ثانوية حمدان خوجة - المشرية -   الأستاذ لعرج لعراجي

سلسلة في الهندسة في الفضاء

الشعبة : 3 رياضي 3 تقني رياضي و 3 علوم تجريبية

التمرين الأول

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة $3x+2y-z-5=0$ و (D) المستقيم المعرف بـ $x-2y+z-3=0$ و $x-y-z+2=0$

1. حدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).
2. عين معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يتضمن (D) و العمودي على (P) .

التمرين الثاني

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر سطح الكرة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-4=0$ و المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x=-1+6t \\ y=6-5t \qquad (t\in \mathbb{R}) \\ z=1-2t \end{cases}$$

1. بين أن $(D)\cap(S)=\varnothing$
2. حدد معادلة ديكارتية لكل مستوي من المستويين (P_1) و (P_2) المماسين لسطح الكرة (S) و اللذان يشملان المستقيم (D) و أعط إحداثيات A و B نقطتا تماسهما لـ (S) على التوالي.
3. بين أن $(D)\perp(AB)$.
4. تحقق أن النقطة $C(1,-1,3)$ تنتمي إلى المستوي (P) الذي معادلته $x-y+z-5=0$ ثم أوجد معادلة سطح الكرة (Γ) المماسة للمستوي (P) في النقطة C و المارة من النقطة $D(1,1,1)$.

التمرين الثالث

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1,1,0)$ و $B(1,0,-1)$, $C(-1,0,1)$

ليكن المستوي (Q) الذي معادلته: $2x+3y+z-6=0$

1. أوجد معادلة للمستوي $(P)=(ABC)$.
2. بين أن المستويين (P) و (Q) متعامدين.
3. استنتج التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q).
4. ليكن سطح الكرة **(S)** التي مركزها $\mathbf{\Omega}(1,2,4)$ و و المماسة للمستوي (P).
   - حدد معادلة ديكارتية ل سطح الكرة **(S)**.
   - بين أن (Q) و (S) يتقاطعان وفق دائرة (C) يتم تعيين مركزها و طول نصف قطرها.

التمرين الرابع

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(-3,0,-1)$ و $B(1,5,-1)$ و $C(-1,3,0)$

و سطح الكرة (S) التي مركزها $\mathbf{\Omega}(1,3,-\frac{1}{2})$ و طول نصف قطرها $R=\frac{9}{2}$

1. حدد معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S).
2. عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A و الشعاع $\vec{n}(5,-4,2)$ ناظما له.
3. أحسب $d(\mathbf{\Omega};(P))$ و استنتج أن (P)يقطع (S) في دائرة (C).
4. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من و العمودي $\mathbf{\Omega}$ على المستوي (P).
5. عين إحداثيات النقطة H مركز الدائرة (C) وأحسب R' طول نصف قطر الدائرة (C).
6. نعتبر المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x=2t \\ y=2t \qquad (t\in \mathbb{R}) \\ z=t-1 \end{cases}$$

احسب $d(\mathbf{\Omega};(D))$ ثم استنتج الوضع النسبي للمستقيم (D) و سطح الكرة (S)

التمرين الخامس

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، حيث:

$A(-1\,;2\,;1), B(1\,;-6\,;-1), C(2\,;2\,;2)$.

1. بين أن A , B , C ليست على إستقامة واحدة.و الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC).
2. أعط معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).
3. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) و المار بالنقطة $D\,(0\,;1\,;-1)$.
4. عين إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ABC).ما هي المسافة بين D و المستوي (ABC).
5. لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (DC) للوسيط الحقيقي t حيث $(\overrightarrow{DM} = t\,\overrightarrow{DC})$; تحقق أن المسافة AM تأخذ أصغر قيمة ممكنة من أجل $t = \frac{5}{14}$.أستنتج إحداثيات النقطة Q الاسقاط العمودي للنقطة A على (DC).

التمرين السادس

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1, 0, 0)$ و $B(0,2,0)$ و $C(0,0,2)$ و $\Omega(\frac{1}{2},1,1)$ و 'O المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوي (ABC)

1. أعط معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).
2. أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(O'\,\Omega)$
3. حدد إحداثيات النقطة 'O
4. نعتبر سطح الكرة (S_λ) التي مركزها Ω و طول نصف قطرها λ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما.
   - أعط معادلة ديكارتية لـ (S_λ).
   - أوجد قيمة λ بحيث يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_λ).
   - أوجد قيمة λ بحيث يكون تقاطع المستوي (ABC) و سطح الكرة (S_λ) هو دائرة المحيطة بالمثلث ABC.

