الأستاذ محمد الرقبة

La dérivabilité الاشتقـاق

I- الاشتقاق في نقطة

تمهيد : ① نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=x^2$

نفترض أن x تنتمي إلى مجال مفتوح مركزه $x_0=2$

ونضع $x=2+h$

لدينا $f(x)=f(2+h)=4+4h+h^2$

إذا كانت $h\simeq 0$ فإن h^2 تكون مهملة.

ومنه نعتبر ان العدد $4+4h$ هو قيمة مقربة للعدد $f(2+h)$.

مثال : $f(2,01)=f(2+0,01)=4+0,04=4,04$

ملاحظة ① لدينا $f(2)=4$

إذن $f(2+h)-f(2)=4h+h^2$

ومن أجل $h\neq 0$ نجد $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=4+h$

ومنه $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=4$

② اعتبرنا أن العدد $4+4h$ هو تقريب للعدد $(2+h)^2$

وهذا يعني أن $4+4(x-2)$ هو تقريب للعدد x^2 بجوار **2**

أنشئ المستقيم $D: y=4x-4$ والمنحنى (ℓ)

مــــــاذا تلاحظ ؟

خلاصة : المستقيم (D) مماس للمنحنى (ℓ) في النقطة $A(2,4)$.

الدالة $x\mapsto 4x-4$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة ذات الأفصول **2.**

الاشتقاق في نقطة

لاحظنا في الأمثلة السابقة أن حساب $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ يساعدنا لتقريب f بدالة تآلفية بجوار x_0 .

تعريف لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 .

- نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي l بحيث $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$
- العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 .

ونكتب $l=f'(x_0)$

ملاحظة إذا وضعنا $x=x_0+h$

فإن $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$

إذن $f(x)=f(x_0)+l(x-x_0)+(x-x_0)\varphi(x)$

مع $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$

الأستاذ محمد الرقبة

تعريف : الدالة $x \mapsto f(x_0)+l(x-x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة x_0.

أمثلة : هل الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 في الحالات التالية ؟

(a $f(x)=x^2+x$ $\quad x_0=1$

(b $f(x)=\sqrt{x+1}$ $\quad x_0=0$

(c $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad x_0=1$

(d $f(x)=|x|$ $\quad x_0=0$

خاصية : كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0.

ملاحظة : عكس هذه الخاصية غير صحيح.

II- الإشتقاق على اليمين – الإشتقاق على اليسار

1) تمهيد : لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+1, x\le 0 \\ \dfrac{1}{x+1}, x\succ 0 \end{cases}$$ حيث a عدد حقيقي معلوم.

1) بين أن f متصلة في 0

2) حدد قيمة a لكي تكون f قابلة للإشتقاق في 0

2) تعاريف

a- الاشتقاق على اليمين

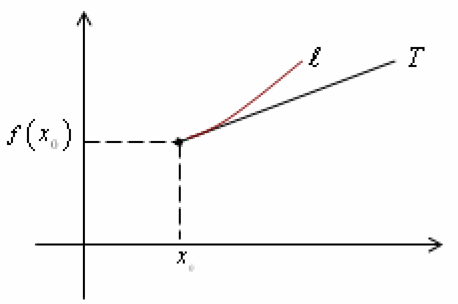
b- الاشتقاق على اليسار

3) التأويل الهندسي "معادلة نصف المماس للمنحنى ℓ في النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ "

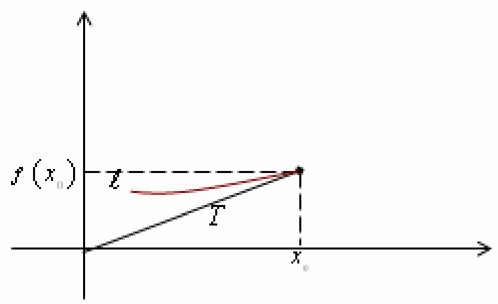
- ليكن (ℓ) المنحنى الممثل للدالة f و $M_0(x_0, f(x_0))$ نقطة من (ℓ).

