

المرجح في المستوى

الكفاءات المستهدفة



- ▶ إنشاء مرجح نقطتين.
- ▶ إنشاء مرجح ثلاث نقط.
- ▶ حساب إحداثيات المرجح.
- ▶ استعمال المرجح لإثبات استقامية نقط أو تلاقي مستقيمت.

مقدمة

\bar{A} أهم ما ينبغي التحكم فيه في هذا الفصل خاصية التجميع

\bar{A} يعتبر المرجح أداة فعالة في حل مشكلات متنوعة (كتعيين مجموعة نقط و إثبات تلاقي

مستقيمت في نقطة واحدة

\bar{A} على المتعلم ترجمة العلاقة الإشعاعية التي يحققها المرجح و العكس

\bar{A} يلاحظ المتعلم العلاقة بين المرجح و معدل سلسلة إحصائية و مركز العطالة في التطبيقات

الفيزيائية

الانشطة

النشاط الأول :

الهدف : إدراج مفهوم مرجح نقطتين

$$(1) \text{ تصحيح : أحسب قيمة } m_B \text{ بدلالة } GA \text{ و } GB \text{ عوض } GA \text{ و } GB \text{ و الجواب } m_B = 6 \frac{GA}{GB}$$

$$(2) \text{ نضع : } \vec{BG} = \vec{BA} + \vec{AG} \text{ * } \vec{GA} = -\frac{3}{7}\vec{GB} \text{ * } AG = 6 \text{ Cm *}$$

$$(3) \text{ * نأخذ } m_B = 2m_A \text{ * } m_B = 5m_A$$

النشاط الثاني :

الهدف : إنشاء مرجح ثلاث نقط

$$(1) \vec{BJ} = 2\vec{BC} \text{ و } \vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}$$

(2) في العلاقة $2\vec{AG} + \vec{GB} - 2\vec{GC}$ نضع $\vec{GA} = \vec{GI} + \vec{IA}$ و $\vec{GB} = \vec{GI} + \vec{IB}$ مع G, I, C على استقامة واحدة

(3) في العلاقة نفسها نضع $\vec{GB} = \vec{GJ} + \vec{JB}$ و $\vec{GC} = \vec{GJ} + \vec{JC}$ مع G, J, A على استقامة واحدة

(4) G نقطة تقاطع (AJ) و (GI) (6) في العلاقة السابقة نضع $\vec{GA} = \vec{GC} + \vec{CA}$

النشاط الثالث :

الهدف : تعيين مرجح نقطتين

$$(1) \vec{GA} = -2\vec{GB} \text{ أي } \vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AB} \text{ (2) } \vec{AG} = \frac{3}{5}\vec{AB} \text{ (3) G منتصف [AB] } m = 4 \text{ Kg}$$

النشاط الرابع :

الهدف : استعمال خاصية التجميع لتعيين مرجح جملة .

$$(1) m ; 10,77 \text{ (2) } m_1 ; 11,07 \text{ ، } m_2 ; 9,76 \text{ ، } m_3 ; 13,83$$

$$(3) \text{ تصحيح مقام الكسر 29 و ليس 28 . } \frac{13m_1 + 13m_2 + 3m_3}{29} ; 10,77$$

الأعمال الموجهة

أعمال موجهة 1 :

الهدف : تعيين مجموعة نقط باستعمال المرجح

(1) C دائرة مركزها G مرجح الجملة { A(1), B(-2), C(3) } و نصف قطرها 3

(2) C دائرة مركزها G مرجح الجملة { A(-2), B(1), C(-3) } و نصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{4}$ و هي تشمل النقطتين A و C

(3) C دائرة مركزها G مرجح الجملة { A(1), B(-1), C(2) } و نصف قطرها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و هي تشمل A

(4) مجموعة النقط هي محور القطعة [GP] حيث G مرجح الجملة { A(1), B(1), C(2) } و P مرجح الجملة { A(1), C(1) }

$$(5) \text{ * B تحقق المساواة * مجموع المعاملات معدوم * } \|\vec{BA} + \vec{BC}\| = \sqrt{3}a$$

* (Γ) دائرة مركزها G و نصف قطرها $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ * للإشياء (Γ) تشمل B

أعمال موجهة 2 :

الهدف : استعمال المرجح لإثبات تلاقي مستقيمت

$$(1) \text{ للإشياء : * } \vec{AI} = \frac{3}{2}\vec{AB} \text{ * } \vec{AJ} = 3\vec{AC}$$

يبدو أن المستقيمت (CI) ، (BJ) و (AK) تتقاطع في نقطة واحدة

(2) I مرجح الجملة { A(1), B(-3) } ، J مرجح الجملة { A(2), C(-3) } ، K مرجح الجملة { B(2), C(1) }

- (3) نعتبر G مرجح الجملة $\{A(2), B(-6), C(-3)\}$ ، G موجود لأن مجموع المعاملات غير معدوم
 باستعمال خاصية الجمع : $G \in \{I(-4), C(-3)\}$ ومنه $G \in IC$
 $G \in \{J(-1), B(-6)\}$ ومنه $G \in BJ$
 $G \in \{K(-9), A(2)\}$ ومنه $G \in AK$

أعمال موجهة 3 :

الهدف : التعرف على مستقيم أولار

$$(2) \quad AH = AO + OH = AO + OA + 2OA' \quad \text{و بالتالي } (AH) \text{ عمودي على } (BC)$$

لأن (OA') عمودي على (BC)

(3) H ملتقى الإرتفاعات في المثلث ABC

(4) تصحيح : O مرجح النقطتين H و G مرفقتين بالمعاملين (-1) و (3) على الترتيب ، $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$

(5) O, G, H على استقامة واحدة ، $G \in [OH]$

التمارين

اصحح ام خطأ

(1 إلى 10)

[10]	[9]	[8]	[7]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]
صحيح	صحيح	صحيح	خطأ	خطأ	خطأ	صحيح	خطأ	خطأ	صحيح

اسئلة متعددة الاختيارات

(11 إلى 17)

[17]	[16]	[15]	[14]	[13]	[12]	[11]
(2)	(2)	(3)	(3)	(2)	لا يوجد	(3)

مرجح نقطتين

- 18 : (1) هو مرجح الجملة $\{(A, 2)(B, 3)\}$
 (2) هو مرجح الجملة $\{(A, 1)(B, 2)\}$
 (3) في الشكل المقابل
 (4) هو مرجح الجملة $\{(A, 3)(B, 2)\}$
- 19 : تنشأ النقط G_5, G_4, G_3, G_2, G_1 بنفس طريقة التمرين 18

: 20

الحالة (5)	الحالة (4)	الحالة (3)	الحالة (2)	الحالة (1)
$\{(A, 2)(B, -1)\}$	$\{(A, 3)(B, -2)\}$	$\{(A, 1)(B, -3)\}$	$\{(A, 2)(B, 1)\}$	$\{(A, 1)(B, 2)\}$

