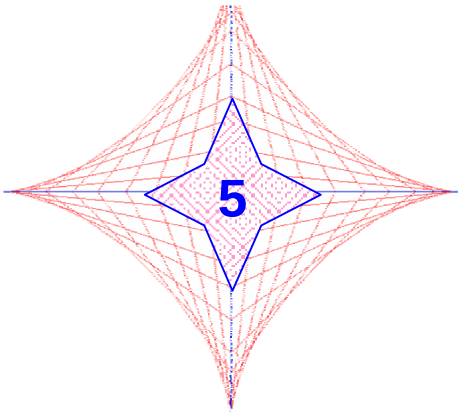


النهايات
السلوك التقاربي لمنحني

الكفاءات المستهدفة

- حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$.
- معرفة نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$.
- حساب نهاية دالة ناطقة عند عدد a حيث a حد لمجموعة تعريف هذه الدالة.
- التفسير البياني لنهاية غير منتهية لدالة عندما يؤول x إلى x_0.
- معرفة شرط وجود مستقيم مقارب يوازي أحد محوري المعلم.
- تبرير أن مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب.البحث عن مستقيم مقارب مائل.
- استعمال النظريات الأولية(المجموع، الجداء، المقلوب و حاصل القسمة) لحساب نهايات.
- حساب نهايات بإزالة عدم التعيين.

- بعد تقديم دراسة نهايات دالة عند أطراف مجموعة تعريفها يبقى الهدف الأساسي من هذا الفصل إتمام تكوين المتعلم و جعله أكثر استقلالية فيما يخص الدراسة التامة لدالة انطلاقا من عبارتها الجبرية ثم تمثيلها بيانيا و ذلك من خلال دراسة الدوال المنصوص عليها في البرنامج و هي الدوال كثيرات الحدود و الدوال الناطقة البسيطة.
- يتم كذلك في هذا الفصل دراسة السلوك التقاربي لمنحني دالة من خلال تعيين المستقيمات المقاربة له (إن وجدت) و الموازية لمحور الفواصل أو محور التراتيب انطلاقا من حساب النهايات و كذلك تعيين المستقيم المقارب المائل (إن وجد) إما بعملية البحث عليه أو استنتاجه انطلاقا من العبارة الجبرية للدالة.

الأنشطة

النشاط 1 :

الهدف : نهاية غير منتهية لدالة عند عدد.

1)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	-
$f(x)$	↗	‖	↘

2)

x	2.9	2.99	2.999	2.9999
$f(x)$	10^2	10^4	10^6	10^8
x	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	10^8	10^6	10^4	10^2

3) كلما اقترب x من 3 إلا و أخذ $f(x)$ قيما كبيرة جدا.

4) إذا أخذنا مثلا $3<x\le 3+10^{-4}$ فإن $0<(x-3)^2\le 10^{-8}$ و منه $\frac{1}{(x-3)^2}\ge 10^8$

5) إذا كان $3-\frac{1}{\sqrt{A}}\le x\le 3+\frac{1}{\sqrt{A}}$ مع $x\neq 3$ فإن $0<|x-3|\le\frac{1}{\sqrt{A}}$ ومنه $0<(x-3)^2\le\frac{1}{A}$ و بالتالي

$$f(x)\ge A$$

النشاط 2 :

الهدف : نهاية غير منتهية لدالة عند عدد من اليمين(اليسار).

1)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	‖	-
$g(x)$	↘	‖	↘

2)

x	0.9	0.99	0.999	0.9999
$g(x)$	-10	-100	-1000	-10^4
x	1.0001	1.001	1.01	1.1
$g(x)$	10^4	1000	100	10

3) كلما اقترب x من 1 فإن $|f(x)|$ تأخذ قيما كبيرة أكثر فأكثر.

4) بفرض $1<x\le 1+10^{-10}$ يكون $0<x-1\le 10^{-10}$ و منه $g(x)\ge 10^{10}$.

5) يكفي تعويض، في البرهان السابق، 10^{10} بـ A.

النشاط 3 :

الهدف : نهاية غير منتهية عند مالانهاية.

3) نلاحظ أن $k(x)$ تأخذ قيما كبيرة جدا أكثر فأكثر كلما اقترب x من العدد 1.

4) $x^2\ge A$ يعني $x\le-\sqrt{A}$ أو $x\ge\sqrt{A}$. و بالتالي يكفي أخذ $B=\sqrt{A}$.

النشاط 4 :

الهدف : نهاية منتهية عند مالانهاية.

1) $a=2$ و $b=1$.

2)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	‖	-
$h(x)$	↘	‖	↘

3)

x	-10	-10^3	-10^5	-10^7
$h(x)$	1.9	1.999	1.999999	1.9...
x	10	10^3	10^5	10^7
$h(x)$	2.1	2.001	2.00001	2.00...

4) نلاحظ أنه كلما أخذت $|x|$ قيما كبيرة أكثر فأكثر فإن $h(x)$ تقترب من العدد2.

