النهايات و الاستمرارية

الكفاءة المستهدفة

1 - حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة لمجالات مجموعة تعريفها
2 - حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين .
3- دراسة السلوك التقاربي لدالة.
4- استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول للمعادلة :
$\mathbf{k} = f(x)$, k عدد حقيقي معطى .

تصميم الدرس

أنشطة

النشاط1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كمايلي :

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x} .$$

1) أكمل الجدول الآتي :

x	10^2	10^4	10^8	10^{10}
$f(x)$				

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم فإن :

$$f(x) = 2 + \frac{3}{x} .$$

3) بين أنه إذا كان $x \geq 10^9$ فإن : $2 < f(x) < 2 + 10^{-9}$

4) ما هو تخمينك حول $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

5) أكمل الجدول الآتي :

x	0,0000001	0,00000001	0,000000001
$f(x)$			

6) بين أنه إذا كان $x \leq 10^{-9}$ فإن : $f(x) \geq 2 + 3 . 10^9$

7) أكمل الجدول الآتي :

x	-0,9997	-0,9998	-0,9999
$f(x)$			

8- بين أنه إذا كان : $x \geq -10^{-9}$ فإن : $f(x) \leq 2 - 3 . 10^9$

9- ما هو تخمينك حول : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

الحل :

1- إكمال الجدول :

x	10^2	10^4	10^8	10^{10}
$f(x)$	2,03	2,0003	2,00000003	2,000000003

2- نبين أن : $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$

لدينا : $f(x) = \frac{2x+3}{x}$ وعليه : $f(x) = \frac{2x}{x} + \frac{3}{x}$

وبالتالي : $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$

3- نبين أنه إذا كان : $x \geq 10^9$ فإن : $2 \leq f(x) \leq 2 + 10^{-9}$

لدينا $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$ و $\frac{3}{x} \geq 0$ ومنه $f(x) \geq 2$

ولدينا $x \geq 10^9$ ومنه $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{10^9}$

وعليه : $2 + \frac{1}{x} \leq 2 + 10^{-9}$ ومنه : $f(x) \leq 2 + 10^{-9}$

إذن : $2 \leq f(x) \leq 2 + 10^{-9}$.

4- لدينا المخمنة التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

5- إكمال الجدول :

x	0,0000001	0,00000001	0,000000001
$f(x)$	30000002	300000002	3000000002

6- نبين أنه إذا كان: $x \leq 10^{-9}$ فإن: $f(x) \geq 2 + 3 . 10^9$.

إذا كان: $x \leq 10^{-9}$ فإن : $\frac{1}{10^{-9}} \geq \frac{1}{x}$ ومنه : $\frac{3}{x} \geq 3 . 10^{9}$

وعليه: $2+3 . 10^{9} \geq 2+\frac{3}{x}$ وبالتالي: $f(x) \geq 2+3 . 10^{9}$.

7- إكمال الجدول :

x	-0,9997	-0,9998	-0,9999
$f(x)$	-1,00090027	-1,00060012	-1,00030003

8- نبين أنه إذا كان: $x \geq -10^{-9}$ فإن: $f(x) \leq 2-3 . 10^{9}$.

إذا كان: $x \geq -10^{-9}$ فإن : $\frac{-1}{10^{-9}} \leq \frac{1}{x}$ ومنه : $\frac{3}{x} \leq -3 . 10^{9}$

وعليه: $2-3 . 10^{9} \leq 2+\frac{3}{x}$ وبالتالي : $f(x) \leq 2-3 . 10^{9}$

9- التخمين :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$$

النشاط 2 :

تعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

من أجل $x<1$: $f(x) = -x+1$

و من أجل $x \geq 1$: $f(x) = x+1$

1- عين مجموعة تعريف الدالة f

2- أحسب $f(1)$.

3- أنشئ التمثيل البياني (C) للدالة بآلة بيانية.

4- ماذا تلاحظ على المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 ؟

5- ماذا تلاحظ على المنحنى (C) على كل من المجالين :

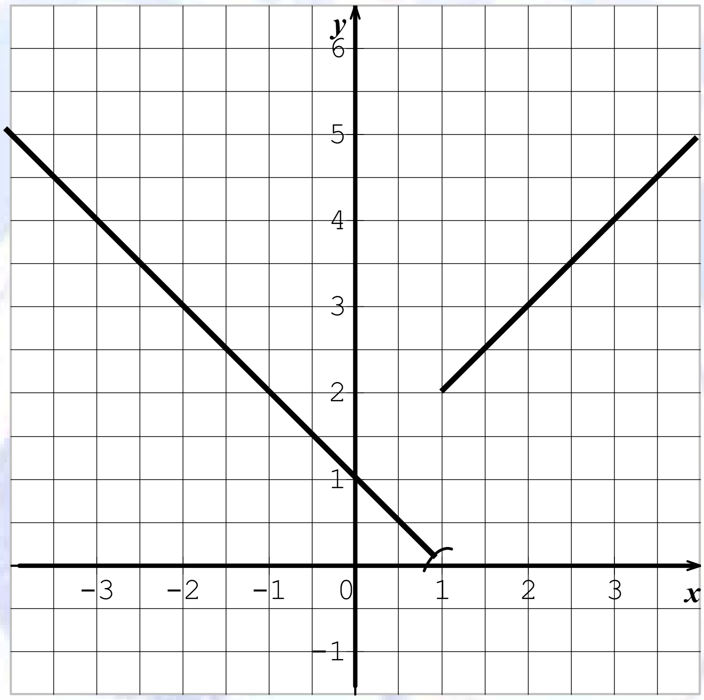
$]-\infty ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$

الحل :

1- مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$.

2- حساب $f(1)$: $f(1) = 1 + 1 = 2$

3- إنشاء (C) :



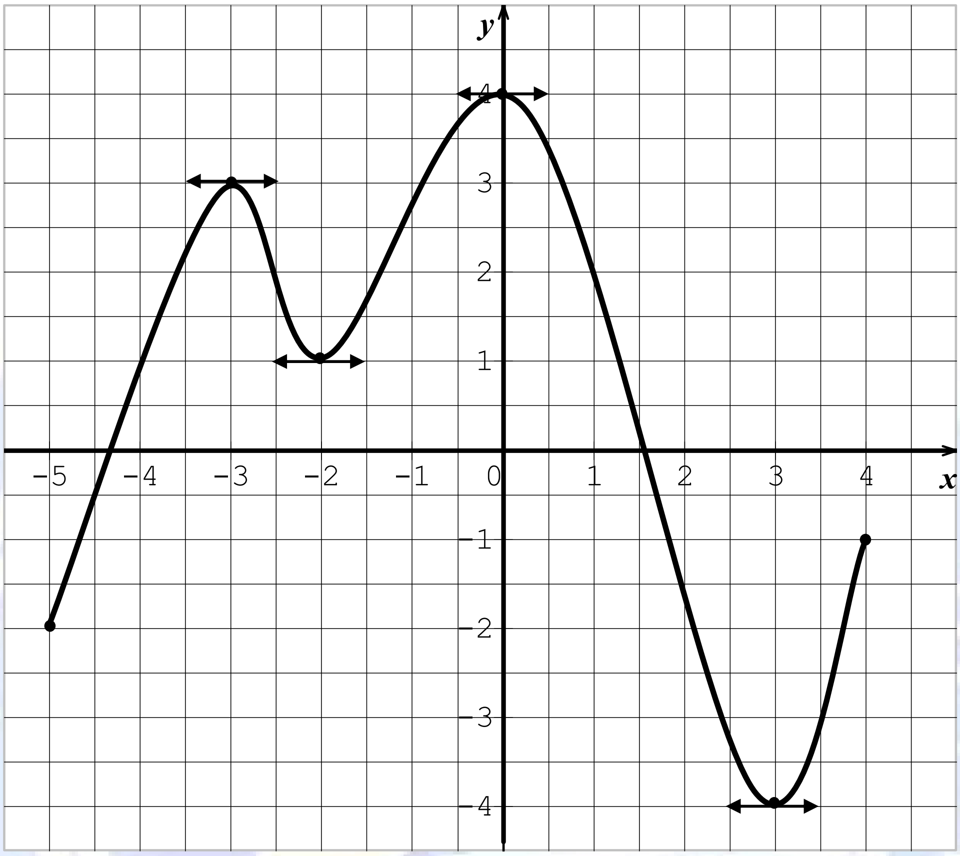
4- نلاحظ أن المنحنى (C) متقطع عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

5- نلاحظ أن (C) خط غير متقطع على المجال $]1 ; +\infty[$ وكذلك خط غير متقطع على المجال $]-\infty ; 1[$.

ونقول أن الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty ; 1[$ و $]1 ; +\infty[$.

النشاط 3 :

إليك التمثيل البياني لدالة f .



1- ما هي مجموعة تعريف الدالة f .

2- ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ مع حصر كل حل في مجال

من الشكل $]a\,;\,b[$. ما هي إشارة كل من $f(a)$ و $f(b)$.

3- ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=2$

ماهي المخمنات التي تستنتجها ؟

الحل :

1) الدالة f معرفة على المجال [-5 ؛ 4]

2) عدد حلول المعادلة $f(x)=0$:

للمعادلة $f(x)=0$ حلين x_1 , x_2 .