التمرين السابع

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1, -1, 1)$ و $B(3,1,-1)$ المستوي (P) ذا المعادلة $2x - 3y + 2z = 0$ و (D) المستقيم المعرف بـالتمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -2 - 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

1. حدد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المار من A و العمودي على (D)
2. حدد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المار من B و الموازي لـ (P)
3. أحسب $d(A,(P))$ و $d(A,(D))$.

التمرين الثامن

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، حيث

$A(1,-1,0)$ ، $B(-1,0,1)$ و $C(0,2,-1)$.

1. بين أن A, B, C تمثل مستوي (P) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.
2. تحقق أن النقطة $J(0,1,0)$ تنتمي إلى المستوي (Q) ذا المعادلة $-4x-3y-5z+3=0$.
3. حدد الوضع النسبي للمستويين (P) و (Q).
4. حدد المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) التي أحد أقطارها $[BJ]$.
5. بين أن المستوي (Q) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة محدد مركزها و نصف قطرها.

التمرين التاسع

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، حيث $A(2,1,3)$ ، $B(-3,-1,7)$ و $C(3,2,4)$.

1. بين أن النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة.
2. ليكن (Δ) مستقيما المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t : t\in IR \\ z=4+t \end{cases}$

   أ- بين أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

   ب- أعط معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3. ليكن H مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$

   أ- بين أن H نقطة مشتركة للمستوي (ABC) و المستقيم (Δ).

   ب- عين طبيعة المجموعة (Γ_1) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث:

   $$(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$$

   ج- حدد طبيعة المجموعة (Γ_2) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث:

   $\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{29}$ يتم تحديد العناصر المميزة

   د- عين طبيعة و العناصر المميزة للتقاطع $(\Gamma_1)\cap(\Gamma_1)$

   ه- هل النقطة $S(-8,1,3)$ تنتمي إلى $(\Gamma_1)\cap(\Gamma_1)$ ؟

التمرين العاشر

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. عين معادلة ديكارتية للمستوي P المار من النقطة $A(1,0,1)$ و الشعاع $\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\vec{n}$ ناظما له.
2. ليكن (P') المستوي الذي معادلته $x+2y-z+1=0$ و لتكن النقطة $B(0,1,1)$.

   أ- بين أن المستويين P و P' متعامدان.

   ب- أحسب المسافتين d و d' للنقطة B عن المستويين P و P' على الترتيب.

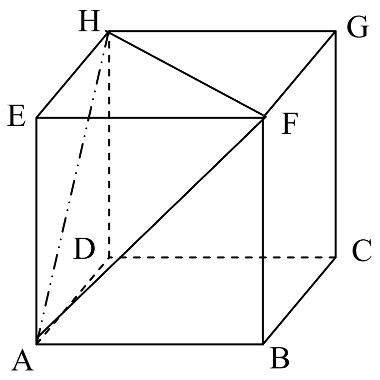
3. أ) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم D تقاطع المستويين P و P'.

   ب) عين إحداثيات النقطة H من D بحيث يكون المستقيم (BH)عموديا على (D).

   جـ) تحقق أن $MH^2=d^2+d'^2$.

التمرين الحادي عشر

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه a (a عدد حقيقي موجب تماما).



ليكن I نقطة تقاطع المستقيم (EC) و المستوي (AFH).

1. أحسب بدلالة a الجداءات السلمية التالية:

$$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF}\ ,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}\ ,\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF}$$

2. أستنتج أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ متعامدين.
3. نقبل أيضا أن الشعاعين $\overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{AH}$ متعامدين.استنتج أن النقطة I هي الاسقاط العمودي للنقطة E على المستوى (AFH).
4. أ) بين أن المستقيمين (AF) و (EH) متعامدين و كذلك المستقيمين (AF) و (EI)

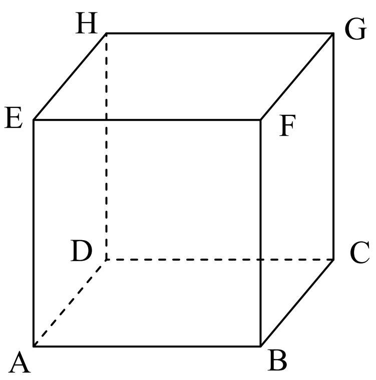
ب) استنتج أن المستقيم (AF) عمودي على المستقيم (HI).

