عموميات حول الدوال العددية

I- تذكير

أنشطة

1 - حدد مجموعة تعريف الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x في الحالات التالية

$f(x)=\frac{5}{4-x}$ (a ; $f(x)=\sqrt{2x+1}$ (b

$f(x)=\frac{3x^2-2}{x^2+2x-3}$ (c ; $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{3-x}}$ (d

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي .

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية التي تقبل صورة بالدالة f نرمز لها بـ D_f

2- قارن الدالتين العدديتين f و g لمتغير حقيقي في الحالتين التاليتين

$f(x)=x-1$; $g(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ (a

$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$; $g(x)=\frac{2}{x(x+2)}$ (b

تعريف

لتكن f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي

تكون f و g متساويتين اذا وفقط اذا كان لهما نفس مجموعة التعريف D و لكل x من D $f(x)=g(x)$

3- نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث $f(x)=\frac{x^2-4}{|x|-2}$

أ- حدد D_f

ب - حدد أرتوبي A و B نقطتين من المنحنى C_f أفصوليهما على التوالي 0 و 3

ج- هل النقط $C(2;0)$; $D(-4;6)$; $E(4;-6)$ تنتمي إلى C_f

د – أكتب $f(x)$ بدون رمز للقيمة المطلقة ثم أنشئ المنحنى C_f في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي .

التمثيل المبياني للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط $M(x;f(x))$ حيث $x\in D_f$ نرمز لها بالرمز C_f $C_f=\{M(x;f(x))/x\in D_f\}$

ملاحظة

$M(x;y)\in C_f$ تكافئ $y=f(x)$ و $x\in D_f$

العلاقة $y=f(x)$ تسمى معادلة ديكارتية للمنحنى C_f

II - زوجية دالة

1- الدالة الزوجية

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها

نقول ان f دالة زوجية اذا تحقق الشرطان التاليان :

* لكل x من D_f $-x\in D_f$
* لكل x من D_f $f(-x)=f(x)$

تمرين

هل الدالة العددية f زوجية في الحالات التالية

$f(x)=x^3+1$ (b ; $f(x)=|x|-\frac{1}{x^2}$ (a

$\begin{cases} f(x)=2x & 0\le x\prec 4 \\ f(x)=-2x & x\prec 0 \end{cases}$ (c

ب التمثيل المبياني لدالة زوجية

f دالة زوجية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

لتكن $M(x;f(x))$ من C_f و M' مماثلتها بالنسبة لمحور الأراتيب .

ومنه $M'(-x;f(x))$

و حيث أن f زوجية فان $-x\in D_f$ و $f(-x)=f(x)$

ومنه $M'(-x;f(-x))$ و بالتالي $M'\in C_f$

اذن C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

العكس

نبين أنه إذا كان C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب فان f دالة زوجية

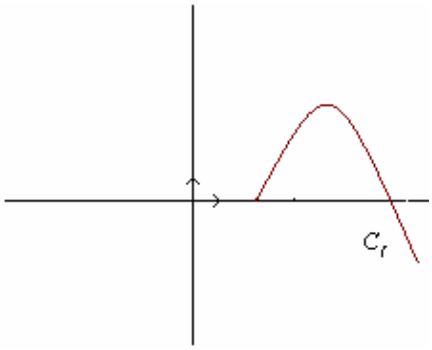
خاصة

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

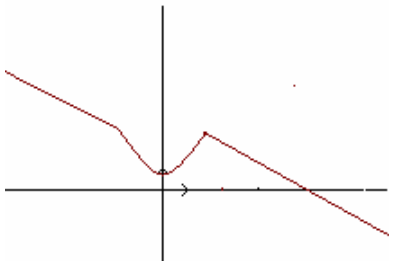
تكون f دالة زوجية إذا وفقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل للمنحنى C_f

تمرين

1- f دالة زوجية أتمم المنحنى C_f



2- f دالة عددية منحناها كما يلي



هل f زوجية

2- دالة فردية

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f حيز تعريفها

نقول ان f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان :

* لكل x من D_f $-x\in D_f$

* لكل x من D_f $f(-x)=-f(x)$

تمرين

هل الدالة العددية f فردية في الحالات التالية

$f(x)=x^3+1$ (b ; $f(x)=\frac{1}{x^3}$ (a

$\begin{cases} f(x)=2x-1 & 0\le x\le 2 \\ f(x)=-2x-1 & 2\prec x\prec 0 \end{cases}$ (c

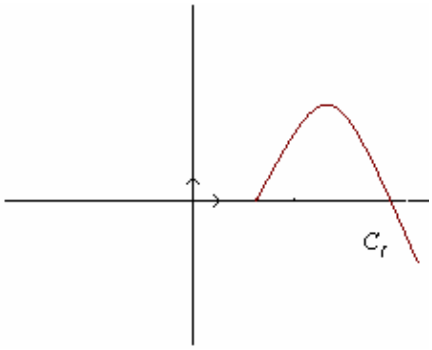
ب-التمثيل المبياني لدالة فردية خاصية

لتكن f دالة عددية و C_f منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

تكون f دالة فردية إذا وفقط إذا كان المنحنى C_f متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

تمرين

f دالة فردية أتمم المنحنى C_f



تمرين

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث $f(x)=\frac{|x|+x^2}{x}$

حدد D_f وبين أن f فردية ثم أنشئ C_f

ملاحظة يمكن للدالة أن تكون غير فردية و غير زوجية

III- تغيرات دالة

1- منحى تغيرات دالة

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f تزايدية علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 منI إذا كان $x_1\prec x_2$ فان $f(x_1)\le f(x_2)$
- تكون f تزايدية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 منI إذا كان $x_1\prec x_2$ فان $f(x_1)\prec f(x_2)$
- تكون f تناقصية علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 منI إذا كان $x_1\prec x_2$ فان $f(x_1)\ge f(x_2)$
- تكون f تناقصية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 منI إذا كان $x_1\prec x_2$ فان $f(x_1)\succ f(x_2)$