حيث $x_1 \in]1\,;\,2[$ و $x_2 \in]-5\,;\,-4[$

ولدينا : $f(1)>0$ و $f(2)<0$

وكذلك : $f(-5)>0$ و $f(-4)>0$

3) عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$

للمعادلة : $f(x) = 2$ ، 4 حلول.

المخمنات :

1) إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a ; b]$ وكان $f(a) . f(b) < 0$ فإنه يوجد عدد وحيد x_0 بحيث $f(x_0) = 0$ و $x_0 \in]a ; b[$

2) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a ; b]$ فإنه من أجل كل عدد c محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد x_0 بحيث $x_0 \in]a ; b[$ و $f(x_0) = c$.

I- النهايات

1- نهاية دالة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

تعريف 1 :

القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث : إذا كان : $x > B$ يكون $f(x) > A$

ونكتب $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{+\infty} f = +\infty$

تعريف 2 :

القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $-\infty$ يعني أن $\lim_{x \to +\infty} [-f(x)] = +\infty$

ونكتب : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

تعريف 3 :

القول أن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث إذا كان $x < -B$ يكون $f(x) > A$

ونكتب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

تعريف 4 :

نقول عن دالة f أنها تتناهى نحو $-\infty$ عندما يتناهى x نحو $-\infty$

إذا كانت : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[-f(x)\right] = +\infty$

ونكتب : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

تعريف 5 :

القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي ℓ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث : إذا كان $x > B$ يكون

$$0 \leq |f(x) - \ell| < e$$

ونكتب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

تعريف 6 :

القول أن نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي ℓ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث : إذا كان $x < -B$ يكون

$$0 \leq |f(x) - \ell| < e$$

ونكتب : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

ملاحظات :

- يمكن الحصول على بقية التعاريف بنفس الطريقة

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$$

- $|x - x_0| < \alpha$ تعني : $x \in \left]x_0 - \alpha \,;\, x_0\right[\cup \left]x_0 \,;\, \alpha + x_0\right[$
- $0 \leq |f(x) - \ell| < \alpha$ تعني : $f(x) \in \left]\ell - e \,;\, \ell + e\right[$

- إذا قبلت دالة عددية نهاية عند x_0 أو عند $(+\infty)$ أو عند $(-\infty)$ فإن هذه النهاية وحيدة.

2- نهاية دالة عند عدد حقيقي x_0 :

تعرف 1 :

القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي ℓ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث :

إذا كان $0 < |x - x_0| < \alpha$ يكون : $0 \leq |f(x) - \ell| < e$.

تعريف 2 :

القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أكبر هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث : إذا كان $0 < x - x_0 < \alpha$ يكون

$$f(x) > A$$

ونكتب :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$$

تعريف 3 :

القول أن نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أصغر هي $-\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث : إذا كان $0 < x_0 - x < \alpha$

يكون $f(x) < -A$

ونكتب :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$$

3- مبرهنات أولية على النهايات :

f و g دالتان عدديتان . x_0 , ℓ , ℓ' أعداد حقيقية.

نقبل دون برهان ، النتائج التالية المعطاة على شكل جدول.

أ- نهاية المجموع :

إذا كانت : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	وكانت : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	فإن : $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	حالة عدم التعيين

ب- نهاية الجداء :

إذا كانت : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	وكانت : $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	فإن : $\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell \times \ell'$
$\ell \; (\ell > 0)$	$+\infty$	$+\infty$
$\ell \; (\ell < 0)$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$ أو $-\infty$	حالة عدم التعيين

جـ - نهاية المقلوب :

إذا كانت : $\lim_{x \to x_0} f(x)$	فإن $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$
ℓ	$\frac{1}{\ell}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
$0\ ;\ (f(x) > 0)$	$+\infty$
$0\ ;\ (f(x) < 0)$	$-\infty$
0	حالة عدم التعيين

د - نهاية حاصل القسمة :

لحساب : $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ نكتب :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x) \times \frac{1}{g(x)}$$

ثم نستعمل المبرهنات المتعلقة بالضرب و بالمقلوب

هـ - نهاية الدالة الجذر التربيعي :

f دالة عددية موجبة و ℓ عدد حقيقي موجب

إذا كانت : $\lim_{x \to x_0} f(x)$	فإن $\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)}$
ℓ	$\sqrt{\ell}$
$+\infty$	$+\infty$

د - نهاية مركب دالتان عدديتان :

a , b , c أعداد حقيقية . إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = b$

وكانت $\lim_{x\to b} g(x) = c$ فإن : $\lim_{x\to a} (gof)(x) = c$

ملاحظة :

تبقى المبرهنات السابقة صحيحة من أجل

$x \longrightarrow +\infty$ أو $x \longrightarrow -\infty$.

4- النهايات بالمقارنة :

f , g , h دوال عددية لمتغير حقيقي x معرفة على مجموعة I .

مبرهنة 1: (الحد من الأسفل)

إذا كان من أجل كل عنصر x من I : $g(x) \le f(x)$

وكانت $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

مبرهنة 2: (الحد من الأعلى)

إذا كان من أجل كل عنصر x من I : $f(x) \le g(x)$

وكانت $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

مبرهنة 3 : (الحصر)

إذا كان من أجل كل عنصر x من I : $g(x) \le f(x) \le h(x)$

وكانت $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$ فإن : $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$

ملاحظة :

تبقى المبرهنات السابقة صحيحة من أجل $x \to +\infty$ أو $x \to -\infty$.

5- نهاية بعض الدوال المألوفة :

أ- الدالة كثيرة الحدود :

نهاية كثيرة حدود عند $(+\infty)$ أو عند $(-\infty)$ هي نهاية حده الأعلى درجة عند $(+\infty)$ أو عند $(-\infty)$.

ب- الدالة الناطقة :

نهاية دالة ناطقة عند $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ هي نهاية حاصل قسمة الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام .

6- النهايات و السلوك التقاربي :

أ- الفرع اللانهائي :

(C) التمثيل البياني لدالة f في مستو مزود بمعلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

$M(x ; y)$ نقطة متغيرة من (C).

عندما يمكننا جعل $|x|$ أو $|y|$ كبير جدا بالقدر الذي نريده نقول إن للمنحنى (C) فرعا لانهائيا .

ب- المستقيمات المقاربة و الفروع المكافئة :

α) إذا كانت : $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ فإن :

التمثيل البياني (C) للدالة f يقبل مستقيما مقاربا معادلته: $x = x_0$.

β) إذا كانت : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ أو $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$

فإن التمثيل البياني (C) للدالة f يقبل مستقيما مقاربا معادلته :

$y = y_0$.

γ) إذا كانت $\left|\lim_{x \to +\infty} f(x)\right| = +\infty$ أو $\left|\lim_{x \to -\infty} f(x)\right| = +\infty$

نحسب : $\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

- إذا كانت $\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$: (C) يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور الفواصل.
- إذا كانت $\left|\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x}\right| = +\infty$: (C) يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور التراتيب .
- إذا كانت $\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\left|\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - ax]\right| = +\infty$

حيث a عدد حقيقي ثابت فإن :

(C) يقبل فرعا مكافئا باتجاه المستقيم الذي معادلته : $y = ax$.

- إذا كانت $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ و $\left| \lim\limits_{|x| \to +\infty} \left[f(x) - ax \right] \right| = b$

حيث a وb عددان حقيقيان فإن :

(C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته : $y = ax + b$.

ملاحظة :

f دالة عددية (C) تمثيلها البياني في معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

(Δ) مستقيم معادلته : $y = ax + b$ يكون (Δ) مستقيما مائلا للمنحنى (C) إذا

وفقط إذا كان : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \left[f(x) - (ax + b) \right] = 0$

II- الاستمرارية :

1- استمرارية دالة عند قيمة x_0 .

f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I يشمل x_0 وغير خال. تكون الدالة f مستمرة عند x_0 إذا

وفقط إذا كانت : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

أمثلة :

- الدالة f : $x \mapsto x - 4$ مستمرة عند 4 .

لأن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ولدينا : $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 0 = f(4)$

- الدالة : $x \mapsto \sqrt{x}$ غير مستمرة عند 0 لأنها غير معرفة على

مجال مفتوح يشمل 0 . حيث أنها معرفة على $[0 ; +\infty[$.

- دالة الجزء الصحيح : $x \mapsto [x]$

وهي الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي جزءه الصحيح

فمثلا : $[0,5] = 0$, $[1,78] = 1$, $[-3,5] = -4$

أي أن : $[x]$ يرمز إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

هذه الدالة غير مستمرة عند العدد 4 مثلا .

إذن إن من أجل : $x \in [3 ; 4[$ فإن : $[x] = 3$

من أجل : $x \in [4 ; 5[$ فإن : $[x] = 4$

وعليه : $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} [x] = 3$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x>4}} [x] = 4$

ومنه نهاية الدالة $[x] \mapsto x$ عندما يتناهى x نحو 4 غير موجودة

لأنها غير وحيدة .

2- استمرارية دالة عند عدد x_0 من اليمين

f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $[x_0 ; x_0 + a[$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما.