5) بفرض $x\ge 10^6$ يكون $0<\frac{1}{x}\le 10^{-6}$ و بالتالي:

$2<2+\frac{1}{x}\le 2+10^{-6}$.

6) $2<h(x)\le 2+e$ يعني $x\ge\frac{1}{e}$. نأخذ $B\ge\frac{1}{e}$.

النشاط 5 :

الهدف : نهاية منتهية عند عدد.

1)

x	1.997	1.998	1.999
$f(x)$	2.997	2.998	2.999
x	2.001	2.002	2.003
$f(x)$	3.001	3.002	3.003

2) نلاحظ: كلما اقترب x من 2 إلا و اقترب $f(x)$ من 3

3) من أجل $x\neq 2$، $f(x)=x+1$

4) $0\le|f(x)-3|<e$ يعني $0\le|x-2|<e$ و بالتالي يكفي أخذ $a\le e$.

الأعمال الموجهة

دراسة دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة:

الهدف: التعرف على خواص دالة كثير حدود من الدرجة3

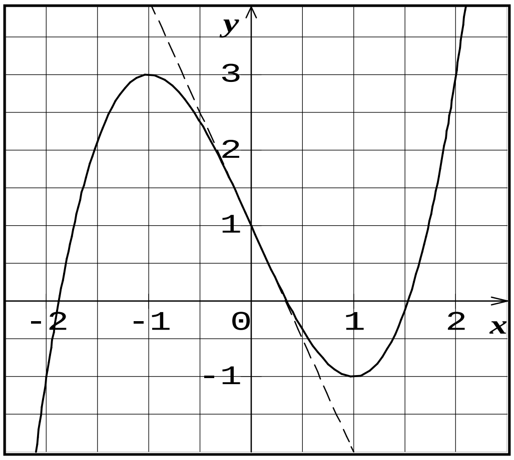
المثال: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(1-3/x^2+1/x^3\right)$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

$(\Delta): y=-3x+1$

$\left[f(x)-(-3x+1)\right]=x^3$

x	-1		0		$+1$
$f(x)-y$		-	0	+	



قواعد تغيير المعلم: $x=X$ و $y=Y+1$

النقطة$\Omega(0,1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f).

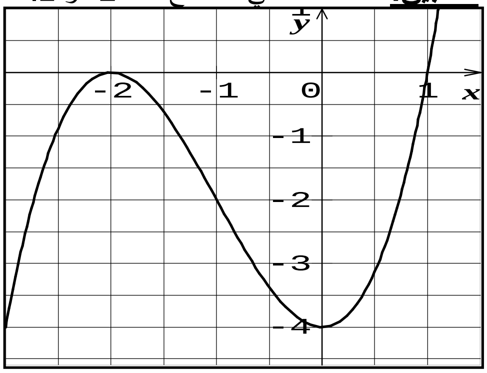
نبين أن $f(0.3)\times f(0.4)<0$

0.3 و 0.4 هما قيمتان مقربتان للعدد a.

لدينا: $f(1.5)\times f(1.6)<0$ و بالتالي

$1.5<b<1.6$. 1.5 قيمة مقربة إلى0.1 بالنقصان لـِ b.

التطبيق: فاصلتا نقطتي التقاطع هما 2- و 1.



مركز التناظر هي النقطة $(-2,-1)$

دراسة دالة تناظرية:

الهدف: التعرف على منحني دالة تناظرية و خواصه

التعريف: إذا كان $c=0$ و $d\neq 0$ فإن f دالة تآلفية.

إذا كان $ad-bc=0$ فإن f دالة ثابتة.

$$D_f=\left]-\infty,-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c},+\infty\right[$$

المثال:

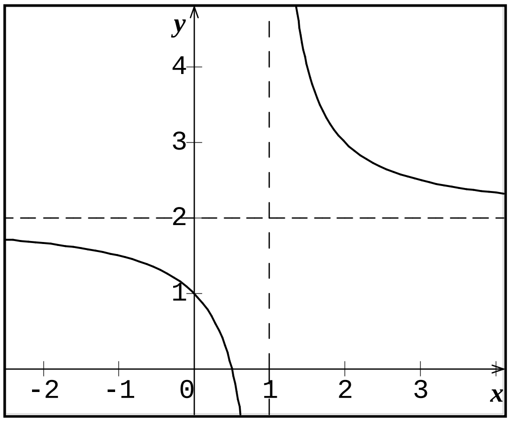
$D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$a=2$ و $b=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	-	
$f(x)$	2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

المستقيمان المقاربان: $x=1$ و $y=2$

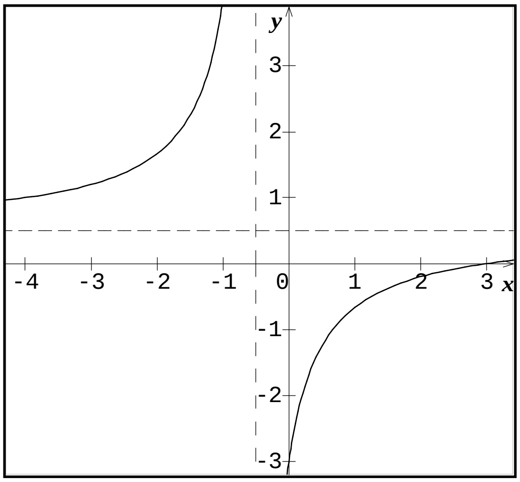
$f'(x)=-1$ يعني $x=0$ أو $x=2$.



