عموميات حول الدوال

I – أنشطة

تمرين1

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x)=x^3-3x$

1- أدرس زوجية f

2- أدرس رتابة f على كل من $[0;1]$ و $[1;+\infty[$ و استنتج جدول تغيرات f على حيز تعريفها

3- استنتج مطاريف الدالة إن وجدت

تمرين2

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث f دالة زوجية و $f(x)=2x-1$ لكل $x\geq 0$

أنشئ المنحنى C_f ثم استنتج من خلال التمثيل جدول تغيرات f

تمرين3

لتكن f و g دالتين حيث $f(x)=-x^2$ و $g(x)=|x|-2$

1- تأكد أن f و g زوجيتين

أ- أنشئ C_f و C_g

ب- حدد تقاطع C_f و C_g

ج- حل مبيانيا $f(x)\leq g(x)$

2- بين أن g سالبة على $[-2;2]$

تمرين4

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

1- بين أن f مصغورة بالعدد2 على $\mathbb{R}_+^*$

استنتج باستعمال زوجية f أن مكبورة بالعدد2- على $\mathbb{R}_-^*$

2-أ- بين أن f تزايدية على $[1;+\infty[$

ب- استنتج أن f محدودة على $[2;4]$

I I – تذكير و اضافات

1- زوجية دالة

أ- الدالة الزوجية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها

نقول إن f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان :

* لكل x من D_f $\quad -x \in D_f$

* لكل x من D_f $\quad f(-x)=f(x)$

ب- الدالة الفردية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها

نقول إن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان :

* لكل x من D_f $\quad -x \in D_f$

* لكل x من D_f $\quad f(-x)=-f(x)$

خاصية

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

*- تكون f دالة زوجية إذا وفقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل للمنحنى C_f

*- تكون f دالة فردية إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

2- تغيرات دالة

أ- خاصية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f تزايدية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $\quad \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$
- تكون f تزايدية قطعا على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $\quad \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \succ 0$
- تكون f تناقصية على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $\quad \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 0$
- تكون f تناقصية قطعا على I إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 مختلفين من I $\quad \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \prec 0$

ب- الرتابة وزوجية دالة

خاصية

لتكن f دالة زوجية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J=\{-x / x \in I\}\right)$

- إذا كانت f تزايدية على I فان f تناقصية على J.
- إذا كانت f تزايدية على I فان f تناقصية على J.

خاصية

لتكن f دالة فردية و **I** مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و **J** مجال مماثل لـ **I** بالنسبة لـ **0** $\left(J = \{-x / x \in I\}\right)$

- إذا كانت f تزايدية على **I** فان f تزايدية على **J**.
- إذا كانت f تناقصية على **I** فان f تناقصية على **J**.

ملاحظة

لدراسة تغيرات دالة فردية أو زوجية يكفي دراسة تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^+$ ثم استنتاج تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^-$

3- مقارنة دالتين

أ- تعريف

نعتبر f و g دالتين معرفتين على نفس المجموعة D

نقول f أصغر أو تساوي g على D اذا كان: $f(x) \le g(x)$ مهما كانت x من D نكتب $f \le g$ على D

ب- دالة مكبورة – دالة مصغورة – دالة محدودة

لتكن f دالة معرفة على مجموعة D

*- نقول إن f مكبورة على D اذا وجد عدد حقيقي M حيث: $f(x) \le M$ لكل x من D

*- نقول إن f مصغورة على D اذا وجد عدد حقيقي m حيث: $f(x) \ge m$ لكل x من D

*- نقول إن f محدودة على D اذا وجد عددين M و m حيث: $m \le f(x) \le M$ لكل x من D

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجموعة D

نقول إن f محدودة على D اذا وجد عدد حقيقي موجب s حيث: $|f(x)| \le s$ لكل x من D

4- القيمة القصوى – القيمة الدنيا

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و a عنصرمن D_f

- نقول ان $f(a)$ هو القيمة القصوى المطلقة لـ f عند a إذا كان يحقق $f(x) \le f(a)$ لكل x من D_f