تكون الدالة f مستمرة عند x_0 من اليمين إذا وفقط إذا كانت : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$

3- استمرارية دالة عند عدد x_0 من اليسار :

f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل : $]x_0 - a ; x_0]$

حيث a عدد حقيقي موجب تماما.

تكون الدالة f مستمرة عند x_0 من اليسار إذا وفقط إذا كانت :

$$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$$

أمثلة :

- الدالة $\sqrt{x} \mapsto x$ مستمرة عند 0 من اليمين لأنها معرفة على $[0 ; +\infty[$ و

$$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0 = f(0)$$

- الدالة $x \mapsto \sqrt{5-x}$ مستمرة عند 5 من اليسار لأنها معرفة على $]-\infty ; 5]$ و

$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x) = 0 = f(5)$$

- دالة الجزء الصحيح : $x \mapsto [x]$ مستمرة عند 4 من اليمين لأنها معرفة على المجال $[4 ; 5[$ مثلا و $\lim_{\substack{x \to 4 \\ x>4}} [x] = [4] = 4$

- الدالة f : $x \mapsto |x|$ مستمرة عند العدد 0 من اليمين وعند العدد 0 من اليسار لأن : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0 = |0| = f(0)$

و كذلك : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (-x) = 0 = |0| = f(0)$

ملاحظات :

- إذا كانت f مستمرة عند x_0 فإن : $x_0 \in D_f$
- تكون الدالة f مستمرة عند عدد x_0 إذا وفقط إذا كانت مستمرة عند x_0 على اليمين و على اليسار.

4- استمرارية دالة على مجال :

I مجال مفتوح من الشكل : $]a ; b[$ أو $]-\infty ; b[$ أو $]a ; +\infty[$.

f دالة عددية معرفة على I .

- تكون الدالة f مستمرة على I إذا وفقط إذا كانت مستمرة عند كل قيمة x_0 من I .
- تكون الدالة f مستمرة على المجال المغلق $[a ; b]$ إذا وفقط إذا كانت :
  - مستمرة على المجال المفتوح $]a ; b[$
  - مستمرة عند a على اليمين
  - مستمرة عند b على اليسار
- تكون الدالة f مستمرة على المجال $[a ; b[$ إذا وفقط إذا كانت مستمرة على $]a ; b[$ و كانت مستمرة عند a على اليمين .

- تكون الدالة f مستمرة على المجال $]a\ ;\ b]$ إذا وفقط إذا كانت مستمرة على $]a\ ;\ b[$ و كانت مستمرة عند b على اليسار .

أمثلة :

1) الدالة : $x \mapsto x - 1$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

2) الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.

3) الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على $[0\ ;\ +\infty[$

4) الدالة $x \mapsto |x|$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

ملاحظات :

1) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن : $I \subset D_f$.

2) إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a\ ;\ b]$ فإن تمثيلها البياني هو خط غير منقطع ، بدايته النقطة ذات الفاصلة a و نهايته النقطة ذات الفاصلة b.

5- تمديد دالة بالاستمرار :

x_0 عدد حقيقي. I مجال من $\mathbb{R}$ يشمل x_0 .

f دالة عددية معرفة عند x_0 و مستمرة عند كل قيمة من $I - \{x_0\}$.

إذا قبلت الدالة f نهاية ℓ عند x_0 فإن الدالة g المعرفة كما يلي :

من أجل $x \in I - \{x_0\}$: $g(x) = f(x)$ و $g(x_0) = \ell$

تسمى امتداد الدالة f بالاستمرار عند x_0 .

مثال :

الدالة g المعرفة بالعبارة :

من أجل $x \neq 0$: $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ؛ $g(0) = 1$

هي امتداد للدالة f حيث : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ بالاستمرار عند 0 .

6- مبرهنات على الدوال المستمرة :

- f وg دالتان عدديتان ، ℓ عدد حقيقي .

إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ وكانت g مستمرة عند ℓ فإن :

$\lim\limits_{x\to x_0} g\left[f(x)\right]=g(\ell)$.

- f و g دالتان . إذا كانت f مستمرة عند عدد x_0 و كانت g مستمرة عند $f(x_0)$ فإن الدالة المركبة gof تكون مستمرة عند x_0 .
- f وg دالتان مستمرتان عند x_0 و λ عدد حقيقي .

الدوال التالية : $f+g$; $f\times g$; λf مستمرة عند x_0 وإذا كانت $g(x_0)\neq 0$ فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ مستمرتان عند x_0 .

نتائج :

- الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$.
- كل دالة ناطقة مستمرة عند كل قيمة من مجموعة تعريفها.
- الدالتان : $x\mapsto \cos(ax+b)$ و $x\mapsto \sin(ax+b)$

حيث a و b عددان حقيقيان ، مستمرتان على $\mathbb{R}$.

- الدالة $x\mapsto \tan x$ مستمرة عند كل قيمة x_0 تختلف عن :

$\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$.

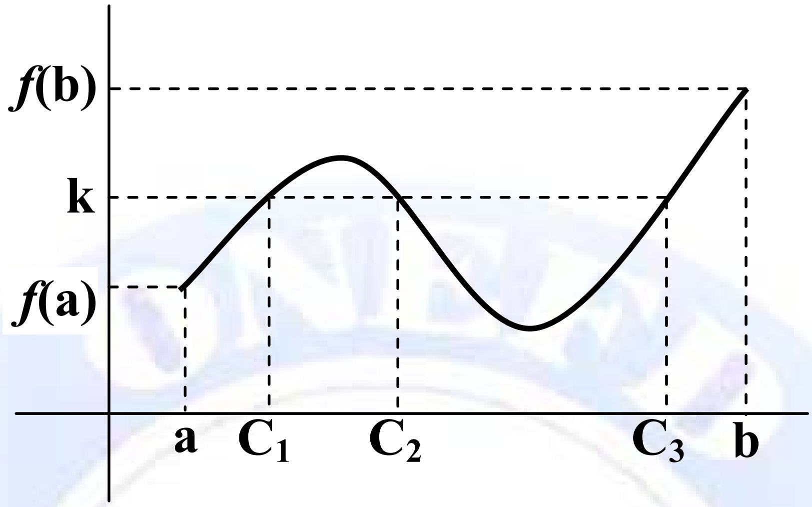
7- مبرهنة القيم المتوسطة :

- **مبرهنة 1 :**

نقبل بدون برهان المبرهنة التالية :

إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $[a\ ;\ b]$ فإنه من أجل كل عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد عدد c محصور بين a و b بحيث : $f(c)=k$.

في الشكل أدناه توجد ثلاثة أعداد C_3 , C_2 , C_1 محصورة بين a و b بحيث : $f(C_1)=f(C_2)=f(C_3)=k$



مبرهنة 2 :

إذا كانت الدالة f في المبرهنة (1) رتيبة تماما فإن العدد C وحيد.

البرهان :

بما أن f رتيبة تماما على المجال $[a ; b]$ فإنه من أجل كل عددان x_1 و x_2 من $[a ; b]$ بحيث إذا كان $x_1 < x_2$ فإن $f(x_1) < f(x_2)$

فإذا كان C_2 , C_1 عددان حيث $C_1 < C_2$ فإن: $f(C_1) < f(C_2)$ أي أن $f(C_2) \neq f(C_1)$ وعليه يوجد عدد وحيد c بحيث : $f(C) = k$.

مبرهنة 3 :

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a ; b[$ أو $[a ; +\infty[$ فإنه من أجل كل عدد k محصور بين $f(a)$ و $\lim_{x \to b} f(x)$ (أو $\lim_{x \to +\infty} f(x)$) فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا C في المجال $[a ; +\infty[$.

مبرهنة 4 :

إذا كانت الدالة f مستمرة على $[a ; b]$ و كانت $f(a).f(b) < 0$ فإنه يوجد على الأقل ، عدد حقيقي C من المجال $]a ; b[$ بحيث $f(C) = 0$. و إذا كانت f رتيبة تماما أيضا فإن العدد C وحيد.

مثال :

أثبت أن المعادلة : $x^3+x-1=0$ تقبل حلا في المجال $\left]\frac{1}{2}\,;1\right[$.

الحل :

نعرف دالة f كما يلي : $f(x)=x^3+x-1$.