22

21

$(a, b) = (2, 1)$	الحالة (1)
$(a, b) = (5, -7)$	الحالة (2)
$(a, b) = (3, -2)$	الحالة (3)
$(a, b) = (2, -1)$	الحالة (4)

$G = \{(A, 1)(B, 1)\}$	الحالة 1
$G = \{(A, 5)(B, -3)\}$	الحالة 2
$G = \{(A, 5)(B, -6)\}$	الحالة 3
$G = \{(A, -7)(B, 3)\}$	الحالة 4
$G = \{(A, 1)(B, -6)\}$	الحالة 5
G ليست مرجحا لجملة متقلة	الحالة 6

$$B = \{(A, 2)(C, 1)\} \quad , \quad A = \{(C, 1)(B, -3)\} : \underline{\text{التمرين 23}}$$

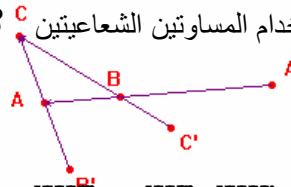
$$C = \{(A, 3)(B, -4)\} \quad , \quad A = \{(C, 1)(B, -4)\} : \underline{\text{التمرين 24}}$$

$$C = \{(A, -1)(B, 2)\} \quad B = \{(A, 1)(C, 1)\} : \underline{\text{التمرين 25}}$$

التمرين 26: نستخدم المساواة الشعاعية $a\vec{CA} + b\vec{CB} = \vec{0}$ وعلاقة شال ($\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB}$)

التمرين 27: G_1 هو نظير A بالنسبة إلى B و G_2 هو نظير C بالنسبة إلى B

$$\underline{\text{التمرين 28}} (1): \text{ننشئ باستخدام المساويتين الشعاعيتين} \quad \vec{AG} = 3\vec{AB} \quad \text{و} \quad \vec{AG}' = \frac{1}{3}\vec{AB} \quad (2) \quad \vec{GG}' = -\frac{8}{3}\vec{AB}$$



(1) نستخدم للإشياء العلاقات الشعاعية:

التمرين 29:

$$\vec{B'C} = 2\vec{AC} \quad , \quad \vec{A'A} = 3\vec{BA} \quad , \quad \vec{C'C} = \frac{3}{2}\vec{BC}$$

(2) لاحظ أن:

(3) من المساواة في (2) نجد: $\vec{A'B'} = 2\vec{A'C'}$

$$\begin{cases} (2-3)\vec{MA}' = 2\vec{MA} - 3\vec{MB} \\ (-2+1)\vec{MB}' = -2\vec{MA} + \vec{MC} \\ (3-1)\vec{MC}' = 3\vec{MB} - \vec{MC} \end{cases}$$

$$\underline{\text{التمرين 30}} (2) \quad \vec{AG}_1 = -2\vec{AB} + 3\vec{AC} \quad , \quad \vec{BG}_2 = -\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC} \quad (3) \text{ لاحظ أن: } \vec{AG}_1 = 2\vec{BG}_2$$

التمرين 31: (1) $N = \{(C, 1)(B, -4)\}$ أي $\vec{NC} - 4\vec{NB} = \vec{0}$ و باستخدام علاقة شال نجد: $\vec{BC} + 3\vec{BN} = \vec{0}$

(2) استعمل مبرهنة طاليس و نستعمل نفس المبرهنة لإثبات أن $LMJI$ متوازي أضلاع

لإثبات أن $O = \{(A, 1)(B, 1)(C, 1)\}$ نلاحظ أن:

$$O = \{(L, 3)(J, 3)\} = \{(A, 2)(C, 1)(B, 2)(C, 1)\} = \{(A, 2)(B, 2)(C, 2)\} = \{(A, 1)(B, 1)(C, 1)\}$$

$$K = \{(B, 1)(C, 4)\} \quad (2) \quad L = \{(A, -2)(C, 3)\} \quad (1) : \underline{\text{التمرين 32}}$$

$$P = \{(A, 1)(C, 3)\} \quad , \quad N = \{(A, 2)(B, 5)\} \quad , \quad M = \{(B, 5)(C, 6)\} \quad (1) : \underline{\text{التمرين 33}}$$

(2) لتكن G نقطة تقاطع (NC) و (BP) نبرهن أن $G \in (AM)$

يمكن أن نعبر عن كون G مرجح النقطتين A و M

نبرهن وجود a حيث: $G = \{(A, a)(B, 5)(C, 6)\} = \{(A, a)(M, 11)\}$ و بالتالي $G \in (AM)$

نفرض أن $G = \{(A, a)(B, 5)(C, 6)\}$ و نسمي $P' = \{(A, a)(C, 6)\}$

G هو أيضا مرجح الجملة: $\{(B, 5)(P', a+6)\}$ إذن $P \in (AC) \cap (BG)$ إذن $P = P'$

و بما أن $P = \{(A, 1)(C, 3)\}$ فإن $a = 2$

$$\underline{\text{التمرين 34}} (2) \text{ لاحظ أن: } \vec{AI} = \frac{3}{2}\vec{AB} \text{ و بالتالي:}$$

$$\text{و أن: } \vec{AJ} = 3\vec{AD} \text{ و بالتالي} \quad \vec{CI} = \vec{CA} + \vec{AI} = (\vec{CB} + \vec{CD}) + \vec{AI} = (-\vec{BC} - \vec{AB}) + \frac{3}{2}\vec{AB}$$

$$\vec{CJ} = \vec{CA} + \vec{AJ} = (\vec{CB} + \vec{CD}) + 3\vec{AD} = (-\vec{AD} - \vec{DC}) + 3\vec{AD} = 2\vec{AD} - \vec{DC}$$

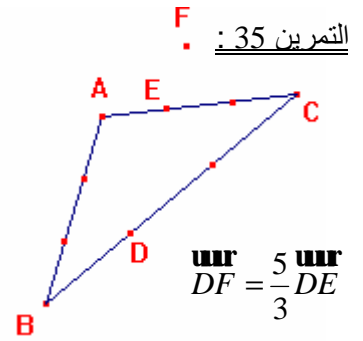
(3) لاحظ أن: $\vec{CJ} = -2\vec{CI}$ (4) أ) لدينا D منتصف $[AK]$ و $(AL) \parallel (DC)$ إذن C منتصف

$[KL]$ (لاحظ أن $C \in [KL]$) ب) يمكن أن نبرهن أن $KL = 2DB$ باستعمال خواص متوازي أضلاع

(1) نستعمل العلاقة : $\overline{CD} = \frac{2}{3} \overline{CB}$

(2) نستعمل العلاقة : $\overline{AE} = \frac{1}{3} \overline{AC}$

(3) F هو صورة A بالإسحاب الذي شعاعه \overline{BD}
 (4) باستعمال علاقة شال و الأسئلة السابقة نبرهن أن :



التمرين 36 : 1) تكون G موجودة إذا و فقط إذا كان : $(m^2 + 2) + (m^2 + m - 3) \neq 0$ أي $m \in \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$