قواعد تغيير المعلم: $x=X+1$ و $y=Y+2$

معادلة (C_f) بالنسبة إلى المعلم $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$ هي $Y=\dfrac{1}{X}$

التطبيق:



مركز التناظر هي النقطة $(-0.5;0.5)$

تــمــاريـــن

1 صحيح.

2 صحيح.

3 صحيح.

4 خطأ.

5 خطأ.

6 (3

7 (2

8 (3

9 (3

10

$D_f = \Re$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

11

$D_f = \Re^*$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty \; , \; \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$

.

12

$D_f = [-2,1[\cup]1,+\infty[$

$f(-2) = -1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = +\infty \; , \; \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = -\infty$

13 تصحيح:

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} k(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

المنحنى الأول يمثل الدالة h.

المنحنى الثاني يمثل الدالة k.

المنحنى الثالث يمثل الدالة g.

المنحنى الرابع يمثل الدالة f.

14

(1 $-\frac{1}{5}$ (2 1

(3 $+\infty$ (4 $-\infty$.

15

(1 9   (2 9.

(3 $+\infty$ (4 $+\infty$.

16

(1 0   (2 0   (3 1.

(4 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (5 $-\infty$ (6 $+\infty$

17

(1 0 .   (2 $\sqrt{3}$.

(3 3 .   (4 $+\infty$.

18

(1 $-\frac{1}{3}$

(2 $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ <}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ >}} f(x) = +\infty$

(3 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = +\infty$

(4 $+\infty$.

(5 $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x) = +\infty$

(6 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = +\infty$

19

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \; , \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \; , \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \; , \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

(4 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \; , \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

(5 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \; , \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

(6 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \; , \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

20

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \; , \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \; , \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \; , \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

(4 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2 \; , \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$

21

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \; , \; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = +\infty$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \; , \; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = 3$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \; , \; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = -\infty$

(4 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \; , \; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+g(x)) = -\infty$

22

1) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\times g(x))=+\infty$.

2) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\times g(x))=0$

3) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\times g(x))=2$

23

1) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=0$

3) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=+\infty$

24

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

4) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-3$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

5) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

6) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-3$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

7) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

8) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-2$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

9) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

10) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-4$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

25

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

3) لا يمكن حساب النهاية.

4) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

5) لا يمكن حساب النهاية.

6) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

7) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

8) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

9) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

10) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور الفواصل.

26

1) $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=-\infty$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

2) $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

3) $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

4) $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

5) $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=+\infty$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

6) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

منحنى f لا يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

7) $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

8) $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=+\infty$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

27

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

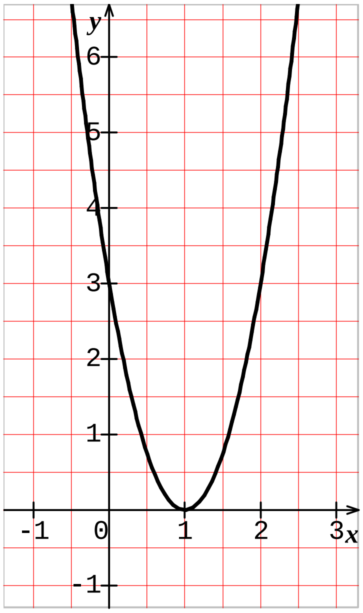
5) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

منحنى f يقبل مقارب موازي لمحور التراتيب.

28

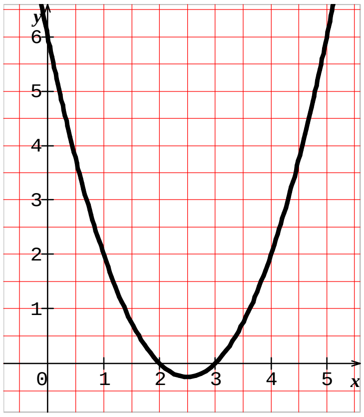
1)

x	-		1		+
f'(x)		−	0	+	
f(x)	+	↘	0	↗	+



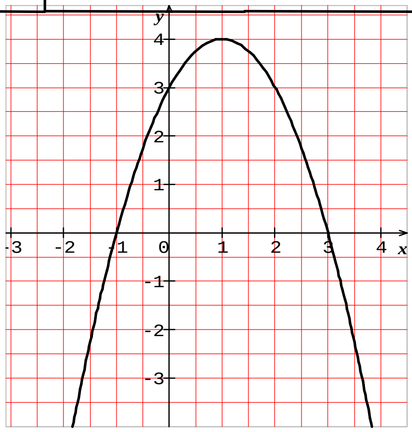
2)

x	-		$\frac{5}{2}$		+
f'(x		−	0	+	
f(x)	+	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	+