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة حدود وعليه فهي مستمرة على $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

$f(1)=1$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$ وعليه : $f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(1)<0$

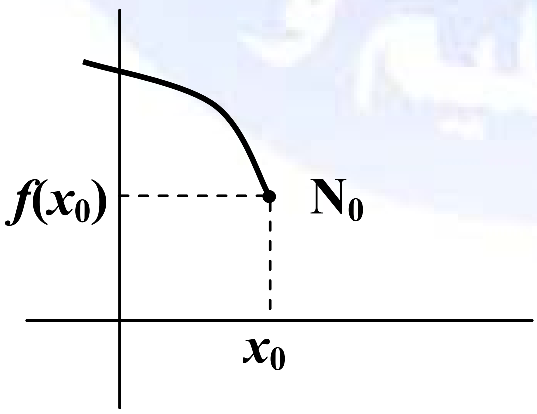
وبالتالي حسب المبرهنة (4) يوجد على الأقل عدد c في المجال $\left]\frac{1}{2}\,;1\right[$ بحيث :

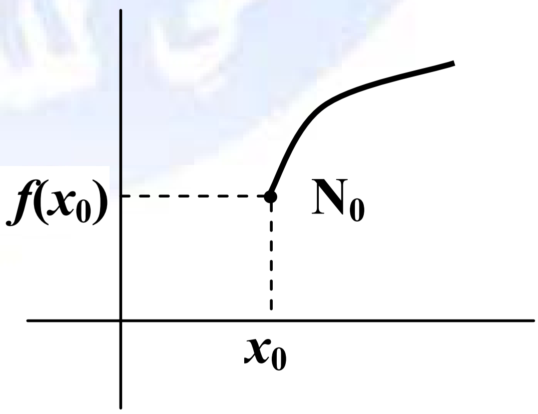
$f(c)=0$ ومنه للمعادلة $x^3+x-1=0$ حل على الأقل في المجال

$\left]\frac{1}{2}\,;1\right[$.

نقطة التوقف :

إذا كانت الدالة f مستمرة في x_0 على اليمين فقط (أو على اليسار فقط) نقول إن النقطة N_0 ذات الفاصلة x_0 نقطة توقف.





تكنولوجيا الإعلام و الاتصال

التطبيق 1 :

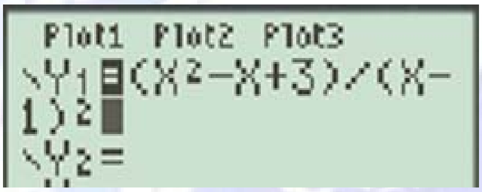
نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{x^2-x+3}{(x-1)^2}$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$

كيف يمكن تخمين هذه النتيجة باستعمال آلة بيانية

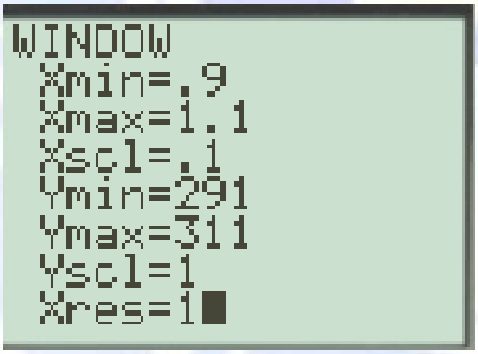
الحل :

1) ننقر على الزر : Y= ونكتب عبارة الدالة كما يظهر على الصورة:



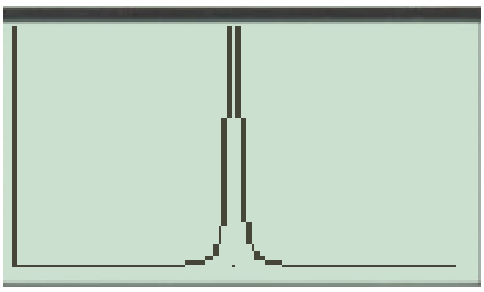
2) ننقر على الزر WINDOW وندخل الأرقام كما يظهر على الصورة :

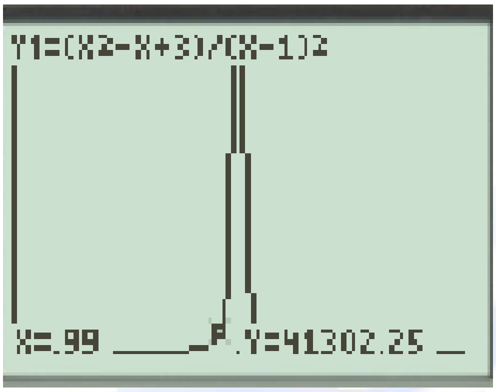
لأن x يتناهى نحو 1 أما قيم $f(x)$ فهي محصورة بين $f(0,9)$ و $f(1,1)$ أي بين 291 و 311 .



3) ننقر على الزر ZOOM ثم نختار ZoomFit كما يظهر على الصورة .

4) ننقر على GRAPH فنحصل على التمثيل البياني المقابل :





5)ننقرعلى TRACE نقوم بتحريك نقطة من البيان باستعمال الزالقة حتى نحصل على النقطة ذات الفاصلة 0,99 ونجد:

$$f(0,99)=41302,25$$

وهذا يدل على أن المخمنة التالية صحيحة

$$\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$$

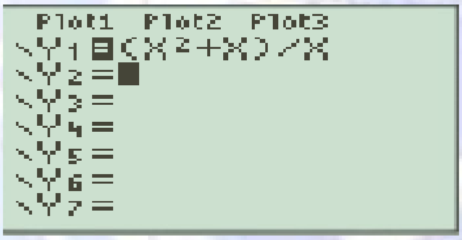
التطبيق 2:

باستعمال آلة بيانية ماهو تخمينك حول :

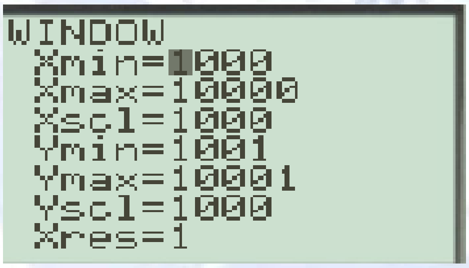
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+x}{x}=+\infty$$

الحل :

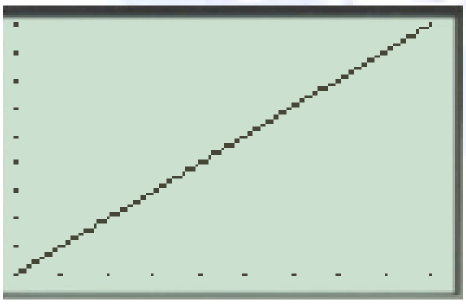
1) ننقر على الزر: Y= ونكتب عبارة الدالة كما يلي:



2) ننقر على الزر: WINDOW وندخل القيم التالية كما يظهر على الشاشة :



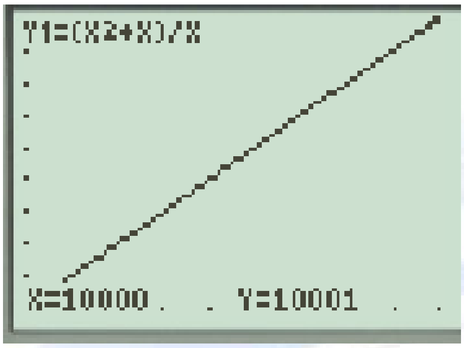
3) ننقر على الزر: GRAPH فيظهر التمثيل البياني التالي :



4)ننقر على الزر 

ثم نحرك نقطة من البيان باستعمال الزالقة فنجد :

$f(10000) = 10001$



وبالتالي المخمنة التالية صحيحة : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x}{x} = +\infty$.

التطبيق 3 :

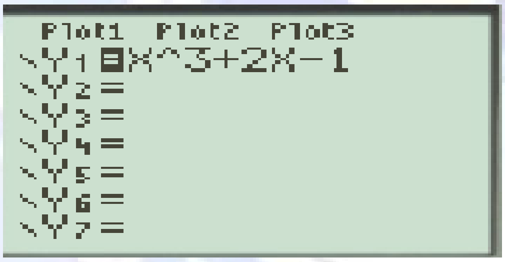
بين أن المعادلة : $x^3 + 2x - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left] \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{4} \right[$.

الحل :

1) ننقر على الزر: 

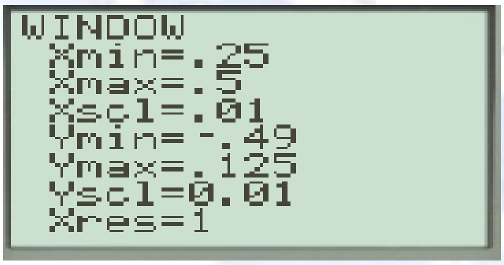
ونكتب عبارة الدالة f المعرفة كما يلي :

$f(x) = x^3 + 2x - 1$.