التمرين 37 : 1) الحالة $P = C$ نجد : $b = -\frac{4}{3}$ (2) الحالة $\overline{PC} = 2\overline{AB}$ نجد : $b = -\frac{2}{15}$

مرجح ثلاث نقط

التمرين 38 : يفضل استعمال خاصية التجمع لإنشاء المرجح في هذه الحالات

التمرين 39 : 1) $G = \{(A,1)(B,1)(C,1)\}$ (2) $G = \{(A,5)(B,-3)(C,-1)\}$ (3)

$G = \{(A,6)(B,-6)(C,-1)\}$

(4) $G = \{(A,-5)(B,3)(C,-2)\}$ (5) $G = \{(A,-1)(B,-3)(C,2)\}$ (6)

$G = \{(A,-1)(B,0)(C,-4)\}$

التمرين 40 :

(1) نعتبر النقطتين $G_1 = \{(A,-1)(C,2)\}$ ثم منتصف $[G_1B]$ (2) نعتبر I منتصف $[BC]$ ثم

$F = \{(I,-2)(A,1)\}$ (3) $G = \{(B,2)(C,1)\}$ (4) إختيار كفي (5) إختيار $I_1 = \{(A,3)(B,-2)\}$ ثم

منتصف $[I_1C]$ (6) $J = C$

التمرين 41 :

(1) $G = \{(A,-3)(B,4)(C,2)\}$ (2) $G = \{(A,2)(B,-5)(C,-5)\}$ (3) $G = \{(A,2)(B,0)(C,-1)\}$

(4) $G = \{(A,0)(B,1)(C,1)\}$ (5) $G = \{(A,1)(B,-2)(C,4)\}$

التمرين 42 :

بالنسبة للحالة الأولى : $D = \{(A,1)(B,1)(C,-1)\}$ معناه $A = \{(B,1)(C,-1)(D,-1)\}$

$B = \{(A,1)(C,-1)(D,-1)\}$ معناه $C = \{(A,1)(B,1)(D,-1)\}$

التمرين 43 :

(1) ننشئ I منتصف $[AC]$ ثم G هو منتصف $[IB]$ (2) $(a, b, g) = (-4, 2, 1)$

التمرين 44 :

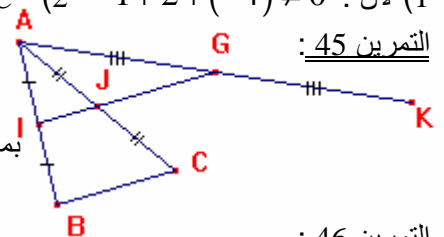
(1) لأن : $1 + 2 + (-4) \neq 0$ (2) $\overline{AG} = -2\overline{AB} + 4\overline{AC}$ و ننشئ باستعمال خواص الجمع الشعاعي

التمرين 45 :

(2) باستعمال العلاقة $\overline{BK} = 3\overline{BC}$ حيث $K = \{(B,-2)(C,3)\}$ و

بملاحظة أن G منتصف $[AK]$ و I و J منتصف $[AB]$ و $[AC]$ يمكن أن

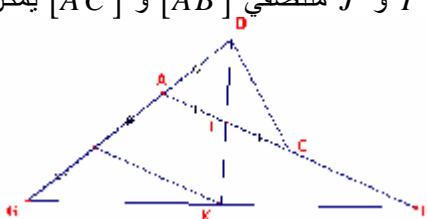
نبرهن أن : $\overline{IG} = 3\overline{IJ}$



التمرين 46 :

(1) يمكن إنشاء النقط G, H, K لأن : $-3 + 2 \neq 0$ و $-2 + 1 \neq 0$

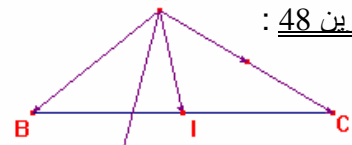
(2) يمكن استعمال مبرهنة طاليس للبرهان على أن : $\overline{GH} = 2\overline{GK}$



التمرين 47 : 1) يمكن إستعمال الجمع الشعاعي و خواص قطري متوازي أضلاع أو إستعمال علاقة شال وخواص منتصف قطعة

(1) من العلاقة الشعاعية المبرهنة في 1) ينتج : $AB + AC - 2AI = 0$ و منه : $A = \{(I, -2)(B, 1)(C, 1)\}$

(1) الإنشاء



التمرين 48 :

(2) $I = \{(A, 0)(B, 1)(C, 1)\}$

$J = \{(A, 1)(B, -2)(C, -1)\}$

(1) التمرين 49 : ننشئ باستعمال العلاقة : $IB = 3BC$ (2) $G = \{(I, 1)(A, 1)\}$ منتصف $[AI]$ لأن :

التمرين 50 : 1) الجملتين تقبلان مرجحين لأن مجموع المعاملات غير معدوم
(2) بجمع المساويتين : $KB - 2KA = 0$ و $LC + 3LA = 0$ و باستخدام علاقة شال في المساويتين نجد : $GA + GB + GC + 4LG - KG = 0$ أي $-GK + 4GL = 0$ (لأن G وركز ثقل المثلث ABC)

التمرين 51 : 1) يمكن للإنشاء إستعمال الخاصية : $GM = AM + 3BM - 3CM$ و نأخذ مثلا : $M = A$ نجد $GA = 3BA - 3CA$ أي $GA = 3BC$ (2) السؤال الأول ($GA = 3BC$) يجب عن هذا السؤال

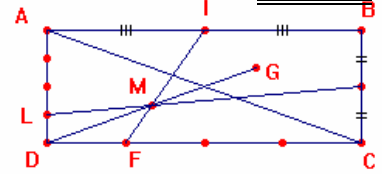
التمرين 52 :

(2) نستعمل خاصية التجميع فنكتب : $M = \{(A, 1)(B, 1)(C, 1)(D, 3)\}$

أي : $M = \{(G, 3)(D, 3)\}$ منتصف $[GD]$

(3) نعتبر الآن أن : $M = \{(I, 2)(F, 4)\}$ أي M, I, F في إستقامة

(4) نعتبر الآن أن : $M = \{(L, 4)(P, 2)\}$ حيث : $P = \{(B, 1)(C, 1)\}$ و $L = \{(A, 1)(D, 3)\}$ و البقية



واضحة

التمرين 53 : لاحظ أنه يمكن أن نكتب :

إذن $G = \{(A, 1)(I, 6)\}$ إذن $G \in (AI)$ ثم $G = \{(B, 2)(J, 5)\}$ إذن $G \in (BJ)$ $G = \{(C, 4)(H, 3)\}$ إذن

