqrt{3}\right)$

- أحسب الإحداثيات الديكارتية للنقط التالية المعرفة بإحداثياتها القطبية و كذلك تعيين النقط في معلم $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.

$1)A(1,0)$ $2)B\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$ $3)C\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$ $4)D\left(5,-\frac{3\pi}{4}\right)$

$5)E\left(2\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$ $6)E\left(4,-\frac{7\pi}{6}\right)$ $7)G\left(\frac{7}{4},345\pi\right)$ $8)E\left(\frac{1}{4},20\pi\right)$

$\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$معلم متعامد و متجانس مباشر.

- لتكن النقطتان B,A المعرفتان بإحداثيتهما القطبيتين $A\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$و $B\left(2,\frac{5\pi}{6}\right)$.

Cهي النقطة المعرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

- أحسب الإحداثيات القطبية للنقطة C.

التمرين السادس

- علما أن $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ أحسب $\cos^2\frac{\pi}{8}$

1) استنتج قيمة $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$.
2) احسب قيمة المجموع S_1حيث: $S_1=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$
3) أحسب قيمة المجموع S_2 حيث : $S_2=\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$

التمرين السابع

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$1)\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ $2)\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $3)\cos x+\sin x=0$

$4)\cos 3x=\cos x$ $5)\cos 2x=\sin x$ $6)\sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

التمرين الثامن

حل في المجال I المعادلات التالية :

$1)\sin^2 x-\sin x-6=0$	$\mathbb{R}=I$
$2)2\cos^2 x-3\cos x-2=0$	$I=[0,2\pi[$
$3)4\cos^2 x+2\left(1-\sqrt{3}\right)\cos x-\sqrt{3}=0$	$I=]-\pi,\pi]$

التمرين التاسع

لتكن العبارة $E(x)$ حيث : $E(x)=\cos^2 x-\cos^4 x$

1) حلل العبارة $E(x)$ إلى جداء.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $E(x)=0$.

3) لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة: $f(x)=\dfrac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}$.

- عين مجموعة تعريف الدالة f .
- بسط عبارة $f(x)$.

التمرين العاشر

حل في المجال I المعادلات و المتراجحات التالية و مثل صور الحلول على الدائرة المثلثية.

$1)I=[-\pi,\pi]$	$2\sin x+\sqrt{2}\leq 0$	$2\sin x+\sqrt{2}=0$
$2)I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$	$tgx-1>0$	$tgx-1=0$
$3)I=[-\pi,\pi]$	$1-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leq 0$	$1-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$
$4)I=[0,\pi]$	$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{2}$	$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$
$5)I=[0,\pi]$	$\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)\geq -\frac{1}{2}$	$\cos\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=-\frac{1}{2}$

التمرين الحادي عشر

I. لتكن المعادلة : $4\cos^2 x+2\left(1-\sqrt{3}\right)\cos x-\sqrt{3}=0$............(1)

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (1) و هذا بوضع: $x=\cos x$
- استنتج حلول المعادلة (1) و هذا في المجال : $]-\pi,\pi[$

II. حل في المعادلتين :

$$2\sqrt{3}\sin x-3=0....................(1)$$

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}=0...............(2)$$

التمرين الثاني عشر

نعتبر المعادلة : $\sin 3x=-\sin 2x....................(1)$

1) حل في $\mathbb{R}$ ثم في المجال $]-\pi,\pi]$ المعادلة (1) و مثل صور الحلول على الدائرة المثلية.

2) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $\sin 3x=\sin x\left(4\cos^2 x-1\right)$

3) إستنتج أن حلول المعادلة (1) هي أيضا حلول المعادلة.

4) من بين حلول المعادلة (1) عين الحلول التي هي أيضا حلول المعادلة : $4\cos^2 x+2\cos-1=0$

5) نضع : $X=\cos x$.

6) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $4x^2+2x-1=0$

7) استنتج قيمة العددين $\cos\frac{2\pi}{5}$ و$\cos\frac{4\pi}{5}$.

التمرين الثالث عشر

بملاحظة $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ احسب القيم المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$

- استنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ و$\sin\frac{5\pi}{12}$.
- أحسب $\cos\frac{11\pi}{12}$ و$\sin\frac{11\pi}{12}$.

التمرين الرابع عشر

أكتب بدلالة $\cos x$ و$\sin x$ كل من العبارات الآتية:

$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right),\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ / $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right),\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ / $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

التمرين الخامس عشر

برهن باستعمال دساتير الجمع أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

التمرين السادس عشر

برهــــــــن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

المضبوطتين لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

التمرين السابع عشر

برهن أنه من أجل كل عددين حقيقيين α و β لدينا:

$$a)\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$$

$$b)\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$$

التمرين الثامن عشر

برهن أ،ه من أجل كل عددين حقيقيين α و β لدينا:

$$2\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)=\sin 2\alpha-\sin 2\beta(a$$

$$2\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)=\sin 2\beta-\cos 2\alpha(b$$

التمرين التاسع عشر

x عدد حقيقي حيث $0<x<\frac{\pi}{2}$ و $\cos x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

- أحسب $\cos 2x$ ثم استنتج قيمة للعدد x.

التمرين العشرون

أكتب بدلالة $\sin 2x$ كل من العبارتين التاليتين: $(\cos x+\sin x)^2,(\cos x-\sin x)^2$

التمرين الحادي و العشرون

x عدد حقيقي يختلف عن الأعداد من الشكل $k\frac{\pi}{2}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$، برهن أن : $\frac{\sin 2x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}$

التمرين الثاني و العشرون

α و β عددان حقيقيان من المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ حيث : $\cos\alpha=\frac{1}{3}$ و $\cos\beta=\frac{3}{5}$.

1) أحسب كل من $\sin\alpha$ و $\sin\beta$.

2) أحسب كلا من $\cos(2\alpha-\beta)$ و $\sin(2\alpha-\beta)$.

التمرين الثالث و العشرون

1) عبر عن كل من $\cos^2\alpha$ و $\sin^2\alpha$ بدلالة $\cos 2\alpha$.

2) عبر بدلالة $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ عن العبارة: $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$

3) عبر بدلالة $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ عن العبارة: $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$

التمرين الرابع و العشرون

أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

1) $\sin^4 x-\cos^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x=0$

2) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$

3) $\cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x.\cos^2 x=1$