  نكتب $f(a) = \underset{x \in D_f}{Max}\, f(x)$

- نقول ان $f(a)$ هو قيمة قصوى نسبية لـ f عند a إذا وجد مجال مفتوح I مركزه a حيث $f(x) \prec f(a)$

  لكل x من I

- نقول ان $f(a)$ هو القيمة الدنيا المطلقة لـ f عند a إذا كان يحقق $f(x) \ge f(a)$ لكل x من D_f

  نكتب $f(a) = \underset{x \in D_f}{Min}\, f(x)$

- نقول ان $f(a)$ هو قيمة دنيا نسبية لـ f عند a إذا وجد مجال مفتوح I مركزه a حيث $f(x) \prec f(a)$

  لكل x من I

خاصية

*- اذا كانت f دالة رتيبة على $[a;b]$ فان $\underset{x\in[a;b]}{Max} f(x)=\sup(f(a);f(b))$

و $\underset{x\in[a;b]}{Min} f(x)=\inf(f(a);f(b))$

* ليكن $x_0\in D_f$ و $[x_0;+\infty[\cap D_f$ و $]-\infty;x_0]\cap D_f$ مجالين

- إذا كانت f تزايدية على $]-\infty;x_0]\cap D_f$ و تناقصية على $[x_0;+\infty[\cap D_f$ فان $\underset{x\in D_f}{Max} f(x)=f(x_0)$

- إذا كانت f تناقصية على $]-\infty;x_0]\cap D_f$ وتزايدية على $[x_0;+\infty[\cap D_f$ فان $\underset{x\in D_f}{Min} f(x)=f(x_0)$

III - صو رة مجموعة بدالة

تعريف

لتكن f دالة عددية للمتغير حقيقي و A جزء من D_f

صورة المجموعة A بالدالة f هي مجموعة جميع عناصر A بالدالة f

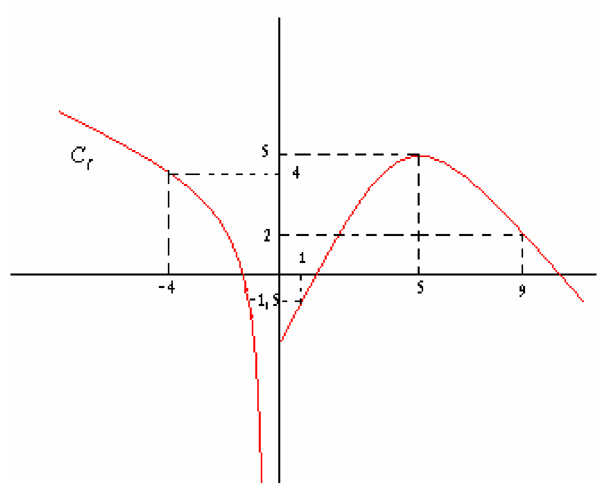
$f(A)=\{f(x)/x\in A\}$

تمرين نعتبر $f(x)=x^2$

حدد $f(]1;3])$ و $f([-2;1])$

تمرين

ليكن C_f منحنى الدالة f



حدد مبيانيا $f([1;5])$ و $f([1;9])$ و $f([-4;0[)$

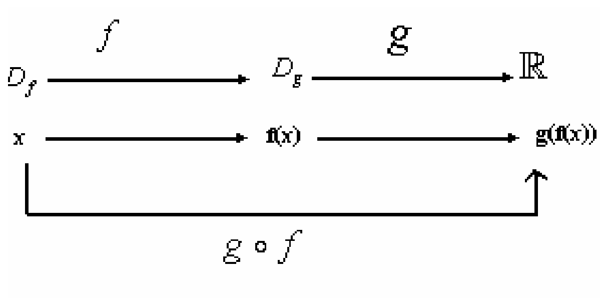
VI- تركيب دالتين

1- تعريف

لتكن f و g دالتين حيث $f\left(D_f\right) \subset D_g$

مركبة الدالتين f و g في هذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $g \circ f$ حيث:

لكل $x \in D_f$ $\quad g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$



تمرين

لتكن $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = 2x - 1$

حدد $g \circ f$ و $f \circ g$ ثم قارنهما

ملاحظة

على العموم $g \circ f \neq f \circ g$

تمرين

$f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \quad ; \quad g(x) = 2x - 1$

$$h(x) = \frac{4x^2 - 4x - 1}{8x^2 - 8x + 1}$$

1- حدد $f \circ g$; $g \circ f$; $h \circ g$

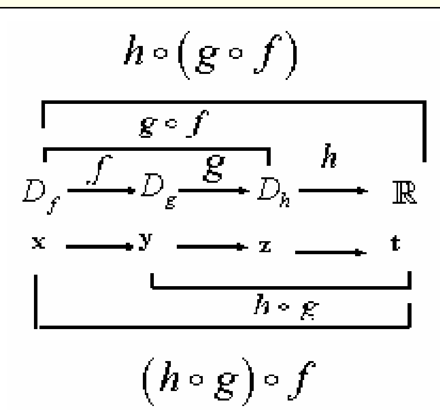
2- حدد دالة t حيث $h = t \circ g$

3 - حدد دالة l حيث $f = l \circ g$

2- خاصية

لتكن f و g و h دوال حيث $f\left(D_f\right) \subset D_g$ و $g\left(D_g\right) \subset D_h$

$$\left(h \circ g\right) \circ f = h \circ \left(g \circ f\right)$$



3-تركيب دالتين و الرتابة

لتكن f و g دالتين و I و J مجالين ضمن D_f و D_g على التوالي حيث $f(I)\subset J$

- إذا كان f تزايدية على I و g تزايدية على J فان $g\circ f$ تزايدية على I
- إذا كان f تناقصية على I و g تناقصية على J فان $g\circ f$ تزايدية على I
- إذا كان f تزايدية على I و g تناقصية على J فان $g\circ f$ تناقصية على I
- إذا كان f تناقصية على I و g تزايدية على J فان $g\circ f$ تناقصية على I

V - دراسة بعض الدوال الاعتيادية

1- الدالة التألفية

خاصية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ $f(x)=ax+b$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$

إذا كان $a\succ 0$ فان f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

إذا كان $a\prec 0$ فان f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

2- الدالة الحدودية من الدرجة الثانية

نعتبر $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $a\neq 0$. ليكن C_f منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f(x)=a\left[x^2+2\times\frac{b}{2a}x\right]+c$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

نضع $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ و $\beta=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ نحصل على $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ أي $f(x)-\beta=a(x-\alpha)^2$

ومنه معادلة C_f في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y-\beta=a(x-\alpha)^2$

نضع $\begin{cases}X=x-\alpha\\Y=y-\beta\end{cases}$ نعتبر $\Omega(\alpha;\beta)$

إذن معادلة C_f في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ هي $Y=aX^2$

إذن C_f شلجم رأسه $\Omega(\alpha;\beta)$ و محور تماثله المستقيم ذا $x=\dfrac{-b}{2a}$

خاصيات

لتكن f دالة حدودية من الدرجة الثانية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ و $a\neq 0$

* يوجد عددان عقيقيان α و β حيث $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ لكل x من $\mathbb{R}$

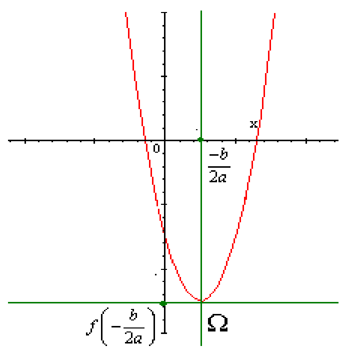
هذه الكتابة تسمى الشكل القانوني للدالة f $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ و $\beta=f(\alpha)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو شلجم رأسه $\Omega\left(-\dfrac{b}{2a};f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$ و محور تماثله المستقيم ذا $x=\dfrac{-b}{2a}$

*- إذا كان $a\succ 0$ فان:

x	$+\infty$	$\dfrac{-b}{2a}$	$-\infty$
f	$\searrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