$G \in (CH)$

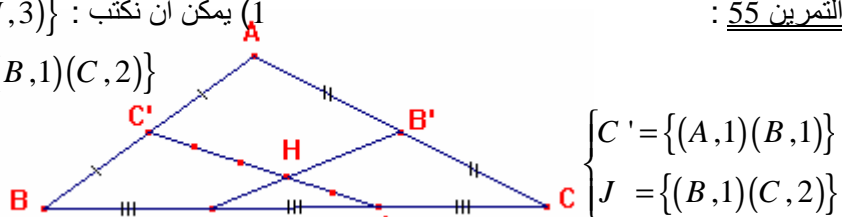
التمرين 54 : 1) نكتب : $GB = GI + IB$ و $GC = GI + IC$ (2) نعوض المساواة الموجودة في السؤال السابق في العلاقة : $2GA + GB + GC = 0$ نجد : $GA + GI = 0$ أي أن $G = \{(A, 1)(I, 1)\}$ (3) نعوض

النقطتين

المتثلتين بنفس المعامل بمنصفهما المثقل بمجموع المعاملين للنقطتين

(1) يمكن أن نكتب : $H = \{(C', 2)(J, 3)\}$ أي أن :

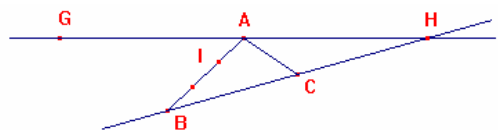
لأن $H = \{(A, 1)(B, 1)(B, 1)(C, 2)\}$



و بالتالي : $H = \{(A, 1)(B, 2)(C, 2)\}$ (2) إستعمل مبرهنة طاليس (لاحظ أن $(IJ) \parallel (B'C')$)

(2) لاحظ أن : $G = \{(I, 3)(C, -2)\}$ لكن $I = \{(A, 2)(B, 1)\}$

وبالتالي : $G = \{(A, 2)(B, 1)(C, -2)\}$



التمرين 56 :

(3) أ) $L = \{(B,1)(c,-2)\}$ و بالتالي $L \in (BC)$ و يمكن أن نكتب $G = \{(A,2)(L,-1)\}$ و بالتالي $L \in (AG)$ استخلص

ب) بما أن $L = H$ و $BL = 2BC$ فإن $k = 2$
 التمرين 57 (1) : اعلم أنه إذا كان G مركز ثقل مثلث فإن $AG = 2GI$ و لدينا $GH = 2GI$
 $HB + HC = (HI + IB) + (HI + IC) = 2HI = HG$ (2)

(3) $H = \{(A,1)(B,-2)(C,-2)\}$ و بالتالي $HA = 2(HB + HC)$

التمرين 58 (1) : من المساواة $AI = \frac{1}{3}AC$ نجد $2IA + IC = 0$ من المساواة $BG = \frac{1}{3}BI$ نجد $2GB + GI = 0$

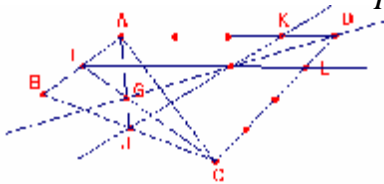
(3) أ) استخدم علاقة شال مع المساواة $2IA + IC = 0$ (ب) استخرج 3 عامل مشترك من المساواة (3) أ-
 التمرين 59 :

(2) نكتب : $H \in (DG)$ أي $H = \{(I,2)(C,1)(D,3)\} = \{(G,3)(D,3)\}$

(3) $H \in (JK)$ أي $H = \{(A,1)(D,3)\} \{(B,1)(C,1)\} = \{(K,4)(J,2)\}$

(4) $H \in (IL)$ أي $H = \{(A,1)(B,1)\} \{(C,1)(D,3)\} = \{(I,2)(L,4)\}$

(5) استخلص



(1) الشكل من أجل $k = \frac{1}{3}$

(2) من العلاقات : $AL = \frac{1}{3}AB$, $CJ = \frac{1}{3}CA$, $BI = \frac{1}{3}BC$

نجد $3GI = 2GB + GC$, $3GJ = 2GC + GA$, $3GL = 2GA + GB$

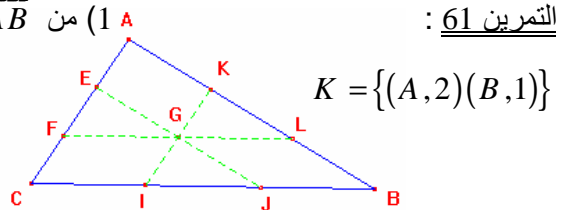
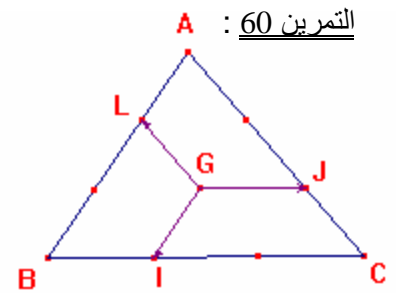
جمع المسوات الثلاثة طرفا إلى طرف نجد : $GI + GJ + GL = 0$
 (3) G هي مركز ثقل المثلث IJL

(1) من $AK = \frac{1}{3}AB$ نجد : $2KA + KB = 0$ أي :

و من : $BI = \frac{2}{3}BC$ نجد : $2IB + IC = 0$ أي

$I = \{(C,2)(B,1)\}$

(2) و (3) يمكن استعمال ميرهنة طاليس - الرباعي $EKJI$ متوازي أضلاع لأن قطراه متناصفان



التمرين 61 :

$K = \{(A,2)(B,1)\}$

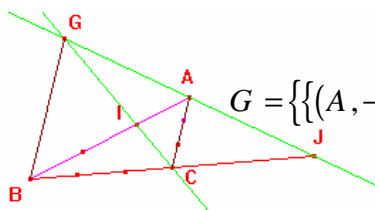
التمرين 62 :

(1) $J = \{(B,2)(C,3)\}$, $I = \{(A,1)(B,2)\}$ يمكن أن نكتب :

$H = \{(A,1)(B,2)(C,3)\} = \{(I,3)(C,3)\}$

أي H منتصف $[IC]$ و بما أن G منتصف $[IC]$ فإن $G = H$ (3) لاحظ أن :