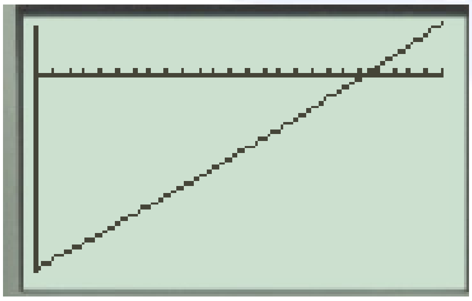
2) ننقر على الزر 

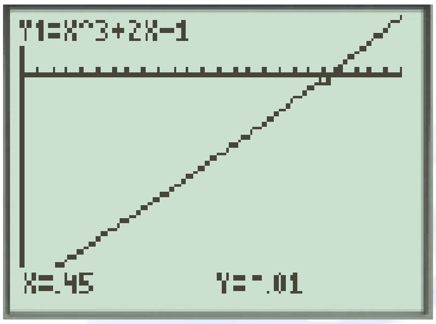
وندخل الأرقام كما يلي :

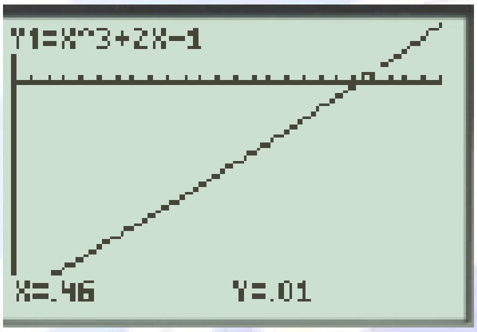


3) ننقر على الزر 

فيظهر التمثيل البياني الآتي :







4) نقوم بتحريك نقطة من البيان باستعمال

الزر TRACE إلى أن تتغير إشارة $f(x)$

فمن أن أجل : $0,45$ نجد: $f(x) = -0,01$

ومن أجل $0,46$ نجد $f(x) = 0,01$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد x_0

يحقق : $0,45 < x_0 < 0,46$

تمـارين و مشكلات

التمرين 1 :

أذكر صحة أم خطأ الجمل الآتية مع التعليل

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 3} = 2$

3) إذا كانت $f(x) = ax + b + g(x)$ فإن : $y = ax + b$

معادلة مستقيم مقارب مائل لبيان الدالة f.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 4x - 1}{x^2 + 3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$

5) إذا كانت : $-\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

6) إذا كانت : $f(x) \geq x^2$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

7) إذا كانت : $f(x) \leq x - 1$ فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

8) الدالة $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

9) الدالة $f : x \mapsto x + \sqrt{x}$ مستمرة على $[0 ; +\infty[$

10) الدالة $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$ مستمرة على $[0 ; +\infty[$

11) الدالة $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4}$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

12) إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال $[a ; b]$ فإن المعادلة
$f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a ; b[$.

13) إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[1 ; 5]$ فإن الدالة f مستمرة
عند 3 .

14) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن الدالة $\dfrac{1}{f}$ مستمرة
على المجال I .

15) إذا كانت الدالة f سالبة تماما على مجال I فإن الدالة f متناقصة
تماما على I .

16) إذا كانت الدالة f غير مستمرة عند عدد x_0 فإنها غير معرفة
عند x_0 .

17) إذا كانت الدالة f معرفة عند عدد x_0 فإنها غير مستمرة عند x_0 .

18) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن الدالة $\sqrt{f}$ مستمرة
على المجال I .

19) الدالة $\sqrt{f}$ مستمرة على I .

20) الدالة : $\sqrt{x^2 - 1}$ $x \mapsto$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأن :

الدالة $x^2 - 1$ $x \mapsto$ مستمرة على $\mathbb{R}$

و الدالة $\sqrt{x}$ $x \mapsto$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

19) الدالة : $\sqrt{x^2 - 1}$ $x \mapsto$ مستمرة على $\mathbb{R}$

لأن الدالة $x^2 - 1$ $x \mapsto$ مستمرة على $\mathbb{R}$

و الدالة $\sqrt{x}$ $x \mapsto$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

20) المعادلة $x \sin x = 1$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

التمرين2

عين مجموعة تعريف كل دالة فيما يلي ثم احسب النهايات عند أطرافها.

1) $f(x) = \dfrac{3x^3 + x - 4}{x - 1}$ 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

3) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3}$ 4) $f(x) = \dfrac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3}$

التمرين3

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{2x - 4}}$ 2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x - 2}}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2x - 1}}{x - 1}$ 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$

التمرين4

احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2+1}}{x - \sqrt{4x^2+x}}$

2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x + \sqrt{4x^2 + x + 1}}{-4x - \sqrt{x^2 + 1}}$

3) $\lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2 + 1} - x\right]$

4) $\lim_{x\to+\infty} -x + \sqrt{x}$

5) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2}$

6) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{-x - \sqrt{x^2 + 4}}$

التمرين5

احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 3x}$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\tan x}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1 - \cos x}$

التمرين6

احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$

2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x}$

3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x}$

التمرين7

تعتبر الدالة f :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 4}{x + 1}$$

(C) تمثيلها البياني .

1- عين مجموعة تعريف الدالة ثم أحسب النهايات عند أطرافها.

2- بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b} + \frac{\mathrm{c}}{x+1}$$

حيث a و b وc أعداد حقيقية يطلب تعيينها

3- عين معادلات المستقيمات المقاربة.

4- نفرض (Δ) المستقيم المقارب المائل.

ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) و المستقيم (Δ).

التمرين8

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = 2x + \sqrt{x^2+1}$

1- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2- احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - 3x\right]$ ثم $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - x\right]$

3- عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

التمرين9

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \dfrac{4+\sin x}{x^2}$

1- عين عددان حقيقيان a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\mathrm{a} \leq 4 + \sin x \leq \mathrm{b}$$

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون :

$\mathrm{v}(x) \leq f(x) \leq \mathrm{u}(x)$ حيث u و v دالتان يطلب تعيينهما.

3- استنتج النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

4- أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

التمرين 10

f دالة معرفة بالعبارة :
$$f(x)=\frac{(\alpha-1)x+1}{(\alpha^2-1)x-3}$$

حيث α عدد حقيقي .

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

التمرين 11

f دالة عددية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1} & ; \quad x\neq 1 \quad , \quad x\neq -1 \\ f(-1)=3 \end{cases}$$

1- عين مجموعة تعريف الدالة f

2- ادرس استمرارية f عند 1- .

التمرين 12

f دالة معرفة كمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1} & , \quad x\geq 1 \\ f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+1 & , \quad x<1 \end{cases}$$

أدرس استمرارية الدالة f على $\mathbb{R}$.

التمرين 13 .

f دالة معرفة كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{ax + b}{x^2 + 4} & , \ x > 0 \\ f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} & , \ x \leq 0 \end{cases}$$

عين العدد الحقيقي b بحيث تكون الدالة f مستمرة عند 0

التمرين 14 .

f دالة معرفة بجدول تغيراتها كما يلي :

x	$-\infty$		-3		-2		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+4$	↘	3

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$.

التمرين 15 .

f دالة معرفة بالعبارة :

$$\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{|x - 1|}{x - 1} & ; \ x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

1- عين مجموعة التعريف

2- أدرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها

التمرين 16 .

إليك جدول التغيرات لدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$			4		
	-4	↗		↘	-2

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ في $\mathbb{R}$.

التمرين 17 .

f دالة معرفة على المجال $[1 ; +\infty[$ بالعبارة :

$$f(x) = -x + \sqrt{x-1} + 0,9$$

أنشئ التمثيل البياني للدالة f باستعمال آلة بيانية .ثم استنتج عدد حلول المعادلة : $f(x) = 0$

مع إعطاء حصرا لكل منها بتقريب 10^{-2}

التمرين 18 .

أثبت أن المعادلة : $2x - cosx = 0$

تقبل على الأقل حلا في المجال : $\left]0 ; \frac{\pi}{6}\right[$

التمرين 19 .

f دالة معرفة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x \cdot \sin x}{1 - cosx} , x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

1- ادرس استمرارية الدالة f عند 0

2- ادرس استمرارية f على مجموعة التعريف .

التمرين 20 .

f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[0 ; 1]$ ز تأخذ قيمها في المجال $[0 ; 1]$.

1- برهن على وجود عدد α من المجال $[0 ; 1]$ بحيث :

$f(\alpha) = \alpha$.

2- فسر هندسيا هذه النتيجة .

3- هل تبقى النتائج السابقة صحيحة على مجال $[a ; b]$ حيث $a < b$.

التمرين 21 .

1- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2 - 13x + 36 = 0$

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^6 - 13x^3 + 36 = 0$

3- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^{2n} - 13x^4 + 36 = 0$

التمرين 22 .

برهن أن كل كثير حدود درجته فردية ينعدم على الأقل مرة في $\mathbb{R}$.

الحـــــــلـــول

التمرين 1 .

1) صحيحة لأن $-x \longrightarrow +\infty$ لما $x \longrightarrow -\infty$ وعليه :

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{-x} = +\infty$$

2) صحيحة لأن :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} = 2$$

3) خاطئة لأننا لا نعلم $\lim_{|x|\to+\infty} g(x)$ التي يجب أن تكون معدومة لكي تكون الجملة صحيحة .

4) خاطئة لأن x يؤول إلى 0 و ليس إلى $+\infty$ أو $-\infty$

5) صحيحة لأن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$

6) صحيحة لأن : $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ و لدينا : $f(x) \geq x^2$

7) صحيحة لأن : $\lim_{x\to-\infty}(x - 3) = -\infty$ و $f(x) \leq x - 3$

8) خاطئة لأن الدالة f غير معرفة عند 0 وعليه فهي غير معرفة على $\mathbb{R}$ ومن ثم غير مستمرة على $\mathbb{R}$.

9) صحيحة لأن الدالة هي مجموع دالتين مستمرتان على $[0; +\infty[$ هما : $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto x$

10) خاطئة لأن الدالة غير معرفة عند 0 .

11) صحيحة لأن الدالة هي مركب دالتين مستمرتان

الأولى : $x \mapsto x^2 + 4$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و موجبة

الثانية : $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على $\mathbb{R}_+$.