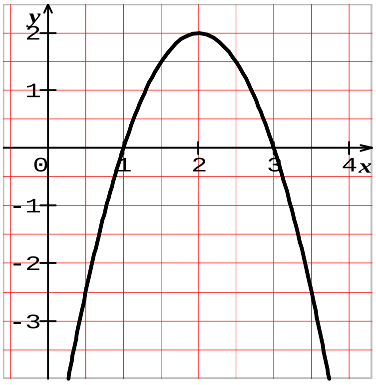
3)

x	-		1		+
f'(x		+	0	−	
f(x)	-	↗	4	↘	-



4)

x	-∞		2		-∞
f'(		+	0	−	
f(x)	-∞	↗	2	↘	-∞



29 (1

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{367}{265}$	↘	$\frac{163}{265}$	↗	$+\infty$

أولا نغير رمز النقطة ليصبح مثلا ω ثم نتبع طريقة تغيير المعلم:بحيث نكتب معادلة (C_f) في المعلم $(w\ ;I\ ;J)$ و تصبح:

$F(X)=X^3-X$ حيث: $X=x+0$ و $Y=y+1$

و في الأخير نثبت أن F دالة فردية

(2

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{19}{3}$	↘	$-\frac{13}{3}$	↗	$+\infty$

إثبات المركز يتم بنفس الطريقة السابقة.

(3

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

إثبات المركز يتم بنفس الطريقة السابقة.

30 (1

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'(x)		+	‖	+	
f(x)	2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=-1$ و $y=2$.

(2

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	‖	−	
f(x)	0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=0$ و $y=0$.

(4

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	‖	+	
f(x)	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=0$ و $y=1$.

(5

x	$-\infty$		5		$+\infty$
f'(x)		−	‖	−	
f(x)	2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=5$ و $y=2$.

(6

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'(x)		−	‖	−	
f(x)	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $X=2$ و $y=0$.

31 (1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	‖	+	
f(x)	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

بما أن:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0$$

فإن: (Δ) مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f.

(2

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	$-\frac{647}{169}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{373}{204}$	↗	$+\infty$

نفس الطريقة لإثبات المقارب المائل.

(3

x	$-\infty$		$-\frac{169}{408}$		1		$\frac{408}{169}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{169}{204}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{816}{169}$	↗	$+\infty$

نفس الطريقة لإثبات المقارب المائل.

(4

x	$-\infty$		$\frac{239}{408}$		2		$\frac{577}{169}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{239}{204}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1154}{169}$	↗	$+\infty$

نفس الطريقة لإثبات المقارب المائل.

32

المنحنى الأول يمثل الدالة f.
المنحنى الثاني يمثل الدالة g.
المنحنى الثالث يمثل الدالة h.
المنحنى الرابع يمثل الدالة k.
المنحنى الخامس يمثل الدالة l.
المنحنى السادس يمثل الدالة m.

33

1 (1   0 (2 $-\frac{1}{2}$ (3

$\frac{1}{2}$ (4   4 (5   12 (6.

(7 $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = +\infty$

3 (8 $\frac{1}{12}$ (9.

(10 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$

(11 $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$

34

0 (1 $-\infty$ (2 $+\infty$ (3

0 (4 $-\frac{3}{4}$ (5   0 (6

$\frac{1}{2}$ (7 $+\infty$ (8.

35

(1

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

تستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

(2

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{28}{9}$	↗	-3	↗	12	↗	$+\infty$

تستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

(3

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗	$+\infty$

تستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

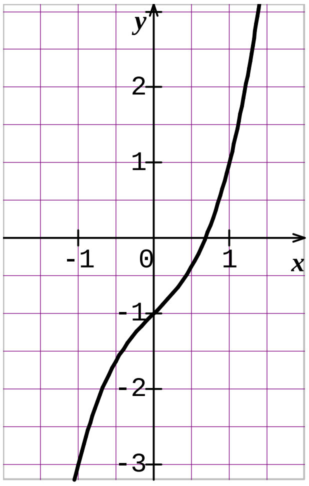
(4

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	-1	↘	$-\infty$

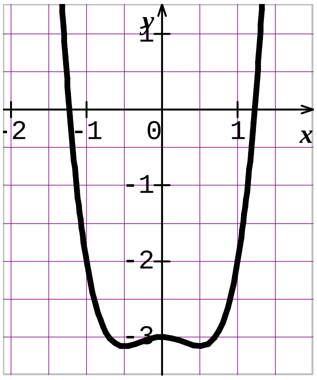
تستخدم الآلة الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.