$G = H = \{(A,1)(J,5)\}$

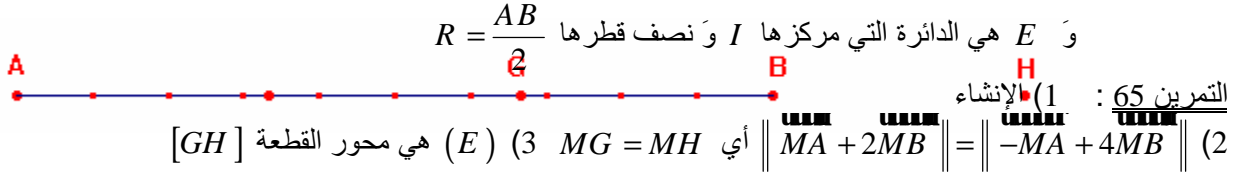


التمرين 63 (1) : بما أن $G = \{(A,-2)(B,-1)\} \{(C,2)\} = \{(I,-3)(C,2)\}$

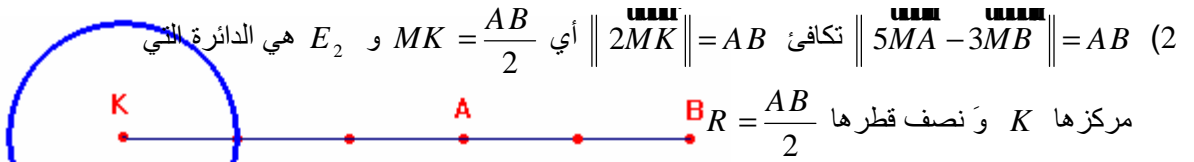
فإن النقط G, J, A في استقامة

- بالنسبة للنقط G, I, C لاحظ أن : $G = \{(A, -2)\{(B, -1)(C, 2)\} = \{(A, -2)(J, 1)\}$:
 (2) من (1) $G \in (AJ)$ و $G \in (CI)$ (3) لاحظ أن : A منتصف $[GJ]$ و C منتصف $[BJ]$

مجموعة النقط
 التمرين 64 : (1) $\vec{MA} + \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) + (\vec{MI} + \vec{IB}) = 2\vec{MI}$ معناه $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = AB$ (2) $\|\vec{MI}\| = \frac{AB}{2}$



التمرين 66 : (1) من العلاقة $\vec{AK} = -\frac{3}{2}\vec{AB}$ نجد : $5\vec{KA} - 3\vec{KB} = 0$ أي $K = \{(A, 5)(B, -3)\}$



E_2 هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $R = \frac{AB}{3}$

ج) معناه $\|\vec{2MA} + \vec{MB}\| = 3MA$ و $MG = MA$ و E_3 هي محور القطعة $[GA]$

التمرين 68 : (1) و (2) ينشأ الشكل كما تقدم (3) $\|\vec{3MA} - \vec{MB}\| = \|\vec{-2MC} + 4\vec{MD}\|$

تكافئ $MG = MK$ و مجموعة النقط هي محور القطعة $[GA]$

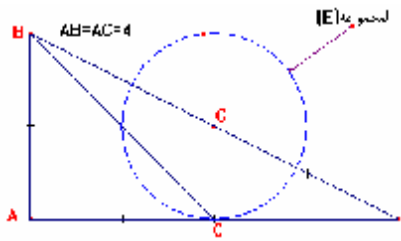
التمرين 69 : (1) ينشأ الشكل كما تقدم (2) المجموعة E هي الدائرة التي مركزها C و نصف قطرها 2

(3) المجموعة E' هي محور القطعة $[CD]$

التمرين 70 : (1) الدالة f ترفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث : $\vec{MM}' = 2\vec{MG}$ أي أن $\vec{GM}' + \vec{GM} = 0$ أي أن الدالة f ترفق بكل نقطة M من المستوي نظيرتها M' بالنسبة إلى G

(2) معناه $\vec{MM}' = \vec{BA} + \vec{CA}$ و الدالة g ترفق بالنقطة M بالنقطة M' صورتها بالإنسحاب شعاعه u

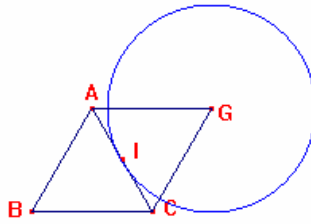
(ب) المجموعة E هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها طول شعاع $\frac{\|u\|}{2}$



- (1) $\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC} = -2\vec{MG}$ (1 : 72)
- (2) $\|\vec{MG}\| = 2$ تكافئ $\|-2\vec{MG}\| = 4$ تكافئ $M \in (E)$
- (3) المجموعة (E) هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 2

: 72

- (1) الرباعي ABCG فيه قطران متناصفان و ضلعان متتابعان متقايسان
- (2) أ) E هي الدائرة التي مركزها G



- و نصف قطرها $R = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ (ب) منتصف [AC] نقطة من E لأن $GI = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

: 73

- (1) نكتب: $G = \{ \{(B, -1)(C, -1)\}(A, 4) \} = \{ (A, 4)(I, -2) \} = \{ (A, 2)(I, -1) \}$

- (2) $A = \{ (G, 2)(B, 1)(C, 1) \}$ (3) هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها $R = \frac{BC}{2}$

(1 : 74) ننشئ كما تقدم

- (2) نكتب من جهة : $G = \{ (A, 1)\{(B, 4)(C, -2)\} \} = \{ (A, 1)(J, 2) \}$ أن $G \in (AJ)$

- و من جهة أخرى : $G = \{ \{(A, 1)(B, 4)\}(C, -2) \} = \{ (I, 5)(C, -2) \}$ أن $G \in (CI)$

$G \in (CI)$

- (3) نجد : $MI = MJ$ و مجموعة النقط هي محور القطعة [IJ]

- (4) نجد : $MG = \frac{4}{3}AC$ و مجموعة النقط هي الدائرة مركزها G و نصف قطرها $R = \frac{4}{3}AC$

- (1 : 75) ننسب $G_1 = \{ (A, 3)(B, 5)(C, 2) \}$ و $G_2 = \{ (A, 3)(C, 2) \}$ نجد : $MG_1 = MG_2$ والمجموعة E_1 هي

محور القطعة $[G_1G_2]$

- (2) نجد : $MG_1 = \frac{3}{10}AC$ و مجموعة النقط E_2 هي النقطة M التي تحقق هذه المساواة

- (3) نجد : $\|-5AB + 2AC\| = 10MG_2$ و مجموعة النقط E_3 هي الدائرة مركزها G_2 و نصف قطرها

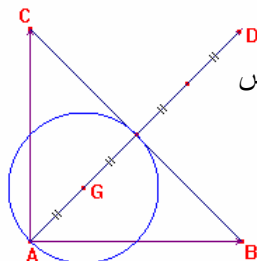
$$R = \frac{\|-5AB + 2AC\|}{10}$$

- (1 : 76) نكتب : $a\vec{DA} - \vec{DB} + a\vec{DC} = \vec{0}$ أي $a(\vec{DA} + \vec{DC}) = \vec{DB}$ لكن ABCD مستطيل إذن $a = 1$

- (2) نلاحظ أن : $u(M) = \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MD}$ و $v(M) = \vec{CD} + \vec{AD}$

- للشعاعان $u(M)$ و $v(M)$ نفس الطويلة معناه $MD = \|\vec{CD} + \vec{AD}\|$ و مجموعة النقط هي الدائرة

التي مركزها D و تشمل النقطة B



- (1) $M' = \{ (A, -1)(B, 1)(M, 2) \}$ تكافئ $MM' = \frac{1}{2}AB = AI$ استخلص

- (2) $M'' = \{ (A, 1)(B, 1)(M, -1) \}$ تكافئ $IM + IM'' = \vec{0}$ استخلص

- (3) عندما تمسح النقطة M الدائرة التي مركزها A و تشمل I

- أ) النقطة M' تمسح الدائرة التي مركزها I و تشمل A

(ب) النقطة " M " تمسح الدائرة التي مركزها B و تشمل I
 $2MA + MB + MC = 4MG$ (أ) (2 : 78)

