دراســـة الـــــدوال

I- أنـشـطــة :

1- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[2,+\infty[$

بـ : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

(ℓ_f) هـو المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أحسب $f(2)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2- أ- أحسب : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x \succ 2}} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

ب- أحسب $f'(x)$ لكل x من $]2,+\infty[$ ، واعط جدول تغيراتها.

3- بين أن :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = 0$$

وأول النتيجة هندسيا.

الجــواب :

1-

$$f(2) = 2 - 1 + \sqrt{2^2 - 3\times 2 + 2}$$
$$= 2 - 1 + \sqrt{4 - 6 + 2}$$
$$= 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$

و : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2}$

$$= +\infty$$

ومنه : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2- أ-

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x \succ 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x \succ 2}} \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} - 1}{x - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ x \succ 2}} \frac{x - 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ x \succ 2}} 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ x \succ 2}} 1 + \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 2)^2}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} 1+\sqrt{\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} 1+\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$$

$$= 1+(+\infty)$$

$$= +\infty$$

• استنتـاج :

في 2 على اليمين ℓ_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأراتيب وموجه نحو الأعلى.

ب- لدينا : $f(x) = x-1+\sqrt{x^2-3x+2}$

إذن : $f'(x) = 1+\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$ $\quad \forall x\in]2,+\infty[$

وبما أن : $x \succ 2$

$2x-3 \succ 0$

ومنه : $f'(x) \succ 0$ $\quad \forall x\in]2,+\infty[$

جـدول تغيـرات f :

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$\| +\infty$ $\quad +$	
$f(x)$	$1 \nearrow$	$+\infty$

3- لنبين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x-\frac{5}{2}\right) = 0$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x-\frac{5}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x-1+\sqrt{x^2-3x+2}-2x+\frac{5}{2}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x+2}-x+\frac{3}{2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x+2}-\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

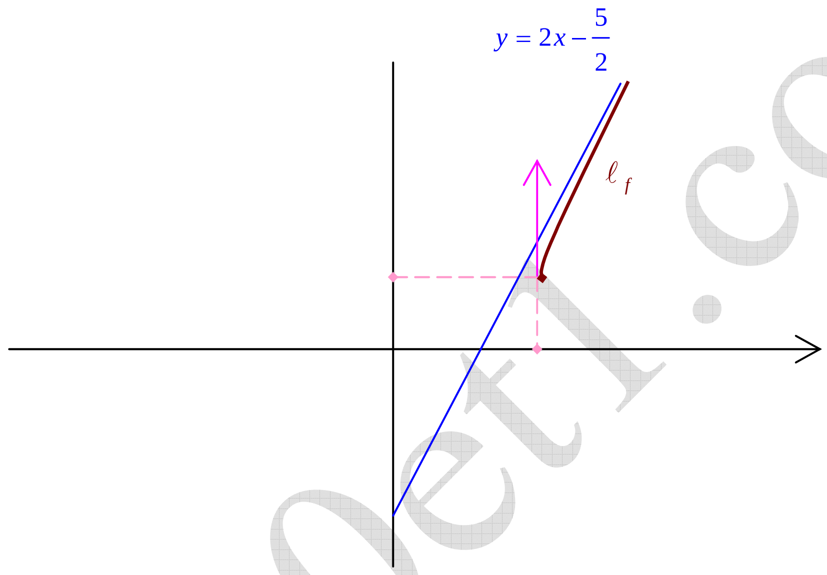
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2-3x+2\right)-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)}{\sqrt{x^2-3x+2}+x-\frac{3}{2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 - 3x+2} + \left(x - \frac{3}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{4}}{+\infty} = 0$$

إذن :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = 0$$

وبالتالي : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - \frac{5}{2}$ مقارب مائل لـ ℓ_f بجوار $+\infty$.



تمريـــن 2 :

لتكن f الدالة المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$$

1) حدد D_f.

2) أحسب النهايات عند محدات D_f.

3) بين أن لكل x من $]0,4[$:

$$f'(x) = \frac{x - 2}{(4x - x^2)\sqrt{4x - x^2}}$$

أعط جدول تغيرات f.

4) أنشئ ℓ_f.

5) بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تماثل لـ ℓ_f.