إذا كانت f قابلة للإشتقاق على اليمين (أو على اليسار) في x_0

فإن المنحنى (ℓ) يقبل نصف مماس في النقطة التي أفصولها x_0 ويكون المعامل الموجه هو $f'_d(x_0)$ (أو $f'_g(x_0)$)



$$T:\begin{cases} y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x_0\le x \end{cases}$$



$$T:\begin{cases} y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x\le x_0 \end{cases}$$

مثــال :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+1, x\succ 0 \\ f(x)=x^2-x+1, x\le 0 \end{cases}$$

ملاحظة (*) إذا كانت f قابلة للإشتقاق فإن $f'_g(x_0)=f'_d(x_0)$

(*) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على اليمين في x_0

وقابلة للإشتقاق على اليسار في x_0

وكان $f'_g(x_0)=f'_d(x_0)$

فإن f قابلة للإشتقاق في x_0

ولدينا $f'(x_0)=f'_g(x_0)=f'_d(x_0)$

III- الدالة المشتقة

1) تعاريف : تعريف① قابلية الإشتقاق على مجال مفتوح $I=]a,b[$

تعريف② قابلية الإشتقاق على مجال مغلق $[a,b]$

تعريف③ لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I

الدالة المعرفة على I بما يلي :

$$f':I\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f'(x)$$

تسمى الدالة المشتقة للدالة f على المجال I ونرمز لها بـ f'

أمثلة: 1) مشتقة الدالة $f(x)=k$

2) مشتقة الدالة $f(x)=x$

3) مشتقة الدالة $f(x)=x^2$

4) مشتقة الدالة $f(x)=x^n$ $\quad n\in\mathbb{N}$

استنتــاج .

2) العمليات على الدوال القابلة للإشتقاق

1) $(f+g)'(x_0)=$

2) $(kf)'(x_0)=$

3) $(f.g)'(x_0)=$

4) $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=$

5) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=$

تطبيقـات

1) مشتقة بعض الدوال الحدودية.

2) مشتقة الدالة $\frac{1}{x^n}$

أمثـلـة

استنتاج

3) مشتقة الدالة $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $\quad c\neq 0$

أمثـلـة

استنتاج

4) مشتقة دالة جذريـة

3) مشتقة الدوال المثلثية الاعتيادية

تذكيـر:

$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

1.3. مشتقة الدالة $f(x)=\sin x$

2.3. مشتقة الدالة $f(x)=\cos x$

3.3. مشتقة الدالة $f(x)=\tan x$

مبرهنة : $(u^n)'=nu^{n-1}.u'$ u دالة قابلة للإشتقاق.

تطبيقـات

حدد مشتقة الدوال التالية :

1) $f(x)=(x^2-3x)^3$

2) $f(x)=\sin^2 x$

3) $f(x)=(x^2+1)\tan^3 x$

4) $f(x)=\cos x-\sin x$

5) $f(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x}$

6) $f(x)=\dfrac{\tan x-1}{\cos x}$

مبرهنة : لتكن f دالة قابلة للإشتقاق و g دالة معرفة بـ $g(x)=f(ax+b)$

مشتقة الدالة g هـي الدالة $g'(x)=af'(ax+b)$

أمثلـة :

$$f(x)=\cos(ax+b)\quad\Rightarrow\quad f'(x)=?$$

$$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\quad\Rightarrow\quad f'(x)=?$$

$$f(x)=\tan(ax+b)\quad\Rightarrow\quad f'(x)=?$$

$$f(x)=\cos 2x-\sin\frac{x}{3}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=?$$

4) مشتقة الدوال اللاجذرية

1.4. مشتقة الدالة $f(x)=\sqrt{x}$

2.4. مشتقة الدالة $f(x)=\sqrt{u(x)}$

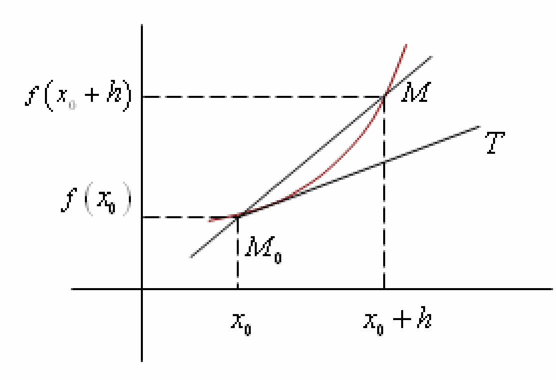
تطبيقـات

جدول الدوال المشتقة للدوال الاعتيادية.

IV- التأويل الهندسي

M_0 و M نقطتان مختلفتان من ℓ.

x_0 أفصول M_0.



x_0+h أفصول M.

المعامل الموجه للمستقيم (M_0M)

هو

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

نلاحظ أنه كلما اقتربت M من M_0 فإن (M_0M) تقترب من T.

ومنه فإن المعامل الموجه للمستقيم T هو $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

تعريف لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0

و (ℓ) المنحنى الممثل للدالة f .

المستقيم الممثل للدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة x_0 يسمى مماس المنحنى (ℓ) في النقطة ذات الأفصول x_0.

ومعادلة المماس هي :

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$