(ب) أكتب : $MB = MA + AB$ و $MC = MA + AC$

(ج) أنظر الشكل (د) $AG = \sqrt{2}$, $AD = 4\sqrt{2}$

(3) أ) نجد : $MG = \sqrt{2}$ دائرة مركزها G و نصف قطرها $R = \sqrt{2}$

79 : (1) بما أن $1 = (-3k + 1) + (k - 1) + (k + 1) + k$ فإن G معرفة من أجل كل قيمة لـ k

(2) لاحظ أن ABCD متوازي أضلاع و بالتالي : $AC = AB + AD$ إذن :

$$A = \{(B,1)(C,-1)(D,1)\}$$

- باستخدام علاقة شال (أستعمل النقطة A في الأشعة GA, GB, GC, GD) و استخدام العلاقة :

$$kGA + (k+1)GB + (k-1)GC + (-3k+1)GD = 0$$

$$AG = 2kDB \quad \text{لكي نجد : } GA + k(AB + AC - 3AD) + (AB - AC + AD)$$

(3) مجموعة النقط هي المستقيم الذي شعاع توجيهه DB و يشمل النقطة A

80 : (1) ننشئ كما تقدم النقطتين : $G_1 = \{(A,2)(B,1)(C,-1)\}$ و $G_{-1} = \{(A,2)(B,-1)(C,1)\}$ و النقطة I

(2) النقطة G_k لأن $k \neq 0$ لأن $(k^2 + 1) + (k) + (-k) \neq 0$ من أجل كل عدد حقيقي k

- باستخدام علاقة شال في المساواة : $kG_k A = kG_k C - kG_k B$ (النقطة B في $G_k C$) نجد

$$AG_k = \frac{-k}{k^2 + 1} BC$$

(3) إذا انطبقت N على G_k فإن G_k يقع على (BC) و يكون عندئذ معامل النقطة A معدوم أي أن :

$$k^2 + 1 = 0 \quad \text{و هذا مستحيل على المجموعة } IR$$

(4) لاحظ أن الدالة f متناقصة على المجال $[-1, +1]$ ، النهاية الحدية الكبرى هي $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ و النهاية الحدية

$$\text{الصغرى هي } \left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

(5) مجموعة النقط G_k هي القطعة المستقيمة $[G_{-1}G_1]$ من المستقيم الذي يوازي BC و يشمل A

81 : (1) المثلث ABC قائم في B (2) (Γ_1) هو المستقيم الموازي لـ AC و يشمل $G = \{(A,1)(B,2)(C,1)\}$

(3) (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها $G = \{(A,1)(B,2)(C,1)\}$ و نصف قطرها $R = \frac{1}{4}AC$

$$(4) \text{ أ) لاحظ أن : } MA - 2MB + MC = BA + BC \quad \text{و } \|CA\| = \|BA + BC\|$$

(ب) نعوض النقطة M بالنقطة B في المساواة (4) بالنسبة لـ B' لاحظ أنه و بعد التعويض

$$\|2BB'\| = \|AC\| \quad \text{و } B'A + B'C = 0$$

(ج)

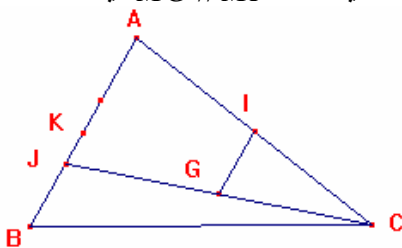
82 : (1) نكتب : $G = \{(A,1)(B,2)\}(C,3) = \{(J,3)(C,3)\}$ أي أن $G \in (JC)$ ثم G منتصف [JC]

(2) الشعاعان $MA + 2MB + 3MC$ و $MA + MC$ مرتبطان خطيا معناه $MG \parallel MI$ حيث : منتصف [AC]

و المجموعة (E) هي المستقيم (IG)

(3) يمكن لذلك استعمال النقطة K منتصف [AB]

و بملاحظة أن G منتصف [JC]



$$G = \{(A,1)(C,1)\}(B,2) = \{(I,2)(B,2)\} : \text{لاحظ أن : (1 : 83)}$$

حيث : I منتصف $[AC]$ و بالتالي G منتصف $[IB]$

$$R = \frac{AC}{4} \text{ هي الدائرة التي مركزها } G \text{ و نصف قطرها } (E_1) \text{ (2)}$$

(3) أ) لاحظ أن : $\overline{NA} - 2\overline{NB} + \overline{NC} = \overline{BA} + \overline{BC}$ للتحقق نعوض النقطة N بالنقطة B
ب) المجموعة (E_2) هي الدائرة مركزها G و تشمل النقطة B

$$(1 : 84) \text{ المجموعة } (\Delta) \text{ هي محور القطعة } [G_1G_2] \text{ حيث : } G_1 = \{(A,1)(B,1)(C,1)\} \text{ و}$$

$$G_2 = \{(D,4)(E,-1)\}$$

(2) لاحظ أن : $\overline{MD} - \overline{ME} = \overline{ED}$ و باعتبار $G_3 = \{(A,1)(B,-1)(C,1)\}$ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي

مركزها

النقطة G_3 و نصف قطرها ED

$$AC = \frac{4}{3}GC \text{ : نبرهن أن (2) } J = \{(A,3)(B,-2)(C,4)\} \text{ (1 : 85)}$$

(3) هي الدائرة مركزها I و نصف قطرها IA

(1 : 86) يكون G_k إذا فقط إذا كان : $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ (2) نستعمل علاقة شال و المساواة

$$kG_kA - G_kB + G_kC = 0 :$$

(2) الرباعي $ABCG_1$ متوازي أضلاع لأن : $\overline{AG_1} = \overline{BC}$ (3) هو نصف مستقيم حده G_1 و يوازي (BC)

(1 : 87) G_m موجود لأن : $(2m) + (1-m) + (2-m) \neq 0$ من أجل كل عدد حقيقي m

$$(2) G_1 = \{(A,2)(B,0)(C,1)\} \text{ في الثلث من } [AC] \text{ قريبا من } A$$

$$(3) AG_m = \frac{1-m}{3}AB + \frac{2-m}{3}AC \text{ (4) نستعمل العلاقة المبرهنة في (3) و علاقة شال}$$

(4) مجموعة النقط هي المسقيم الموازي لـ AD و يشمل G_1

إحداثيات المرجح

88

$$(1 : G\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right) : (A, AB, AC) \text{ في المعلم } G = \{(A,2)(B,-3)(C,-5)\} \text{ و تكون إحداثيي } G \text{ و تكون إحداثيي } G \text{ في المعلم } (A, AB, AC) \text{ (1 : 88)}$$