الجـــواب :

1) تحديد مجموعة التعريف :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 4x - x^2 \succ 0\}$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن : $D_f =]0\,,\,4[$

(2 $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = +\infty$$

(3 حساب $f'(x)$ لكل x من $]0,4[$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = \left(4x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(4x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(4-2x\right)$$

$$= \frac{x-2}{\left(4x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

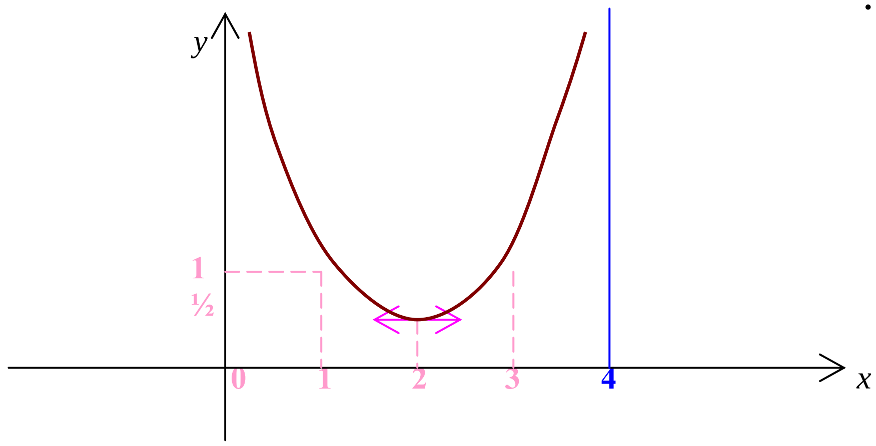
$$= \frac{x-2}{\left(4x-x^2\right)^{\frac{2}{2}} \times \left(4x-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ومنه : $$f'(x) = \frac{x-2}{\left(4x-x^2\right)\sqrt{4x-x^2}}$$

- جدول التغيرات :

x	0		2		4
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	½	↗	$+\infty$ ‖

(4 إنشاء ℓ_f .



5) لدينا : $\forall x \in D_f \; ; \quad 4-x \in D_f$

ولدينا : $\forall x \in D_f \; ; \quad f(4-x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\,(4-x) - (4-x)^2}}$

$$\forall x \in D_f \; ; \quad f(4-x) = \frac{1}{\sqrt{16 - 4x - 16 + 8x - x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$$

$$= f(x)$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تماثل لـ ℓ_f.

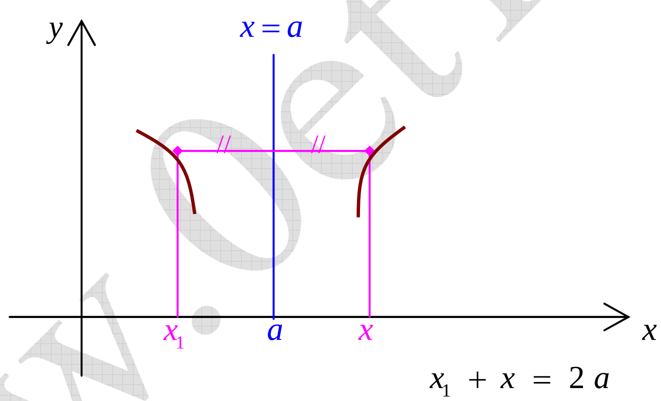
تذكيـــر :

1- محـور تماثـل ℓ_f :

نقول أن المستقيم $D(x=a)$ محور تماثل (ℓ_f) إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in D_f \; ; \quad 2a-x \in D_f$$

و $f(2a - x) = f(x)$



لدينا : $x_1 + x = 2a$

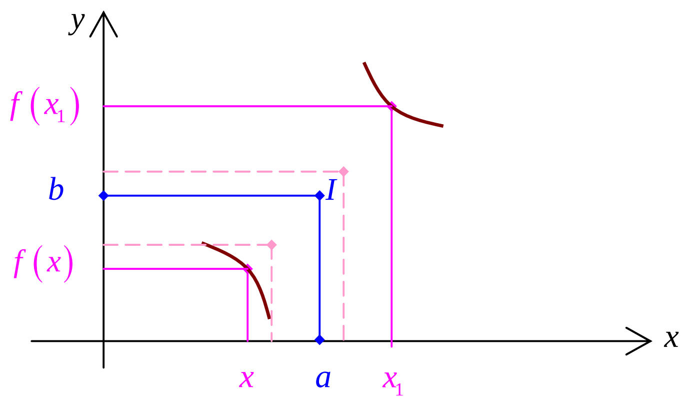
إذن : $x_1 = 2a - x$

$$f(x_1) = f(x)$$

ومنه : $f(2a - x) = f(x)$

2- مركز تماثـل ℓ_f

لتكن $I(a,b)$.