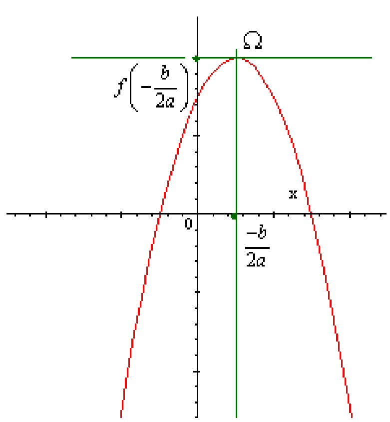
f تقبل قيمة دنيا مطلقة عند النقطة $\dfrac{-b}{2a}$



* إذا كان $a\prec 0$ فان:

x	$+\infty$	$\dfrac{-b}{2a}$	$-\infty$
f	$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

f تقبل قيمة قصوى مطلقة عند النقطة $\dfrac{-b}{2a}$



*- إذا كان $f(x_1)\times f(x_2)\prec 0$ فانه يوجد عنصر وحيد x_3 من $\left]\inf(x_1;x_2);\sup(x_1;x_2)\right[$ حيث $f(x_3)=0$

تمرين

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي $f(x)=2x^2-4x+2$ و $g(x)=-x^2+3x-2$

1- أعط جدولا تغيرات f و g

2- حدد طبيعة منحنيهما وعناصرها المميزة ثم انشئهما و حدد تقاطعهما

3- حل مبيانيا $f(x)\succ g(x)$

3- الدالة المتخاطة

لتكن f دالة عددية للمتغير حقيقي حيث $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$

- $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$

- لتكن $x\in D_f$

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}\left(\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}\right)$$

$$f(x)=\frac{a}{c}\left(\frac{x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}\right)$$

$$f(x)=\frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{bc-ad}{ca}}{x+\frac{d}{c}}\right)$$

$$f(x)=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$$

نضع $\alpha=\dfrac{-d}{c}$ و $\beta=\dfrac{a}{c}$ و $\lambda=\dfrac{bc-ad}{c^2}=\dfrac{-1}{c^2}\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ نحصل على $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x-\alpha}$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y-\beta=\dfrac{\lambda}{x-\alpha}$

نضع $\begin{cases}X=x-\alpha\\ Y=y-\beta\end{cases}$ نعتبر $\Omega(\alpha;\beta)$

إذن معادلة C_f في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ هي $Y=\dfrac{\lambda}{X}$

ومنه C_f هدلول مركزه $\Omega(\alpha;\beta)$ و مقارباه المستقيمان المعرفان بالمعادلتين $x=\alpha$ و $y=\beta$

تذكير

نعتبر $f(x)=\dfrac{a}{x}$

إذا كان $a \succ 0$ فان

x	$+\infty$	0	$-\infty$
f	↘	‖	↘

إذا كان $a \prec 0$ فان

x	$+\infty$	0	$-\infty$
f	↗	‖	↗

خاصيات

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$

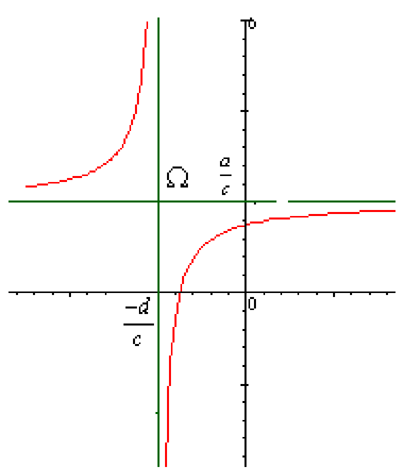
* توجد أعداد حقيقية αو β و λ حيث $f(x)=\beta+\dfrac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو هدلول مركزه $\Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ و مقارباه هما المستقيمان المعرفان