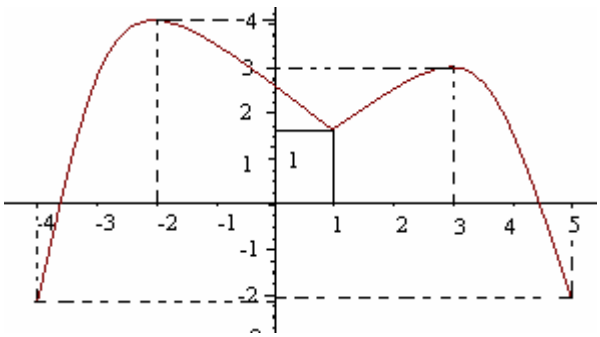
مثال أدرس تغيرات الدالة f حيث $f(x)=-2x+1$

تمرين نعتبر $f(x)=|x-2|$

أدرس منحى تغيرات f على كل من $]-\infty;2]$ و $[2;+\infty[$

أنشئ C_f

تمرين من خلال التمثيل المبياني للدالة f حدد تغيرات f على المجال $[-4;5]$



2- الدالة الرتبة

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

نقول ان f رتيبة على I إذا و فقط إذا كان f إما تزايدية علىI و إما تناقصية على I.

ملاحظات

- يمكن لدالة أن تكون غير رتيبة على مجال I
- دراسة رتابة f على مجال I يعني تجزيءI إلى مجالات تكون فيها f رتيبة. ونلخص الدراسة في جدول يسمى جدول التغيرات

3- معدل التغير

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و x_1 وx_2 عنصرين مختلفينمن D_f

العدد $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ يسمى معدل تغير الدالة f بين x_1 وx_2.

مثال نعتبر $f(x)=x^2-3x$

أحسب معدل تغيرات f بين 2 و 1-

ب- معدل التغير و الرتابة

خاصة

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن D_f

- تكون f تزايدية علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$
- تكون f تزايدية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\succ 0$
- تكون f تناقصية علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq 0$
- تكون f تناقصية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل x_1 وx_2 مختلفين منI $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\prec 0$

تمرين

نعتبر $f(x)=x^2-4x-1$

أدرس رتابة f على كل من المجالين $]2;+\infty[$; $]-\infty;2]$

و أعط جدول تغيرات f

تمرين

نعتبر $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$

أدرس رتابة f

4- الرتابة وزوجية دالة

أ- خاصة

لتكن f دالة زوجية و I مجال ضمن $D_f\cap\mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J=\{-x/x\in I\}\right)$

- إذا كانت f تزايدية على I فان f تناقصية على J.
- إذا كانت f تناقصية على I فان f تزايدية على J.

البرهان

لتكن f دالة زوجية وx_1 وx_2 عنصرين مختلفين من J

ومنه يوجد x_1' وx_2' من I حيث $x_1'=-x_1$ و$x_2'=-x_2$

$$\frac{f(x_2')-f(x_1')}{x_2'-x_1'}=\frac{f(-x_2)-f(-x_1)}{-x_2+x_1}=-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

إذن تغيرات f على I عكس تغيرات fعلى J

أ- خاصية

لتكن f دالة فردية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J = \{-x / x \in I\}\right)$

- إذا كانت f تزايدية على I فان f تزايدية على J.
- إذا كانت f تناقصية على I فان f تناقصية على J.

ملاحظة

لدراسة تغيرات دالة فردية أو زوجية يكفي دراسة تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^+$ ثم استنتاج تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^-$

تمرين

نعتبر $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

1- حدد D_f و أدرس زوجية f

2- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها

VI- القيمة القصوى – القيمة الدنيا

تعريف

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي

- نقول ان f تقبل قيمة قصوى عند a إذا وجد مجال I ضمن D_f و $a \in I$ حيث لكل $x \in I - \{a\}$ $f(x) \prec f(a)$
- نقول ان f تقبل قيمة دنيا عند a إذا وجد مجال I ضمن D_f و $a \in I$ حيث لكل $x \in I - \{a\}$ $f(x) \succ f(a)$

اصطلاح

كل من قيم القصوى و قيم الدنيا تسمى مطاريف لدالة f

تمرين نعتبر $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

1- أدرس زوجية f أحسب $f(1)$

2- لكل x من $]0;+\infty[$ $f(x) \geq 2$

3- حدد قيمة دنيا و قيمة قصوى لـ f إذا وجد

خاصية

ليكن a و b و c أعداد حقيقية حيث $a \prec b \prec c$ و f دالة عددية لمتغير حقيقي

إذا كانت f تزايدية على $[a;b]$ و تناقصية على $[b;c]$ فان f تقبل قيمة قصوى عند b

إذا كانت f تناقصية على $[a;b]$ و تزايدية على $[b;c]$ فان f تقبل قيمة دنيا عند b

V - دراسة تغيرات دالة

دراسة تغيرات دالة f يعني

- تحديد D_f
- دراسة رتابة f وتلخيصها في جدول التغيرات

تمرين

أدرس تغيرات f حيث $f(x) = \dfrac{-2x+3}{x-1}$

تمرين

أدرس تغيرات f حيث $f(x) = x^3 - 3x$

حدد مطاريف الدالة f