$$x_1 + x = 2a$$

$$f(x_1) + f(x) = 2b$$
$$x_1 = 2a - x$$
$$f(x_1) = 2b - f(x)$$

ومنه : $f(2a - x) = 2b - f(x)$

خاصيـــة :

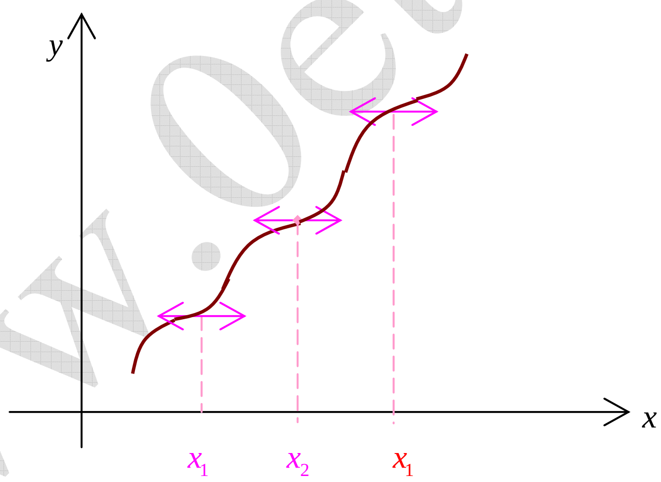
تكون النقطة $I(a,b)$ مركز تماثل لـ ℓ_f إذا وفقط إذا كان :
• $\forall x \in D_f \; ; \quad 2a - x \in D_f$
• $\forall x \in D_f \; ; \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$

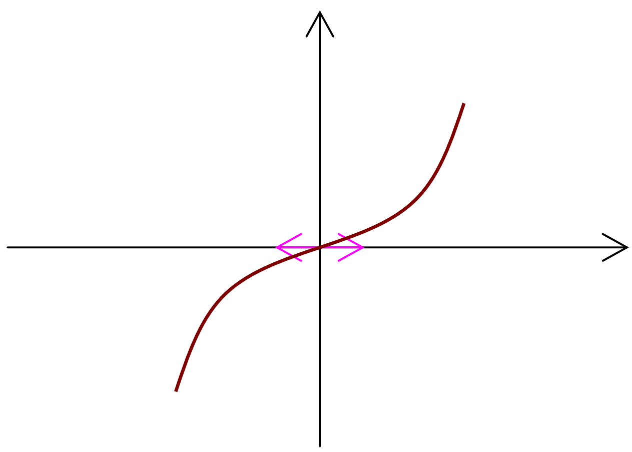
ملـخــص :

1- قابلية الاشتقــاق ورتــابــة دالــة :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على I.

- إذا كان لكل x من I : $f'(x) = 0$ فإن : f ثابتــة على I.
- إذا كان لكل x من I، $f'(x) \succ 0$ (يمكن لــ f' أن تنعدم في عدد منته من النقط).
  فإن : f تزايدية قطعا على I.
- إذا كان لكل x من I، $f'(x) \prec 0$ (يمكن لــ f' أن تنعدم في عدد منته من النقط).
  فإن : f تناقصية قطعا على I.





2- مطــارف دالــة :

دراسة الدوال ذ الرقبة

a- القيـم القصـوى

لتكن $x_0 \in I$ و $I \subset D_f$

نقول أن $f(x_0)$ قيمة قصوى للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in I \; ; \quad f(x) \leq f(x_0)$$

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على : $I = [a,b]$ و $x_0 \in I$

العدد $f(x_0)$ هو قيمة قصوى للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in [a, x_0[\; ; \quad f'(x_0) \succ 0$$

و $$\forall x \in]x_0, b] \; ; \quad f'(x_0) \prec 0$$

و $$f'(x_0) = a$$

x	a		x_0		b
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$		

b- القيـم الدنيـا

$x_0 \in I$ ، $I \subset D_f$

نقول أن $f(x_0)$ قيمة دنيا للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in I \; ; \quad f(x) \geq f(x_0)$$

خاصيـة :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I مركزه x_0 ،
يكون $f(x)$ مطرافـا إذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة f' تنعدم في x_0 وتغير إشارتها.