36

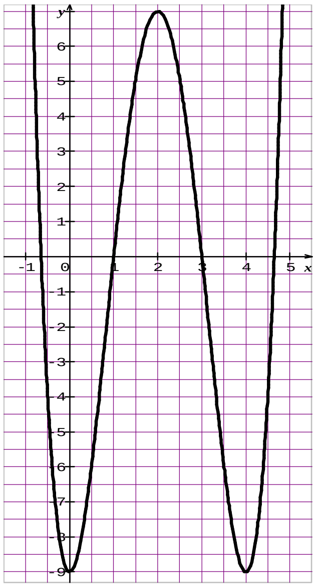
(1



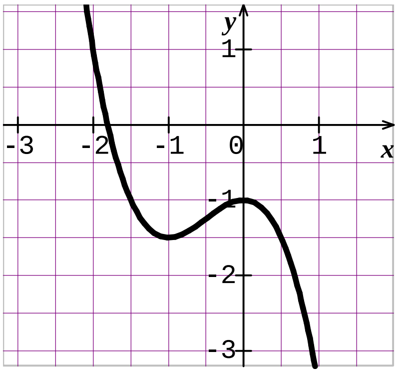
(2



(3

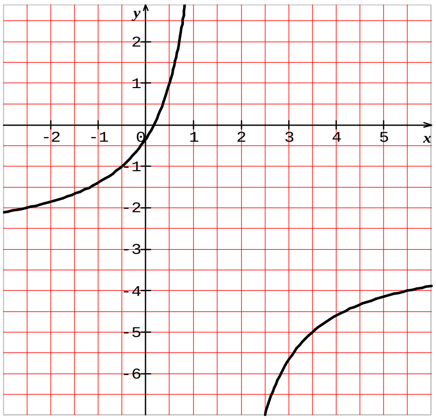


(4



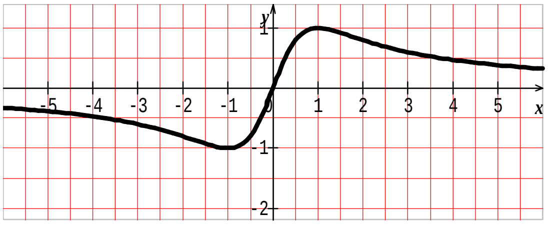
37 (1

x	$-\infty$	$3/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 3$



(2

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow -\infty$



الأجزاء 3) 4) 5) 6) 7) يتم الإجابة عليها بنفس الطريقة.

38 1) ليكن x عدد حقيقي من D:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$$

2) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D:

$\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}>0$ و $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$.......... (1)

$\sqrt{x+3}+\sqrt{x}>\sqrt{x}$ و $\sqrt{x+3}>0$

أي

$\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}<\frac{3}{\sqrt{x}}$.......... ......(2)

من (1) و (2) نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D: $0\leq f(x)\leq\frac{3}{\sqrt{x}}$

3) بماأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x}}=0$ فإن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

39 (1

x	10^4	10^6	10^{10}
f(x)	1,01	1	1
x	10^{12}	10^{20}	10^{40}
f(x)	1	1	1

2) لدينا من أجل العدد الحقيقي x الموجب تماما:

$$x^2\le x^2+x+1 \quad \text{و} \quad x^2+x+1\le x^2+2x+1$$

أ ي

$$x^2\le x^2+x+1\le (x+1)^2$$

و منه:

$$x\le\sqrt{x^2+x+1}\le x+1$$

3) لدينا من أجل العدد الحقيقي x الموجب تماما:

$$x\le\sqrt{x^2+x+1}\le x+1$$

بحساب مقلوب العبارة نجد.

$$\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\le\frac{1}{x}$$

بضرب النتيجة بـ $x+\sqrt{x}$ مع التبسيط نجد:

$$1-\frac{1}{x+1}\le f(x)\le 1+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

4) بماأن:

$$\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{\sqrt{x}}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}1-\frac{1}{1+x}=1$$

فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

40 لدينا من أجل العدد الحقيقي x من D:

$$-1\le \sin x\le +1$$

$$2\le 3+\sin x\le 4$$

بالقسمة على x نجد:

$$\frac{2}{x}\le f(x)\le\frac{4}{x}$$

2) بماأن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$$

فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

41 1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D :

$$-1\le \sin x\le +1$$

$$x^2-1\le x^2+\sin x\le x^2+1$$

بالقسمة على x نجد:

$$\frac{x^2-1}{x}\le f(x)\le\frac{x^2+1}{x}$$

2) بماأن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x}=+\infty$$

فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

42 (1 $0\le f(x)\le\frac{2}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$

لا يمكن حساب النهاية لما x *يؤول إلى* +¥.