جـ) استنتج أن المستقيم (AH) عمودي على المستقيم (FI).

5. ماذا تمثل النقطة I بالنسبة إلى المثلث AFH.؟

التمرين الثاني عشر

نعتبر المكعب ABCDEFGH طول ضلعه 1



نختار المعلم المتعامد المتجانس $(A\ ,\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$ حيث. $\vec{i}=\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{j}=\overrightarrow{AD}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{AE}$.

النقط I , J , K , L , M , N منتصفات القطع المستقيمة [BC] ، [CD] ، [DH] ، [HE] ، [EF] و [FB] على الترتيب.

1. عين احداثيات النقط I , K و M.
2. بين أن النقط I , J , K , L , M , N تنتمي ألى نفس المستوي P يطلب تعيين معادلته.
3. بين أن الشعاع $\overrightarrow{AG}$ ناظميا للمستو P.
4. بين أن الاسقاطات العمودية للنقط I , J , K , L , M , N على المستقيم (AG) تنطبق على نفس النقطة و لتكن T.

التمرين الثالث عشر

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، D حيث

$$A(-1\ ;0\ ;2),\ B(3\ ;2\ ;-4),\ C(1\ ;-4\ ;2),\ D(5\ ;-2\ ;4)$$

نعتبر النقطتين J ,I منتصفى القطعتين المستقيمتين [AB] ، [CD] و النقطة K حيث : $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

عين احداثيات النقط J, K, I .

بين أن النقط K,J,I ليست على استقامة واحدة.

أوجد معادلة ديكارتية للمستوي (IJK).

أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AD).ثم بين أنه يقطع المستوي (IJK) في نقطة L يطلب تعيين إحداثياتها.

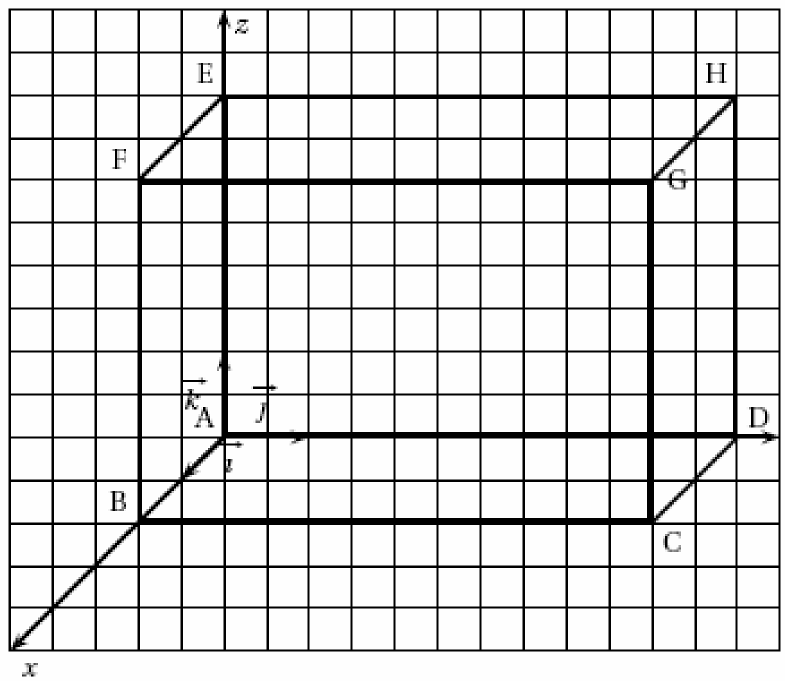
عين العدد الحقيقي k بحيث $\overrightarrow{AL}=k\overrightarrow{AD}$

التمرين الرابع عشر

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر متوازي المستطيلات ABCDEFGH المعرف بما يلي:

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$ ، $\overrightarrow{AD} = 6\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE} = 4\vec{k}$. I ، J و K المنتصفات على الترتيب للقطع [EF] ، [FB] و [AD].