3- تقعـر منحنى دالـة ونقط الانعطـاف :

تعريـف :

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I و (ℓ_f) المنحنى الممثل لها.

نقول أن المنحنى (ℓ_f) محدب (أو تقعر المنحنى موجه نحو الأراتيب الموجبة) إذا وفقط إذا كان ℓ_f فوق جميع مماساته.

ونقول أن المنحنى (ℓ_f) مقعر إذا وفقط إذا كان ℓ_f تحت جميع مماساته.

خاصيـة :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على I .

و (ℓ_f) المنحنى الممثل لها.

- إذا كانت f'' موجبة على I فإن ℓ_f محدب.
- إذا كانت f'' سالبة على I فإن ℓ_f مقعـر.
- إذا انعدمت f'' في x_0 $(x_0 \in I)$ وتغير إشارتها فإن النقطة $I\left(x_0 , f(x_0)\right)$ نقطة انعطـاف.

4- الفـروع اللانهائيـة Branches infinies

ليكن ℓ_f المنحنى الممثل للدالة f.

نقول أن (ℓ_f) يقبل فرعا لانهائيا إذا وفقط إذا آلت x أو $f(x)$ إلى ∞.

$$\ell_f = \left\{M\left(x , f(x)\right) \;/\; x \in D_f\right\}$$

a- المستقيمـات المقاربـة لمنحنى :

1- إذا كانت $\left|\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\right| = +\infty$ أو $\left|\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\right| = +\infty$

فإن المستقيم $(x = x_0)$ مقارب عمودي لـ (ℓ_f).

2- إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$

فإن المستقيم $(y = b)$ مقارب أفقـي لـ (ℓ_f) بجوار ∞.

3- إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - (ax + b) = 0 \quad (a \neq 0)$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب لـ (ℓ_f) بجوار ∞.

4- إذا كانت $f(x) = ax + b + h(x)$ حيث $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 0$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب لـ (ℓ_f) بجوار ∞.

5- يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقاربا لـ (ℓ_f) بجوار ∞ إذا وفقط إذا كان :

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = b$ و $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$

$(a \in \mathbb{R}^* \;,\; b \in \mathbb{R})$ أو $(a , b) \in \mathbb{R}^2$

b- الاتجـاهـات المقاربـة :

1- إذا كانت
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

فإن : (ℓ_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

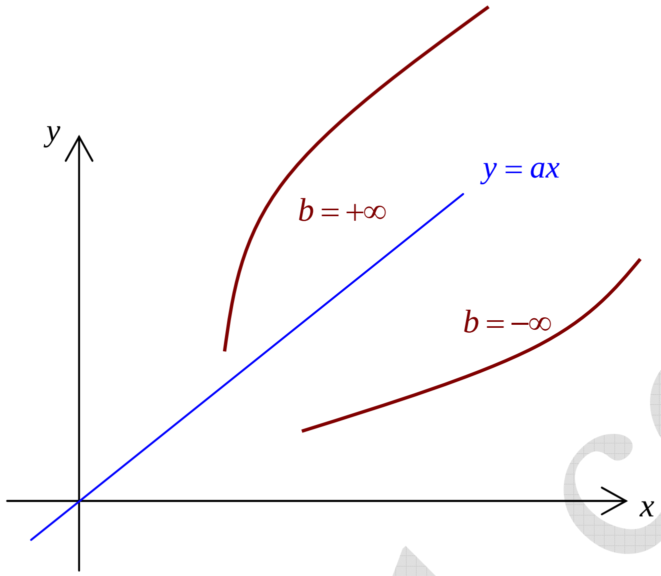
2- إذا كانت $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

فإن : (ℓ_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞.

3- إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$

و : $\lim f(x) - ax = \infty$

فإن : (ℓ_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y = ax$ بجوار ∞.



خـلاصـــة :

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

- $a = 0$: ℓ_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞
- $a = \infty$: ℓ_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار ∞
- $a \in \mathbb{R}^*$: $\lim f(x) - ax = b$
  - $b \in \mathbb{R}$: المستقيم $y = ax + b$ مقارب لـ ℓ_f بجوار ∞
  - $b = \pm\infty$: ℓ_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم $y = ax$ بجوار ∞