ملاحظة : نتناول بنفس الطريقة (2) و (3)

$$(2 : 89) G(1,0) \text{ (3) ب) بحساب المركبتين السلميتين لـ } \overline{AC} \text{ و } \overline{AB} \text{ (4) } C = \{(A,-6)(B,1)\}$$

$$(2 : 90) M\left(\frac{5}{2}, 0\right) \text{ و } N(0,5) \text{ (3) أ) } I\left(\frac{3}{2}, 2\right) \text{ ب) } MI = \frac{2}{5}MN \text{ (4) } I = \{(M,3)(N,2)\}$$

$$(2 : 91) G\left(-\frac{2}{3}, 1\right) \text{ (3) } H(-5,4) \text{ (4) ليست في استقامية}$$

$$(2 : 92) G(-5,6) \text{ (3) } K\left(\frac{3}{5}, -\frac{14}{5}\right) \text{ (4) } G = \{(A,-3)(B,-2)(C,4)\} = \{(K,5)(C,4)\}$$

$G \in (KC)$

$$\text{بالحساب نجد : } CG\left(\frac{-7}{11}\right) \text{ و } CK\left(\frac{7}{5}\right) \text{ و منه : } CG = \frac{1}{5}CK$$

$$G \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} (3 \quad \overrightarrow{OG} = \frac{3}{10} \overrightarrow{OA} + \frac{7}{10} \overrightarrow{OB} \quad (2 \quad 3+7 \neq 0 : \text{ لأن } (1 : 93$$

(2 : 94) $(3 \quad G(5, -6)$ يمر المستقيم (BG) بمبدأ المعلم O إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OG}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2-x}{1+x} = 1 \\ \frac{1+5x}{1+x} = \frac{5}{2} \end{array} \right. \quad (2 : 95) \quad H(2, 6) \quad G \left(2, \frac{13}{3} \right) \quad (4 \quad \text{بفرض : } x+1 \neq 0 \text{ ونحل الجملة : } (3 \quad \text{و } x \text{ غير موجود}$$

$$G \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3} \right) (2 \quad E(4, -1) \quad \text{أي } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED} \quad \text{معناه } BCDE \text{ متوازي أضلاع معناه } (1 : 96$$

(3) لدينا : $L = \{(B,1)(C,1)(D,1)(E,1)\}$ ومنه : $L(1, -2)$ ونبرهن أن : $\overrightarrow{LA} = 3\overrightarrow{LG}$

(4) أ) استعمل خواص الجمع الشعاعي في الهندسة التحليلية و G هو مركز ثقل المثلث ABD

$$(5) \text{ نكتب : } G = \{(A,2)\{(B,1)(C,1)\}\{(D,1)(E,1)\}\} = \{(A,2)(I,2)(J,2)\} = \{(A,1)(I,1)(J,1)\}$$

$$(1 : 97) \quad B'(4,2) \quad \text{و } K(2,1) \quad (2 \quad K(a, b) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right) \quad (3 \quad J \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right) \quad (4 \quad \text{لاحظ أن } \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{IJ}$$

مركز العطالة

$$98 : \text{ نكتب : } 100\overrightarrow{GA} + x\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad \text{و نلاحظ أن : } \overrightarrow{GB} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AG} \quad \text{نجد : } M_B = 40g$$

$$99 : \{(I,1)(O,8)\} = \{(I,2)(O,16)\} = \{(H,1)(H',1)(O,16)\} = G \text{ حيث : } I \text{ منتصف } [HH'] \text{ و ننشئه}$$

$$\text{باستخدام المساواة : } \overrightarrow{IG} = \frac{8}{9}\overrightarrow{IO} \quad \text{ولحساب المسافة } OG \text{ نلاحظ أن } OI = OH \cdot \sin(52,5^\circ) \quad \text{و } OG = \frac{1}{9}OI$$

100 : نعتبر في المعلم (A, \vec{i}, \vec{j}) النقط : $A(0,0), B(0,18), C(13,18), D(25,0)$ و نحسب إحداثيي مركز

المسافات المتساوية لهذه النقط

101 : الطريقة الأولى :

(1) مركز عطالة الصفيحة $IBCD$ و H مركز عطالة الصفيحة $AIEF$ وبالتالي مركز عطالة الصفيحة

$$ABCDEF \text{ هو مركز عطالة } O \text{ و } H \text{ إذن } G \in (OH)$$

(2) بنفس الطريقة لكن نعتبر المستطيلين $ABCJ$ و $JDEF$ نبرهن أن $G \in (O'H')$ استخلص

الطريقة الثانية :

$$G = \{(O,2)(H,3)\} \text{ لأن مساحة المستطيل } IBCD \text{ هي } 2 \quad \text{و مساحة المستطيل } AIEF \text{ هي } 3$$

$$\text{في المعلم } (A, \vec{i}, \vec{j}) \text{ لدينا : } H \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \quad \text{و } O \left(2, \frac{1}{2} \right) \quad \text{و بالتالي : } G \left(\frac{11}{10}, \frac{11}{10} \right)$$

102 : الطريقة 1 : نعتبر O_1 مركز المستطيل $ABCI$ و O_2 مركز المستطيل $IDEF$ و مركز عطالة الصفيحة

$$\text{هو } G = \{(O_1,2)(O_2,4)\} = \{(O_1,1)(O_2,2)\}$$

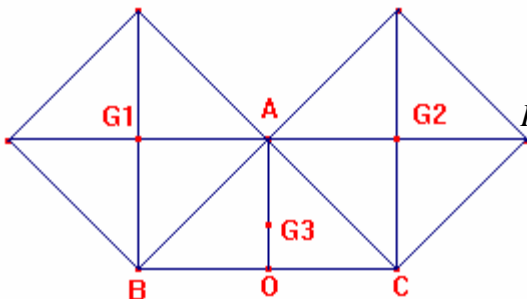
$$103 :: \text{ نحسب إحداثيي مرجح الجملة : } \{K_{300}(5,5), L_{600}(15,5), J_{100}(10,15)\}$$

$$104 (2) \quad I \in (OA) \quad \text{لأن : } A \text{ هو منتصف } [G_1G_2]$$

و G_3 ينتمي إلى (OA)

$$(3) \text{ لاحظ أن : } I = \{(G_1,36)(G_2,36)(G_3,18)\}$$

$$(4) \quad OI = \frac{14\sqrt{2}}{3}$$



105 : (أ) نعتبر مركز ثقل المثلث ABI حيث I منتصف $[AC]$ المثقل بالمعامل 3 و مركز ثقل المثلث CID المثقل بالمعامل 1