12) خاطئة فمثلا الدالة f : $x \mapsto x^2 - 1$ مستمرة على المجال

[2 ؛ 4] لكن المعادلة $x^2 - 1 = 0$ ليس لها حل في المجال

$]2 ; 4[$ و حتى تقبل حل أكيد يجب أن يكون $f(a).f(b) < 0$.

13) صحيحة لأن الدالة f مستمرة عند كل قيمة من المجال $]1 ; 5[$.

14) خاطئة إلا إذا كانت f غير معدومة على I .

15) خاطئة . فمثلا الدالة f : $x \mapsto -x^2 - 1$ سالبة تماما على $\mathbb{R}$

لكن غير متناقصة تماما لأن : $f'(x) = -2x$ وعليه فهي

متناقصة تماما من أجل $x > 0$ و متزايدة تماما من أجل $x < 0$.

16) خاطئة . فمثلا الدالة f حيث :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \quad ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

معرفة عند 1 $\left(f(1) = 3\right)$ لكنها غير مستمرة عند 1 لكون :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

17) صحيحة . لأنه حتى تكون دالة مستمرة عند x_0 يجب أن تكون :

معرفة عند x_0 وتحقق $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

18) خاطئة لأنه قد تكون f سالبة و عليه فالدالة $\sqrt{f}$ غير معرفة.

19) خاطئة إلا إذا كانت $x^2 - 1 > 0$ وهذا غير محقق في $\mathbb{R}$.

20) صحيحة لأن الدالة f حيث : $f(x) = x \sin x$ مستمرة

على $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ و $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right] \ni 1$.

التمرين 2 .

1) لدينا : $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{x - 1}$

- $D_f = \left]-\infty\ ;\ 1\right[\cup \left]1\ ;\ +\infty\right[$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{3x^2 + x - 4}{x - 1}$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{(x - 1)(3x + 4)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (3x + 4) = 7$$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (3x + 4) = 7$

2) لدينا : $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

- $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}\ :\ x^2 - 5x + 6 \neq 0\right\}$

نحل المعادلة : $x^2 - 5x + 6 = 0$ فنجد : $x = 2$ أو $x = 3$

ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{2\ ;\ 3\}$

أي : $D_f =]-\infty\ ;\ 2[\ \cup\ ]2\ ;\ 3[\ \cup\ ]3\ ;\ +\infty[$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

لحساب بقية النهايات : نكتب جدول إشارة المقام

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	-	0	+	

- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}$

$$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \dfrac{x+2}{x-3} = -4$$

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \dfrac{x+2}{x-3} = -4$
- $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$

لأن : $\begin{cases} x^2 - 4 \longrightarrow 5 \\ x^2 - 5x + 6 \overset{<}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = +\infty$

لأن :
$$\begin{cases} x^2 - 4 \longrightarrow 5 \\ x^2 - 5x + 6 \xrightarrow{>} 0 \end{cases}$$

3) لدينا :
$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3}$$

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x + 3 \neq 0\}$

نحل المعادلة $x^2 + 4x + 3 = 0$ فنجد $x = -1$ أو $x = -3$

إذن : $D_f = \mathbb{R} - \{-3 \, ; -1\}$

وعليه : $D_f =]-\infty \, ; -3[\cup]-3 \, ; -1[\cup]-1 \, ; +\infty[$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x\to-3 \\ <,\,>}} f(x) = \lim\limits_{x\to-3} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3}$

$$= \lim_{x\to-3} \frac{(x + 3)(x^2 - 4)}{(x + 3)(x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to-3} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \frac{-5}{2}$$

إشارة المقام لحساب النهايات :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$3x^2+4x+3$		+	0	-	0	+	

- $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} = +\infty$

لأن :
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \longrightarrow -6 \\ x^2 + 4x + 3 \xrightarrow{<} 0 \end{cases}$$

- $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} = -\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \longrightarrow -6 \\ x^2 + 4x + 3 \xrightarrow{>} 0 \end{cases}$$

4) لدينا :
$$f(x) = \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3}$$

- $$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 4x - 3 \neq 0\}$$

نحل المعادلة : $4x^2 - 4x - 3 = 0$ نجد : $x = -\frac{1}{2}$ أو $x = \frac{3}{2}$

و منه :
$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right\}$$

أي :
$$D_f = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$$

- $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^4}{4x^2} = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

- $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^4}{4x^2} = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

- $$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)(2x^3+1)}{(2x+1)(2x-3)}$$

$$= \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x^3 + 1}{2x - 3} = \frac{\frac{3}{4}}{-4} = \frac{-3}{16}$$

- $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^{<}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^{<}} \dfrac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} = -\infty$

لأن :
$$\begin{cases} 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \longrightarrow 41 \\ 4x^2 - 4x - 3 \overset{<}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$4x^2-4x-3$	+	0	-	0	+

- $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^{>}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^{>}} \dfrac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} = +\infty$

لأن :
$$\begin{cases} 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \longrightarrow 41 \\ 4x^2 - 4x - 3 \overset{>}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

التمرين 3 .

حساب النهايات :

1) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{2x-4}}$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\left(\sqrt{x+5} - 3\right)\left(\sqrt{x+5} + 3\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}\right)}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{2x-4}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}\right)\left(\sqrt{x+5} + 3\right)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x + 5 - 9)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}\right)}{[x - (2x-4)]\left(\sqrt{x+5} + 3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x - 4)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2x - 4}\right)}{-(x - 4)\left(\sqrt{x + 5} + 3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2x - 4}}{-\left(\sqrt{x + 5} + 3\right)} = \frac{2 + 2}{-(3 + 3)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

2) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x - 2}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2 + x - 6)\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x - 2}\,.\,\sqrt{x - 2}}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x + 3)\sqrt{x - 2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2} (x + 3)\sqrt{x - 2} = 0$$

3) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x - 1}}{x - 1} = \lim_{x\to} \frac{\left[\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}\right]\left[\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}\right]}{(x - 1)\left[\sqrt{x} + \sqrt{2x - 1}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x - (2x - 1)}{(x - 1)\left[\sqrt{x} + \sqrt{2x - 1}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x - 1)}{(x - 1)\left[\sqrt{x} + \sqrt{2x - 1}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{2x - 1}} = -\frac{1}{2}$$

4) $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left[\sqrt{x+1} + 1\right]}{\left[\sqrt{x+1} - 1\right]\left[\sqrt{x+1} + 1\right]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]}{(x+1)-1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \sqrt{x+1}+1 = 2$$

التمرين 4 .

حساب النهايات :

$$1)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2+1}}{x - \sqrt{4x^2+x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x - \sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x - \sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x - x\sqrt{4+\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right]}{x\left[1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x}}} = \frac{2 - 1}{1 - 2} = -1$$

$$2)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{-x + \sqrt{4x^2 + x + 1}}{-4x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2\left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{-4x - \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2}\ \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4x - \sqrt{x^2}\ \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x + |x|\ \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4x - |x|\ \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x - x\ \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4x + x\ \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left[-1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right]}{x\left[-4 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right]}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1 - \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-4 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1 - 2}{-4 + 1} = 1$$

3) $$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+1} - x\right]\left[\sqrt{x^2+1} + x\right]}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

4) $$\lim_{x \to +\infty} \left[-x + \sqrt{x}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[-\sqrt{x} \,.\, \sqrt{x} + \sqrt{x}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(-\sqrt{x} + 1\right) = -\infty$$

5) $$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2}\right]\left[\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2}\right]}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2+1) - (x^2+2)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}} = 0$$

$$6)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{-x-\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5\left(-x+\sqrt{x^2+4}\right)}{\left[-x-\sqrt{x^2+4}\right]\left[-x+\sqrt{x^2+4}\right]}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{5\left(-x+\sqrt{x^2+4}\right)}{x^2-(x^2+4)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-5}{4}\left[-x+\sqrt{x^2+4}\right] = -\infty$$

التمرين 5 .

حساب النهايات :

$$1)\ \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{\sin 3x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{3\ .\ \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1}{3}$$

$$2)\ \lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to0} 2 \times \frac{\sin 2x}{2x} = 2$$

$$3)\ \lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{\tan x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{\frac{\sin x}{cosx}} = \lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{\sin x} \times cosx$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2.\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin x}{x}} \times cosx = 2$$

$$4)\ \lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{x}{2}\ cos\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\ \sin^2 \frac{x}{2}}{4\ \sin^2 \frac{x}{2}\ cos^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\ cos\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$5)\ \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1 - cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ .\ 2\ \sin\frac{x}{2}\ \cos\frac{x}{2}}{1-\left(1 - 2\ \sin\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\ \sin\frac{x}{2}\ cos\frac{x}{2}}{2\ \sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{xcos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\ .\ \frac{x}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\,cos\,\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = 2$$

التمرين 6 .