(2 $\frac{-x}{x^2+3}\le f(x)\le\frac{x}{x^2+3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ لأن:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2+3}=0\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+3}=0$$

بنفس الطريقة يتم الإجابة على 3) و 4).

43 1) بماأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته y=3.

2) حسب إشارة الفرق f(x) – y:

لما]1 , + ¥[x Î فإن (C_f) يقع أعلى (D).

لما]-¥ , 1[x Î فإن (C_f) يقع أسفل (D).

44 *(1 a=-2 , b=3.*

إجابة السؤالين 2) و 3) مثل التمرين 43 .

45 1) بماأن:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)-y=0$$

فإن: *(C) يقبل (D) كمستقيم مقارب .*

2) دراسة إشارة الفرق: f(x) – y.

46 *(1 a=2 , b=6 , c=17*

نفس الطرق السابقة للإجابة على 2)

47 1)) الدالة *h* هي التي توفر الشروط السابقة.

2) لا يمكن تعيين قيمة *a* من أجل *x=1*

(الدالة k هي التي تمثيلها البياني (C) .

$(C_f)\cap(d)=\{\ \}$

2) $(C_f)\cap(xx')=\left\{\left(-\frac{1}{2},0\right)\right\}$

$(C_f)\cap(yy')=\{(0,1)\}$

49 1) المستقيم المقارب المائل معادلته $y=x-2$

المستقيم المقارب العمودي معادلته $x=-2$

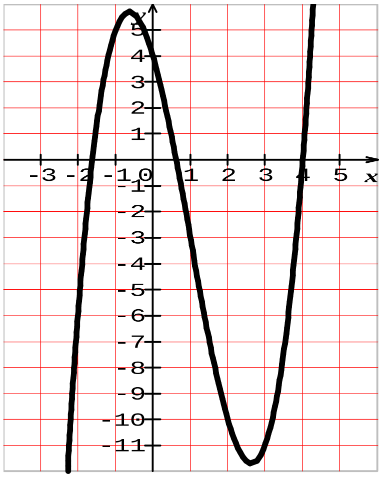
2) $(C_f)Ç(C_g)=\{(-3,-9)\}$.

50 1)

x	$-\infty$		$-\frac{188}{297}$		$\frac{495}{188}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{491}{86}$	↘	$-\frac{1007}{86}$	↗	$+\infty$

2) سبق التطرق إلى كيفية إثبات مركز التناظر.

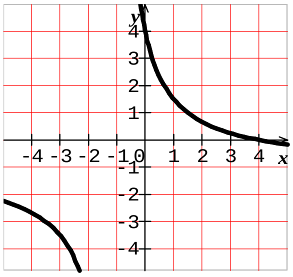
3)



4)

x	$-\infty$				$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	
$f(x)$	-1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1

5)



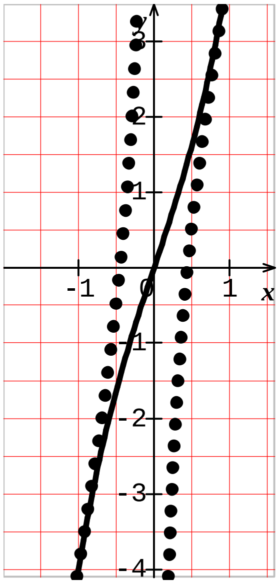
6) النقطتان المتناظرتان بالنسبة للنقطة S هما: $(4 ، 0)$ و $(-2 ، -6)$

51 1)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	‖	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$



3) (d): $y=5x$.

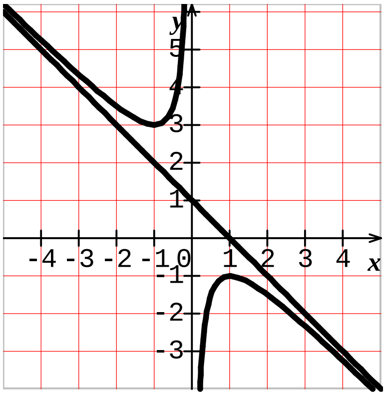
x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$-\frac{1}{x}$	+	−
الوضعية	(C_g) فوق المستقيم	(C_g) تحت المستقيم

4) $(C_f)Ç(C_g)=\{(-1,-4)\ ,(1,4)\}$

52 1) سبق كيفية إثبات وجود مستقيم مقارب مائل و دراسة الوضعية النسبية.

(2

x	-∞		-1		0		1		+∞
f'(x)		−	0	+	‖	+	0	−	
f(x)	+∞	↘	3	↗	+∞ ‖ -∞	↗	-1	↘	-∞



3) لما m Î]-1,1[لا يوجد حلول.
لما m=-1 حل مضاعف x=1.
لما m=1 حل مضاعف x=-1.
لما m Î]-¥,-1[È]1,+¥[يوجد حلين.