1. حدد على الشكل الملحق النقط I، J و K.أعط إحداثيات النقط B، D و E ثم تحقق أن إحداثيات النقط I، J و K على الترتيب هي:$(1;0;4)$; $(2;0;2)$ و $(0;3;0)$.
2. ليكن (P_1) المستوي ذو المعادلة $y = 0$ و (P_2) المستوي ذو المعادلة $2x + z = 0$.
   - أ- أعط الشعاع $\vec{n}_1$ ناظمي للمستوي (P_1) و $\vec{n}_2$ ناظمي للمستوي (P_2).
   - ب- استنتج أن (P_1) و (P_2) متقاطعين.
   - ج- ليكن (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) بين أن $(\Delta) = (IJ)$.
3. ليكن الشعاع $\vec{n}(2;2;1)$
   - أ- بين أن الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{\mathbf{IJ}}$ و $\overrightarrow{\mathbf{IK}}$.
   - ب- أستنتج أن الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي **(IJK)**
   - ج- بين أن معادلة المستوي (IJK) هي $2x + 2y + z = 6$
4. نعتبر المستوي (P_3) ذو المعادلة الديكارتية : $5x + y = 5$.
   - أ- عين إحداثيات النقطتين R و T تقاطع المستوي مع المحورين (Ax) و (Ay) على الترتيب.
   - ب- تحقق أن النقطة I تنتمي إلى المستوي (P_3) .
   - **ج-** على الشكل المرفق علم النقط R و T ثم أرسم المستوي (P_3) .



التمرين الخامس عشر

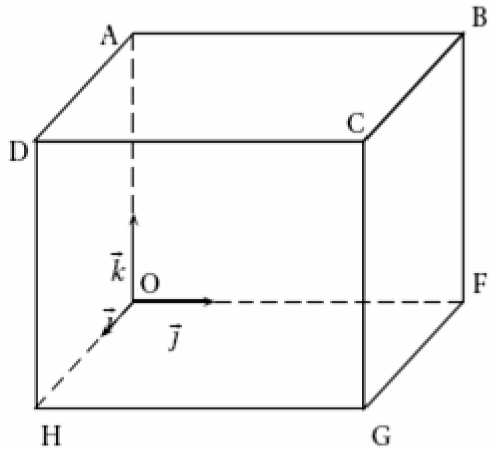
الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، حيث:
$A(-1\,;2\,;1),\ B(1\,;-6\,;-1),\ C(2\,;2\,;2)$.

1. بين أن A , B , C ليست على إستقامة واحدة.و الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC).
2. أعط معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).
3. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) و المار بالنقطة $D\,(0\,;1\,;-1)$.
4. عين إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ABC).ما هي المسافة بين D و المستوي (ABC).
5. لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (DC) للوسيط الحقيقي t حيث $(\overrightarrow{DM}=t\,\overrightarrow{DC})$; تحقق أن المسافة AM تأخذ أصغر قيمة ممكنة من أجل $t=-\frac{5}{14}$. أستنتج إحداثيات النقطة Q الاسقاط العمودي للنقطة A على (DC).

التمرين السادس عشر

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط نعتبر متوازي المستطيلات ABCDOFGH المعرف بـ:

$\overrightarrow{OH}=3\,\vec{i}\,;\ \overrightarrow{OF}=4\,\vec{j}\ ;\ \overrightarrow{OA}=3\,\vec{k}$



ليكن L منتصف القطعة [CG] .

1. نعتبر (P) مجموعة النقط ذات الإحداثيات $x\,;y\,;z$ و التي تحقق المعادلة : $4x-3y+8z-12=0$ أي من بين النقط A;B;O;G;H;L تنتمي إلى (P).
2. استنتج أن المجموعة (P) هي المستوي (BLH).
3. أعط المركبات السلمية للشعاع $\vec{n}$ الناظمي للمستوي (P).
4. ليكن (Δ) المستقيم المار بالنقطة A و شعاع توجيهه $\vec{n}$.
بين أن (Δ) هو مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{LH}=0$ و $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BL}=0$ ثم استنتج تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)
5. بين أن النقطة ذات الإحداثيات $\left(\frac{-48}{89};\frac{36}{89};\frac{171}{89}\right)$ تنتمي إلى (Δ) و (P).