حساب النهايات :

$$1)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

بوضع : $x - \frac{\pi}{2} = z$ أي $x = \frac{\pi}{2} + z$

لما $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ فإن : $z \longrightarrow 0$ وعليه :

$$\lim_{x\to 0} \frac{cos3x}{cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{cos3\left(\frac{\pi}{2} + z\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3z\right)}{-\sin z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{cos\frac{3\pi}{2}\,cos3z - \sin\frac{3\pi}{2}\,\sin 3z}{-\sin z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\sin 3z}{-\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{3.\frac{\sin 3z}{3z}}{-\frac{\sin z}{z}} = -3$$

$$2)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\cos 4x}$$

بوضع $x - \frac{\pi}{4} = z$ أي $x = \frac{\pi}{4} + z$

لما $x \longrightarrow \frac{\pi}{4}$ فإن : $z \longrightarrow 0$ وعليه

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\cos 4x} = \lim_{z\to 0} \frac{1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+z\right)}{1+\cos 4\left(\frac{\pi}{4}+z\right)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-2\left[\sin\frac{\pi}{4}\ \cos z + \cos\frac{\pi}{4}\ \sin z\right]^2}{1+\cos\left(\pi+4z\right)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin z\right)^2}{1-\cos 4z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-2\times\frac{1}{2}\left(\cos z+\sin z\right)^2}{1-\cos 4z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-\left(\cos^2 z+\sin^2 z+2\sin z\ \cos z\right)}{1-\cos 4z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-\left(1+2\sin z\ \cos z\right)}{1-\cos 4z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z\ .\ \cos z}{1-\cos 4z} = \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z\ .\ \cos z}{1-\left(1-2\sin^2 2z\right)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-2\ \sin z\ .\ \cos z}{2\ \sin^2 2z} = \lim_{z\to 0} \frac{-\ \sin z\ .\ \cos z}{\left(2\ \sin z\ .\ \cos z\right)^2}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-\ \sin z\ .\ \cos z}{4\ \sin^2 z\ .\ \cos^2 z} = \lim_{z\to 0} \frac{-1}{4\ \sin z\ .\ \cos z}$$

وعليه :

- $$\lim_{x \overset{>}{\to} \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\ \sin^2 x}{1 + \cos 4x} = \lim_{z \overset{>}{\to} 0} \frac{-1}{4\ \sin z\ .\ \cos z} = -\infty$$
- $$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\ \sin^2 x}{1 + \cos 4x} = \lim_{z \overset{<}{\to} 0} \frac{-1}{4\ \sin z\ .\ \cos z} = +\infty$$

3) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x}$$

بوضع $x - \frac{\pi}{2} = z$ نجد : $x = \frac{\pi}{2} + z$

وعليه : لما $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ فإن : $z \longrightarrow 0$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\ \sin x - \cos x}{1-\ \sin x + \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)}{1-\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos z + \sin z}{1-\cos z - \sin z} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sin\left(1-\ 2\sin^2 \frac{z}{2}\right) + 2\sin \frac{z}{2}\ \cos \frac{z}{2}}{1-\left(1-\ 2\sin^2 \frac{z}{2}\right) - 2\sin \frac{z}{2}\ \cos \frac{z}{2}}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{z}{2} + 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{2\sin^2 \frac{z}{2} - 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{2\sin\frac{z}{2}\left[\sin\frac{z}{2} + \cos\frac{z}{2}\right]}{2\sin\frac{z}{2}\left[\sin\frac{z}{2} - \cos\frac{z}{2}\right]}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\sin\frac{z}{2} + \cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2} - \cos\frac{z}{2}} = \frac{1}{-1} = -1$$

التمرين 7 .

1- مجموعة التعريف :

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} \quad ; \quad D_f =]-\infty\, ; -1[\cup]-1\, ; +\infty[$$

- النهايات :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to -1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to -1}} \frac{x^2 + x - 4}{x + 1} = +\infty$$

لأن :

$$\begin{cases} x^2 + x - 4 \longrightarrow -4 \\ x + 1 \xrightarrow{<} 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to -1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to -1}} \frac{x^2 + x - 4}{x + 1} = -\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} x^2 + x - 4 \longrightarrow -4 \\ x + 1 \overset{>}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

2) تبيان أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

إذن : $$f(x) = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$$

ومنه : $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ b + c = -4 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$

إذن : $$f(x) = x - \frac{4}{x+1}$$

3- تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

بما أن : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = +\infty$

فإن : $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب.

و بما أن : $f(x) = x - \frac{4}{x+1}$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4}{x+1} = 0$

فإن : $y = x$ معادلة المستقيم المقارب المائل عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

4- دراسة الوضع النسبي لـ (Δ) و (C) :

$$f(x) - y = \frac{-4}{x+1}$$

ومنه :

x	$-\infty$ -1 $+\infty$	
$x+1$	-	+
$f(x)-y$	+	-

إذن (Δ) لا يقطع (C) .

لما $x \in]-\infty ; -1[$: (C) يقع فوق (Δ)

لما $x \in]1 ; +\infty[$: (C) يقع تحت (Δ)

التمرين 8 .

حساب النهايات :

$D_f =]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x + \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} 2x + \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x + \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x + |x| . \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x - x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} x\left[2 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x + \sqrt{x^2+1} = +\infty$$

2- حساب:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to+\infty} 2x + \sqrt{x^2+1} - 3x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -x + \sqrt{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x-\sqrt{x^2+1}\right)}{-x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2+1)}{-x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{-x-\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} 2x + \sqrt{x^2+1} - x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x + \sqrt{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-x-\sqrt{x^2+1}} = 0$$

3- تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

بما أن : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - 3x\right] = 0$

فإن : $y = 3x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

بما أن : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - x\right] = 0$

فإن : $y = x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

التمرين 9 .

1- تعيين a و b :

لدينا : $-1 \leq \sin x \leq 1$ ومنه : $3 \leq 4 + \sin x \leq 5$

2- تبيان أن : $v(x) \leq f(x) \leq u(x)$

لدينا : $3 \leq 4+\sin x \leq 5$

وعليه : $\frac{3}{x^2} \leq \frac{4+\sin x}{x^2} \leq \frac{5}{x^2}$

ومنه : $\frac{3}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{5}{x^2}$

3- استنتاج النهايات :

- بما أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

- بما أن : $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^2} = 0$

فإن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

-4 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{4+\sin x}{x^2} = +\infty$

التمرين 10 .

حساب النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$

- إذا كان $\alpha - 1 = 0$ أي $\alpha = 1$: $f(x) = -\frac{1}{3}$

وعليه : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$

- إذا كان : $\alpha^2 - 1 = 0$ و $\alpha - 1 \neq 0$ أي $\alpha + 1 = 0$

ومنه : $\alpha = -1$.

$f(x) = \frac{-2x+1}{-3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3}x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$$

• إذا كان $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\alpha - 1)\, x}{(\alpha^2 - 1)\, x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\alpha - 1)\, x}{(\alpha^2 - 1)\, x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

التمرين 11 .

1- تعيين مجموعة التعريف :

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ أي : $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

2- دراسة الاستمرارية عند 1- :

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x\to-1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 3$$

وعليه : $\lim_{x\to-1} f(x) = f(-1)$ ومنه f مستمرة عند 1- .

التمرين 12 .

- دراسة الاستمرارية على $\mathbb{R}$ للدالة f :

• من أجل $x \in]1 ; +\infty[$: الدالة f مستمرة لأنها دالة ناطقة .

• من أجل $x \in]-\infty ; 1[$: الدالة f مستمرة لأنها دالة كثيرة حدود .

• $f(1) = \frac{(1)^2}{(1)^2 + 1}$ ومنه : $f(1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-1}{x^2} + 1 = 0$$

إذن f غير مستمرة عند 1 لأنها لا تقبل نهاية عند 1.

التمرين 13 .

تعيين b بحيث تكون f مستمرة عند 0 :

لدينا : $f(0) = \sqrt{2(0)^2 + 1}$ ومنه : $f(0) = 1$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{ax + \text{b}}{x^2+4} = \frac{b}{4}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \sqrt{2x^2+1} = 1$$

حتى تكون f مستمرة عند 0 يجب أن يكون :

$\frac{\text{b}}{4} = 1$ ومنه $\text{b} = 4$

التمرين 14 .

تعيين عدد حلول المعادلة : $f(x) = 0$

1) في المجال : $]-\infty \,;\, -3]$ لدينا : f مستمرة و متزايدة تماما

و لدينا : $f(-3) = 1$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-\infty \,;\, -3[$.

2) في المجال $[-3 \,;\, -2]$: الدالة f مستمرة و متناقصة تماما

ولدينا $f(-3) = 1$ و $f(-2) = -3$ ومنه حسب نظرية القيم

المتوسطة للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-3 \,;\, -2[$.

3) في المجال $[-2 \,;\, 3]$: الدالة f مستمرة و متزايدة تماما

ولدينا : $f(-2) = -3$ و $f(3) = 4$ ومنه حسب نظرية القيم

المتوسطة للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-2 ; 3[$.

وبالتالي : عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ على $\mathbb{R}$ هي ثلاث حلول.

التمرين 15 .

1) مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R}$

2) دراسة الاستمرارية على D_f :

لدينا :
$$\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{x-1}{x-1} \ ; x > 1 \\ f(x) = x - \dfrac{x-1}{x-1} \ ; x < 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

ومنه :
$$\begin{cases} f(x) = x + 1 \ ; x > 1 \\ f(x) = x - 1 \ ; x < 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

- الدالة f مستمرة على المجال $]1 ; +\infty[$ لأنها دالة كثيرة الحدود
- الدالة f مستمرة على $]-\infty ; 1[$ لأنها دالة كثيرة حدود .
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x - 1) = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} x + 1 = 2$$

ومنه f غير مستمرة عند 1 وبالتالي f غير مستمرة على D_f .