بـ $x=\dfrac{-d}{c}$ و $y=\dfrac{a}{c}$

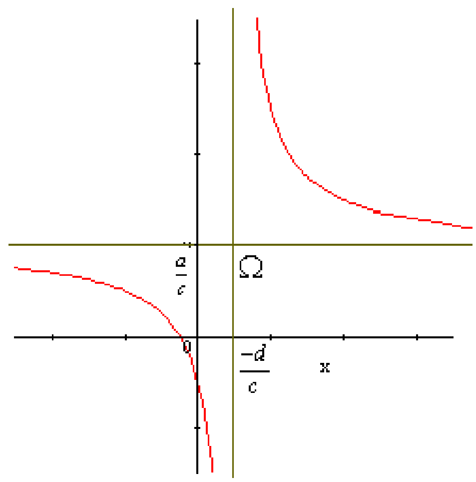
-* إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\succ 0$ فان

x	$+\infty$	$\dfrac{-d}{c}$	$-\infty$
f	↗	‖	↗



- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \prec 0$ فان

x	$+\infty$	$\frac{-d}{c}$	$-\infty$
f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$



تمرين3

نعتبر f و g الدالتين العدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

1- أعط جدول تغيرات f و جدول تغيرات g

2- أ- حدد تقاطع (C_f) و (C_g)

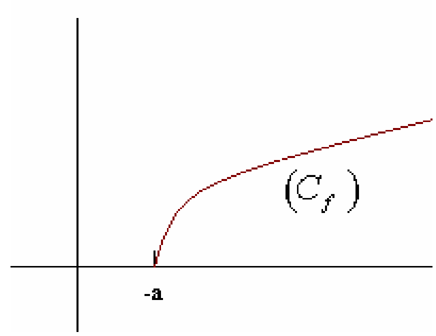
ب- أنشئ (C_f) و (C_g) في من مستوى منسوب إلى م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

3- حل مبيانيا $f(x) \geq g(x)$

4- الدالة $x \to \sqrt{x+a}$

خاصية

الدالة $x \to \sqrt{x+a}$ معرفة و تزايدية قطعا على $[-a;+\infty[$



تمرين

لتكن f **و** g **الدالتين المعرفتين بـ** $f(x)=\sqrt{x+1}$ **و** $g(x)=\sqrt{-x^2+1}$

1- أعط جدول تغيرات f **و أنشئ** (C_f)

2- حدد D_g **ثم حدد تغيرات الدالة** g **باستعمال مركب دالتين**

5- الدالة $x \to ax^3$

لتكن f **دالة عددية لمتغير حقيقي حيث** $f(x)=ax^3$

نعتبر $a \succ 0$

f **فردية**

ليكن x **و** y **من** $\mathbb{R}^+$ **حيث** $x \prec y$ **ومنه** $x^3 \prec y^3$ **وبالتالي** $ax^3 \prec ay^3$

إذن f **تزايدية قطعا على** $\mathbb{R}^+$ **وحيث** f **فردية فان** f **تزايدية قطعا على** $\mathbb{R}^-$

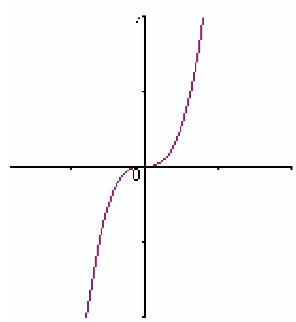
خاصية

لتكن f **دالة عددية لمتغير حقيقي حيث** $f(x)=ax^3$ **و** $a \in \mathbb{R}^*$

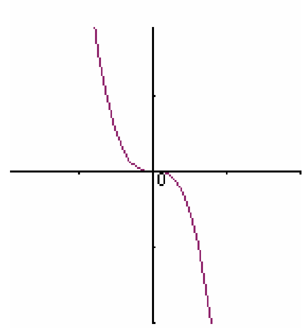
***- إذا كان** $a \succ 0$ **فان** f **تزايدية قطعا على** $\mathbb{R}$

***- إذا كان** $a \prec 0$ **فان** f **تناقصية قطعا على** $\mathbb{R}$

***-** $a \succ 0$



***-** $a \prec 0$



تمارين

تمرين 1

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي حيث $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

1- حدد D_f و أدرس زوجية الدالة f.