4) $I\left(\frac{-m+1}{2}, m\right)$

5) المماس يوازي محور الفواصل معناه:
و منه: $f'(x_0)=0$
$A(-1\ ,\ 3)\ ,\ B(1\ ,\ -1)$.
A، B و I في استقامية معناه:
$\vec{AB}\ ,\ \vec{AI}$ متوازيان. و هذا محقق.

53

1) ليكن x∈D و -x∈D:
لدينا $f(-x)=f(x)$ إذن f زوجية.

(2

x	0		$\sqrt{2}$		+∞
f'(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖ +∞	↘	$\frac{9}{2}$	↗	+∞

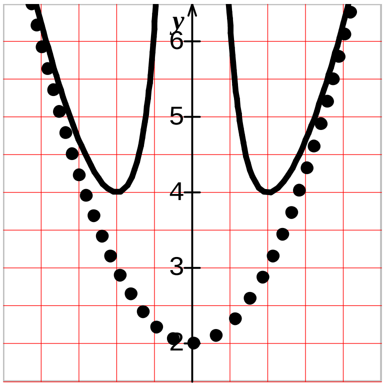
3) معادلة المستقيم المقارب هي: x=0.

4) $MN=\frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} MN=0\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} MN=0$.

5) (C) يقع أعلى (P) .

(6



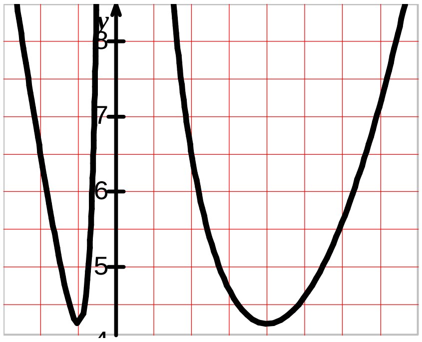
54

1) $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\right)^2$

(2

x	-∞		$-\frac{1}{2}$		0		2		+∞
f'(x)		−	0	+	‖	−	0	+	
f(x)	+∞	↘	$\frac{17}{2}$	↗	+∞ ‖ +∞	↘	$\frac{17}{2}$	↗	+∞

(3



(4

x	-∞		$-\frac{1}{2}$		0		2		+∞
g'(x		−	0	+	‖	−	0	+	
g(x)	+∞	↘	$\frac{134}{65}$	↗	‖	↘	$\frac{134}{65}$	↗	+∞

5) المسافة AM ممثلة بالدالة g و تكون لها قيمة
6) يتعامد المماس لـ (H) في النقطة M_1 و المستقيم
(AM_1) إذا كان جداء معاملي توجيههما يساوي
-1 و هذا محقق لأن: $-\frac{1}{4}\times 4=-1$
نفس الشئ بالنسبة للحالة الثانية.

55

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	1 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

56 (1 $D_f=\hat{A}$

(2 انطلاقا من $-1\leq \cos x \leq +1$ يمكن حصر $f(x)$ ثم الإجابة على السؤال (3.

57 (1 $x=1$, $y=-2$, $y=3$.

(2 يتم الرسم.

58 (1 $D_f = \Re$ -{1}

(2 أ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\infty$

ب/ $x=1$ معادلة المقارب العمودي.

(3 تصحيح: $x\neq1$

$a=-1$, $b=0$, $c=-2$

(4 معادلة المقارب المائل هي: $y=x-1$

(5 $(C)\cap(d)=\{(0\ ,\ 1),(2\ ,\ 3)\}$

59 (1 $j(h)=h^2+3h+1$

(2 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{h\to0} h(x)=1$

60 تصحيح: المقام هو: $x+2$

(1

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=+\infty$

(2 $a=2$, $b=-1$, $c=3$

(3 $y=2x-1$

(4 يمكن التحقق من دلك.

(5 يتم دراسة الوضعية كما سبق.

61 (1 $a=1$, $b=0$, $c=2$, $d=-1$

(2 $x=1$, $x=-1$, $y=x$

(3 دراسة الوضعية تم التطرق لها سابقا.

62 (1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

(C) يقبل مستقيم مقارب معادلته: $y=2$

(2 أ/ $a=2$, $b=-3$, $c=-1$

ب/ دراسة الوضعية تتم كما سبق.

63 (1 لدينا: $f(x)-1=\dfrac{u(x)}{x^2}$

و كدلك: $0\leq\dfrac{u(x)}{x^2}\leq\dfrac{1}{x}$

و منه: $|f(x)-1|\leq\dfrac{1}{x}$

(2 بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

64 (1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(2 من أجل نل عدد حقيقي x:

$f'(x)=x^2-x-2$

لما $x\in]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$ فإن: $f'(x)>0$

لما $x\in]-1,2[$ فإن: $f'(x)<0$

(3

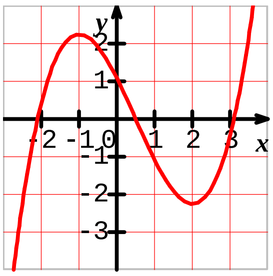
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{17}{12}$	↘	$-\frac{27}{12}$	↗	$+\infty$

(4 تم التطرق لإثبات مركز التناظر.