التمرين 16 .

تعيين عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$

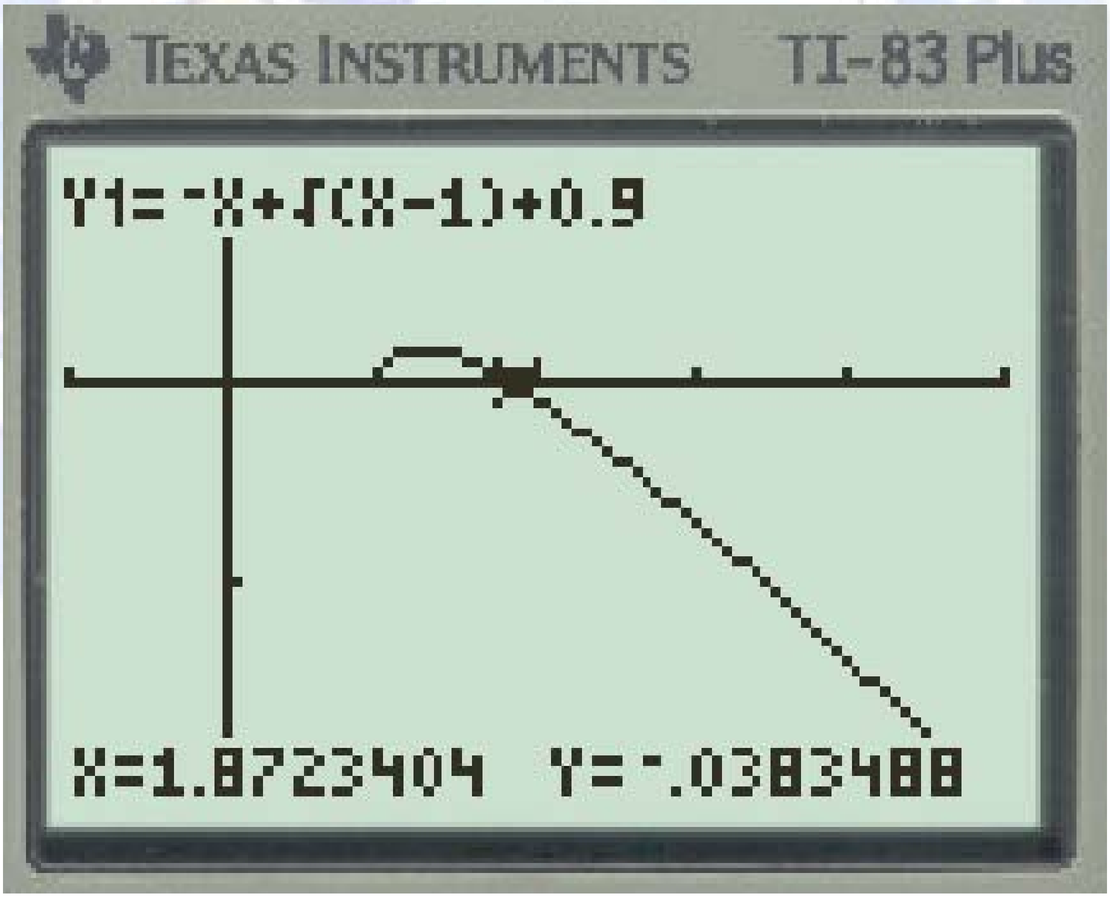
1) في المجال $]-\infty\ ;\ 0]$: الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و تأخذ قيمها في المجال $]-4\ ;\ 4]$ و بما أن $2\ \in\ ]-4\ ;\ 4]$ فإن للمعادلة $f(x)=2$ حل وحيد حسب نظرية القيم المتوسطة .

2) في المجال $[0\ ;\ +\infty[$: الدالة f مستمرة و متناقصة تماما و تأخذ قيمها في المجال $]-2\ ;\ 4]$ و بما أن $2 \in]-2\ ;\ 4[$ فإن للمعادلة $f(x)=2$ حل وحيد حسب نظرية القيم المتوسطة.

إذن للمعادلة $f(x)=2$ حلين في $\mathbb{R}$.

التمرين 17 .

إنشاء بيان الدالة f بآلة بيانية



المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا محصور في $]1,78\ ;\ 1,79[$.

التمرين 18 .

إثبات أن المعادلة : $2x - cosx = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]$

- الدالة f هي مجموع دالتين و منه فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ لأن الدالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$.
- $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{6} - cos\frac{\pi}{6}$ و عليه : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}$ وعليه : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$

- $f(0) = 2(0) - cos0$ وعليه : $f(0) = -1$

إذن : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) , f(0) < 0$

وحسب نظرية القيم المتوسطة للمعادلة $f(x) = 0$ حل على الأقل في المجال $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{6}\right[$

.

التمرين 19 .

1- دراسة الاستمرارية عند 0 :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\ \sin x}{1 - cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\ \sin\frac{x}{2}\ cos\frac{x}{2}}{1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\ \sin\frac{x}{2}\ cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = 2$$

إذن $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ وعليه f مستمرة عند 0 .

2- دراسة الاستمرارية على D_f :

لدينا : $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$

ولدينا: $x \mapsto x \sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$.

ولدينا : $x \mapsto 1 - \cos x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$.

إذن الدالة f هي حاصل قسمة دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على

$\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right[\cup \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ومنه الدالة f مستمرة على D_f .

التمرين 20 .

1- البرهان على وجود α :

نعرف الدالة g كمايلي : $g(x) = f(x) - x$ على المجال $[0 ; 1]$

- الدالة g مستمرة على $[0 ; 1]$ لأنها مجموع دالتان مستمرتان على $[0 ; 1]$.
- ولدينا $g(0) = f(0)$ و $g(1) = f(1) - 1$

بما أن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $[0 ; 1]$ فإن : $0 \leq f(x) \leq 1$

أي أن : $0 \leq f(0) \leq 1$ و عليه $0 \leq g(0) \leq 1$

إذن $g(0) \geq 0$.

وكذلك $0 \leq f(1) \leq 1$ وعليه $-1 \leq f(1) - 1 \leq 0$

إذن $g(1) \leq 0$ ومنه : $g(0) . g(1) \leq 0$

وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد α من المجال $[0 ; 1]$ بحيث

$g(\alpha) = 0$

أي $f(\alpha) - \alpha = 0$ و عليه : $f(\alpha) = \alpha$

2- التفسير الهندسي للنتيجة :

العدد α هو حل للمعادلة $f(x) = x$ ومنه التمثيل البياني للدالة f يتقاطع مع المنصف الأول : $y = x$ في نقطة فاصلتها α .

3- لندرس صحة النتائج السابقة في المجال $[a ; b]$.

لتكن الدالة g حيث : $g(x) = f(x) - x$.

- الدالة g مستمرة على $[a ; b]$ لأنها مجموع دالتان مستمرتان على $[a ; b]$
- $g(a) = f(a) - a$ و $g(b) = f(b) - b$

لدينا : $a \leq f(x) \leq b$ وعليه : $a \leq f(a) \leq b$

ومنه : $0 \leq f(a) - a \leq b-a$ وبالتالي : $f(a) - a \geq 0$

أي أن : $g(a) \geq 0$

وكذلك : $a \leq f(b) \leq b$ وعليه : $g(b) \leq 0$

إذن : $g(a) . g(b) \leq 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد α من المجال $[a ; b]$

بحيث $f(\alpha) - \alpha = 0$ وعليه $f(\alpha) = \alpha$

وعليه $\left(C_f\right)$ يتقاطع مع المنصف الأول في نقطة فاصلتها α .

إذن تبقى النتائج السابقة صحيحة

التمرين 21 .

1) حل المعادلة : $x^2 - 13x + 36 = 0$

$\Delta = 25$ و منه للمعادلة حلين :

$$x_1 = \frac{13 - 5}{2} = 4 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{13 + 5}{2} = 9$$

2) حل المعادلة : $x^6 - 13x^3 + 36 = 0$

بوضع $x^3 = z$ نجد : $z^2 - 13z + 36 = 0$

الحلين $z_1 = 4$ و $z_2 = 9$ ومنه : $x^3 = 4$ و $x^3 = 9$

وعليه : $x = \sqrt[3]{4}$ أو $x = \sqrt[3]{9}$

3) حل المعادلة : $x^{2n} - 13x^n + 36 = 0$

بوضع $x^n = y$ نجد : $y^2 - 13y + 36 = 0$

الحلين : $y_1 = 4$ و $y_2 = 9$

وعليه : $x^n = 4$ أو $x^n = 9$

ومنه : $x = \sqrt[n]{4}$ أو $x = \sqrt[n]{9}$

التمرين 22 .

نعتبر دالة كثيرة حدود من الدرجة n ودرجته فردية

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_n \neq 0$ و n عدد فردي نفرض $a_n > 0$

- الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n = +\infty \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n = -\infty$$

وعليه حسب نظرية القيم المتوسطة للمعادلة $f(x)=0$ حل على الأقل في $\mathbb{R}$. أي أن $f(x)$ ينعدم مرة واحدة على الأقل.