(ب) هو مركز ثقل مراكز ثقل المثلثات OAB, OAD, ODC

(ج) هو مرجح الجملة $\{(O_1, 1)(O_2, 4)\}$ حيث O_1 مركز الدائرة ذات أصغر نصف قطر

(د) نعتبر الخمس مستطيلات الأفقية المثقل بالمعامل 5 و مركز الثلاث مستطيلات الأخرى المثقلة بـ 3 : 106
يمكن اعتبار مراكز الثلاث مربعات التي تقاس المربع المنزوع المثقلة بنفس المعامل أو اعتبار مركز أحد المربعات المثقل 1 و المستطيل (إتحاد مربعين) المثقل 2
مسائل

109 : (1) الشعاعان \overline{PB} و \overline{PC} مرتبطان خطيا إذن يوجد عدد حقيقي p بحيث : $\overline{PB} = p\overline{PC}$ إذن :

$$P = \{(B, 1)(C, -p)\} \text{ و بنفس الطريقة بالنسبة لـ } Q \text{ و } R$$

$$(2) \text{ نستعمل السؤال السابق لإثبات أن : } R \begin{pmatrix} \frac{r}{r-1} \\ 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1-q} \end{pmatrix}, P \begin{pmatrix} \frac{1}{p-1} \\ \frac{p}{p-1} \end{pmatrix}$$

(3) نستعمل $\overline{PQ} // \overline{PR}$

$$\overline{PC} = \frac{1}{3} \overline{BC} \quad (4)$$

110 : (2) لاحظ أن G هو نقطة تقاطع المتوسطين في المثلث ABC إذن G هو مركز ثقله

$$(3) \text{ ب) نكتب : } K = \{(A, 1)(B, 1)(C, 1)(C, -2)\} = \{(G, 3)(C, -2)\}$$

$$(4) \text{ أ) من العلاقة (1) و باستعمال علاقة شال نجد : } \overline{AD} + 3\overline{AG} - 2\overline{AC} = \vec{0}$$

$$\text{ب) نكتب : } A = \{(D, 1)(G, 3)(C, -2)\} = \{(D, 1)(K, 1)\}$$

(5) المجموعة (E) هي محور القطعة $[AI]$

(6) أ) I_m موجود إذا و فقط إذا كان : $m \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ب) نكتب : $I_m = \{(D, m)(K, 1)\}$ و العلاقة

$$\text{الشعاعية : } \overline{mI_m D} + \overline{I_m K} = \vec{0} \text{ و علاقة شال}$$

(ج) الدالة متناقصة تماما على مجموعة تعريفها

(د) و المحل الهندسي للنقطة I_m هو المستقيم (AD) بإستثناء D

111 : (1) المحل الهندسي للنقطة G_m هو المستقيم Δ الذي يشمل A و يوازي \overline{BC}

(3) في المعلم (A, AB, AC) النقطة I هي تقاطع (BG_m) و محور الترتيب و يمكن لذلك تعيين معادلة

المستقيم (BG_m) و نفس الشيء بالنسبة للنقطة J (لكن مع محور الفواصل)

و للبرهان على أن النقط J, I, O في استقامية نعبر عن \overline{OJ} بدلالة \overline{OI}

112 : (1) لأجل $k = -1$

$$\text{أ) } \overline{MM'} = 2\overline{IA} \text{ ب) التحويل هو إنسحاب شعاعه } 2\overline{IA}$$

(2) لأجل $k = 2$: (ج) نكتب : $G = \{(A, 2)(B, -1)(C, 2)\} = \{(J, 1)(B, -1)\}$ و بالتالي $G \in (BJ)$

(د) $\overline{GM'} = -2\overline{GM}$ هـ) التحويل هو تحاكي مركزه G و نسبته (-2)

(3) أ) المجموعة (E_1) هي الدائرة التي قطرها $[B'C']$ حيث B', C' صورتا B, C بالإنسحاب

ب) المجموعة (E_2) هي الدائرة التي قطرها $[B''C'']$ حيث B'', C'' صورتا B, C بالتحاكي

113 : (1) بالتبادل الداخلي $IAC = ACD$ و $CDA = IAB$ استخلص

و باستخدام مبرهنة طاليس يمكن أن نكتب : $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AD}$ لكن : $AD = AC$ و منه النتيجة

(2) من المساواة: $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$ يمكن أن نكتب: $b\overline{IB} = c\overline{CI}$ و بالتالي: $I = \{(B,b)(C,c)\}$

$$: \text{ لأن } a\overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC} = a\overline{OA} + (b\overline{OI} + b\overline{IB} + c\overline{OI} + c\overline{IC}) = a\overline{OA} + (b+c)\overline{OI} \quad (3)$$

$$I = \{(B,b)(C,c)\}$$

و بما أن: $O = \{(A,a)(B,b)(C,c)\}$ فإن: $a\overline{OA} + (b+c)\overline{OI} = \vec{0}$ و بالتالي: $O \in (AI)$

و بطريقة مماثلة نبرهن أن: $O \in (CK)$ و $O \in (BJ)$

$$114 : (I - 1) \text{ أ و ب) لاحظ أن: مساحة } (AA'B) = \frac{1}{2}dAB = \frac{1}{2}hA'B$$

و أن: مساحة $(AA'C) = \frac{1}{2}dAC = \frac{1}{2}hA'C$ و بالتالي: $\frac{h}{d} = \frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{A'C}$

و بالتالي: $A' = \{(B,b)(C,c)\}$

(2) نتناول بنفس الطريقة

(3) نعتبر العبارة الشعاعية: $a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC}$ و نكتبها على ثلاثة طرق كما في التمرين 113

$$II \text{ (1) أ) لاحظ أن: } tg b = \frac{AK}{BK} \text{ و } tg g = \frac{AK}{KC} \text{ و بالتالي } \frac{KB}{KC} = \frac{tg g}{tg b}$$

ب) بجداء الوسطين و الطرفين نجد (استعمل الأشعة مع مراعاة التوجيه) نجد: $K = \{(C, tg g)(B, tg b)\}$

ج) نتناول بنفس الطريقة

د) انظر الفرع I

115 : I - يطلب دراسة تغيرات الدالة f

II (1) أ) المحل الهندسي للنقطة K هي القطعة المستقيمة $[AA']$ حيث $A'(4,8)$

المحل الهندسي للنقطة L هي القطعة المستقيمة $[OO']$ حيث $O'(0,8)$

ب) G_1 ثابتة لأن: $G_1\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ و بما أن: $G_2\left(\frac{4}{3}, \frac{8-k}{3}\right)$ فإن G_2 تتغير على المستقيم الذي

$$\text{معادلته: } x = \frac{4}{3}$$

(2) مساحة $(AKL) = 2k$ و مساحة $(OAL) = 2(8-k)$

(3) أ) لأجل ذلك نحسب إحداثيي النقطتين G_1 و G_2 ثم نحسب إحداثيي G مرجح النقطتين G_1 و G_2

المتقلبتين بالعددين $2k$ و $2(8-k)$ على الترتيب

ب) نتحقق أن إحداثيي النقطة G تحقق معادلة الدالة f

و مجموعة النقط G هي النقط من منحنى الدالة f و التي فواصل إحداثيها من المجال $[0, 8]$