(5 للمعادلة $f(x)=0$ ثلاث حلول هي:

$$x=\frac{1}{2}\ ,\ x=\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\ ,\ x=\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$$

(6



(7 سبق التعرض لمثل هدا السؤال.

65 (1 نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$-x\in\Re$ و $f(-x)=-f(x)$ إدن f فردية.

(2

$f(x+2\pi)=x+2\pi-\sin x$

$f(x+4\pi)=x+4\pi-\sin x$

$f(x+k2\pi)=x+k2\pi-\sin x$

(3

x	0		2π
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2π

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$0 \le f'(x) \le 2$ و منه f متزايدة على $\Re$.

$-1 \le -\sin x \le 1$

(4 $x-1 \le x-\sin x \le 1+x$

$x-1 \le f(x) \le 1+x$

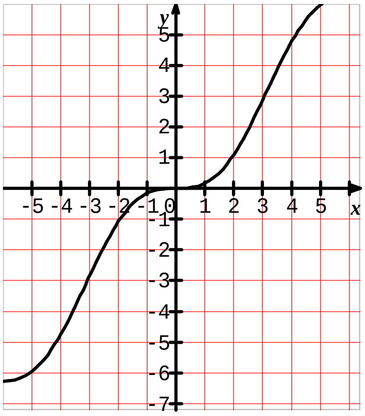
(5 لدينا:

$f(x) \ge x-1$ و $x-1 \ge A$

إذن: $f(x) \ge A$

حسب تعريف النهاية لما x يؤول إلى $+\infty$

فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



66 تصحيح: المقام هو: x-c

(1 معادلة المستقيم المقارب هي:x=c.

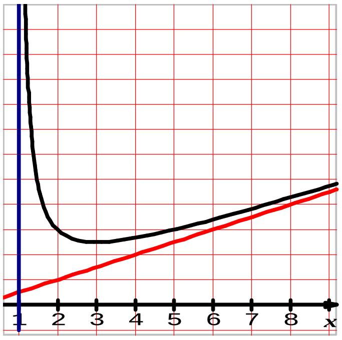
و عليه c=1.

(2 لدينا: $f(3)=\dfrac{5}{2}$ و منه:$6a+b=5$.

(3 لدينا: $f'(3)=0$ و منه: $4a-b=0$.

(4 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{x-1}$

(5 (C_f) يقع أعلى (D)



67 (1 $D_f=\mathbb{R}-\{1,-1\}$

(5 $f'(x)=\dfrac{x^4-3x^2-18x}{(x^2-1)^2}$

$P(x)=x(x-3)(x^2+3x+6)$

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

68 (I (1 $D_f=\Re$

لما $x\in[0,+\infty[$ فإن: $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

لما $x\in]-\infty,0]$ فإن: $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$

(2 f دالة فردية.

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

(4 لما $x\in[0,+\infty[$ فإن:

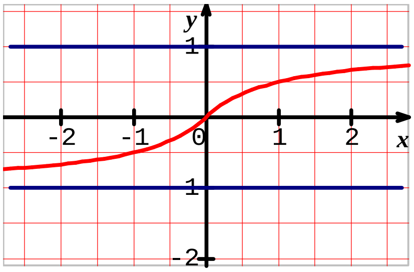
$f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f(x)}{x}=1$

و منه f قابلة للإشتقاق عند 0.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

(5



6) لما $y\geq 0$: $x=\frac{y}{1-y}$.

لما $y\leq 0$: $x=\frac{y}{1+y}$.

7) الحل الوحيد على $\Re$ للمعادلة $f(x)=y$ هو

$x=\frac{y}{1-|y|}$.

II) 1) $D_g=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

2) لما $x\in]-\infty,-1[\cup]-1,0]$ فإن: $g(x)=\frac{x}{1+x}$

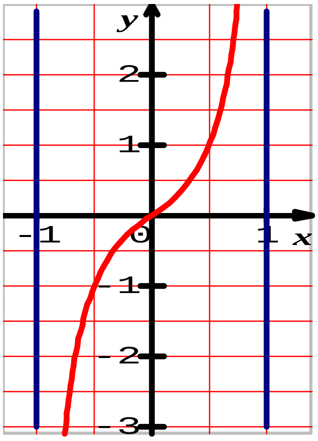
لما $x\in[0,1[\cup]1,+\infty[$ فإن: $g(x)=\frac{x}{1-x}$

3) $\lim\limits_{x \underset{<}{\longrightarrow} 1} g(x)=+\infty$

4) $g'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

$$\lim_{x \underset{<}{\longrightarrow} 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0}\frac{g(x)}{x}=1$$

x	-1 1
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

5) 

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال]1- ، 1[:

$(f\circ g)(x)=x$

6) نستنتج أن المنحنيين متناظرين بالنسبة

إلى (D) .