2- أدرس رتابة f على كل من المجالين $[1;+\infty[$ و $]0;1[$

3- أعط جدول تغيرات f على D_f و استنتج مطاريف الدالة f

تمرين 2

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=-x^3+3x$

1- تأكد أن f دالة فردية.

2- بين أن f تناقصية على $[1;+\infty[$ و تزايدية على $[0;1]$

3- بين أن f تقبل قيمة قصوى نسبية عند 1 .

استنتج أن f تقبل قيمة دنيا نسبية عند 1-.

4- حدد $\sup\limits_{x\in[2;3]}(f(x))$; $\inf\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};1\right]}(f(x))$

تمرين 3

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{|x|+1}{x^2+1}$

1- بين أن f زوجية.

2- أ- بين أن f محدودة على $[1;+\infty[$

ب- بين أن f مصغورة بالعدد 1 على $[-1;0]$

3- أدرس رتابة f على كل من $\left]-1+\sqrt{2};+\infty\right[$ و $\left[0;-1+\sqrt{2}\right]$ ثم أعط جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

استنتج مطاريف الدالة f.

تمرين 4

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ $f(x)=x^2-3x$; $g(x)=\dfrac{-x+3}{x+2}$

C_f و C_g المنحنيين الممثلين لـ f و g على التوالي في مستوى منسوب إلى معلم م.م.

1- ضع جدول تغيرات كل من f و g

2- حدد تقاطع C_f و C_g.

3- أنشئ C_f و C_g.

4- حل ميانيا المتراجحة $f(x) \geq g(x)$

تمرين5

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ $g(x) = x^3 - 1 \quad ; \quad f(x) = \sqrt{x+2}$

و C_f و C_g المنحنيين الممثلين لـ f و g على التوالي في مستوى منسوب إلى معلم م.م.

1- أعط جدول تغيرات كل من f و g

2- أنشئ C_f و C_g.

3- بين مبيانيا أن المعادلة $x^3 - \sqrt{x+2} - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 \prec \alpha \prec \frac{3}{2}$

تمرين6

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ

$$g(x) = -3x^2 - 2x + 1 \quad ; \quad f(x) = \frac{-3x+1}{2x+1}$$

1- تأكد أن $\frac{1}{3}$ حل للمعادلة $f(x) = g(x)$

2- أنشئ C_f و C_g.

3- أ- حدد مبيانيا $f\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}\right\}\right) \quad ; \quad f\left(\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[\right) \quad ; \quad f\left(\left]\frac{-1}{2};1\right[\right)$

$$g\left(\mathbb{R}^+\right) \quad ; \quad g\left(\left]-2;-1\right[\right) \quad ; \quad g\left(\left]-1;\frac{1}{3}\right[\right)$$

4- حدد جبريا $g\left(\mathbb{R}^+\right) \quad ; \quad f\left(\left]\frac{-1}{2};1\right[\right) \quad ; \quad g\left(\left]-1;\frac{1}{3}\right[\right)$

تمرين7

نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{x-2}$

بين مبيانيا أن $f\left([3;+\infty[\right) = [1;+\infty[$ ثم بين ذلك جبريا

تمرين 8

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ $g(x) = x^2 + 1 \quad ; \quad f(x) = 3x - 1$

1- حدد $g \circ f \quad ; \quad f \circ g$

2- باستعمال تغيرات f و g حدد تغيرات $f \circ g$ و $g \circ f$

تمرين9

نعتبر f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي المعرفتين بـ

$$g(x) = -x^2 + 2x + 2 \quad ; \quad f(x) = \sqrt{x+1}$$

1- ضع جدول تغيرات كل من f و g

2- أحسب $g \circ f(x)$ لكل x من $[-1;3]$

3- أدرس تغيرات $g \circ f$ على $[-1;3]$

تمرين10

$$g(x) = 2x - 1 \quad ; \quad f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \qquad h(x) = \frac{4x^2 - 4x - 1}{8x^2 - 8x + 1}$$

1- حدد $f \circ g$; $g \circ f$; $h \circ g$

2- حدد دالة t حيث $h = t \circ g$

3- حدد دالة l حيث $f = l \circ g$