5 – الحساب التكاملي

الكفاءات المستهدفة

1- توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى.

2- توظيف القيمة المتوسطة لدالة.

3- استعمال التكامل بالتجزئة.

4- توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية.

5- حساب حجوم لمجسمات بسيطة.

6- توظيف الحساب التكاملي لحل مشكلات بسيطة

تصميم الدرس

تعريف

أنشطة

الدرس

تكنولوجيا الإعلام و الاتصال

تمـــاريــن و مشكـــــلات

الحـــلـــــــــــول

تعريف:

ثابت بن قرة.. إقليدس العرب

ولد ثابت بن قرة (221 هـ = 834 م) في حران من أرض الجزيرة شمال العراق، بتركيا الآن. برع ثابت في علم الهندسة حتى قيل عنه إنه أعظم هندسي عربي على الإطلاق، وقال عنه "يورانت ول": إنه أعظم علماء الهندسة المسلمين؛ فقد ساهم بنصيب وافر في تقدم الهندسة، وهو الذي مهد لإيجاد علم التكامل والتفاضل، كما استطاع أن يحل المعادلات الجبرية بالطرق الهندسية، وتمكن من تطوير وتجديد نظرية فيثاغورث، وكانت له بحوث عظيمة وابتكارات رائدة في مجال الهندسة التحليلية؛ فقد ألف كتابا في الجبر، شرح فيه العلاقة بين الجبر والهندسة، وكيفية التوفيق بينهما، واستطاع أن يعطي حلولا هندسية لبعض المعادلات التكعيبية، وهو ما أفاد علماء الغرب فيما بعد في تطبيقاتهم وأبحاثهم الرياضية في القرن السادس عشر.

يجدر بنا أن نذكر أن ثابت بن قرة مهد لحساب التكامل وذلك عندما وجد حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره.

من مؤلفات ثابت الرياضية والهندسية:

- كتاب في الشكل الملقب بالقطاع. - كتاب في مساحة الأشكال المسطحة والمجسمة.
- كتاب في قطوع الأسطوانة وبسيطها. - مساحة المجسمات المكافية.

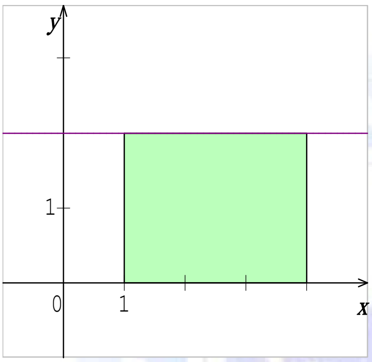
أنشطة:

النشاط1

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1cm$

لتكن الدالة f المعرفة في $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x)=2$



(C) تمثيلها البياني للدالة f و

S مساحة الجزء تحت المنحنى (C)

وبين العددين 1 و 4

1. احسب بـ cm^2 المساحة S
2. عين F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$
3. احسب $F(4)-F(1)$
4. ماذا تستنتج؟

الحـــل:

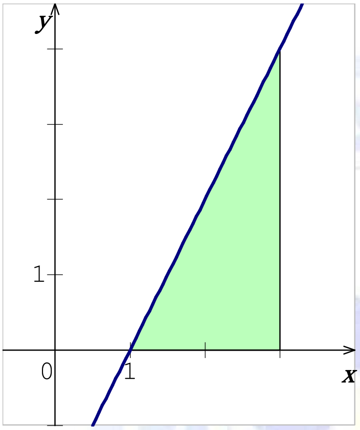
1. لدينا: $S=3\times 2=6cm^2$
2. دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي: $F(x)=2x+c$ حيث c ثابت حقيقي.
3. لدينا: $F(4)-F(1)=2(4)-2(1)=8-2=6$
4. نستنتج أن $F(4)-F(1)$ هي المساحة S المستطيل الملون.

النشاط2

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ووحدة الطول $1cm$

لتكن الدالة f المعرفة في $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-2$ و (C) تمثيلها البياني

وS مساحة الجزء تحت المنحنى (C)وبين العددين 1و 3 .



1. احسب بـــ cm^2 المساحة S
2. عين F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$
3. احسب $F(3)-F(1)$
4. ماذا تستنتج؟
5. احسب الحجم V ، الجزء المتولد عن دوران S حول محور الفواصل.

الحـــل :

1. لدينا: $S=\dfrac{4\times 2}{2}=4\,cm^2$.
2. دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي: $F(x)=x^2-2x$.
3. $F(3)-F(1)=\left(3^2-2\times 3\right)-\left(1^2-2\times 1\right)=3+1=4$.
4. نستنتج أن $F(3)-F(1)$ هي المساحة S للمثلث الملون.
5. حساب الحجم:

عند دوران S حول محور الفواصل ينتج مخروط دوراني نصف قطر قاعدته $f(3)$ و ارتفاعه 2 وعليه: $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2.h$

إذن: $V=\frac{1}{3}\pi\left[\ f(3)\right]^2\times 2$

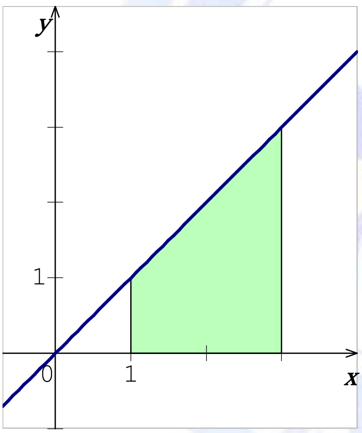
و منه: $V=\frac{1}{3}\pi[4]^2\times 2$ أي: $V=\frac{32}{3}\pi\ cm^3$

النشاط3

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ وحدة الطول $1cm$

ولتكن الدالة f المعرفة في $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x$

(C) تمثيلها البياني للدالة f و S مساحة الجزء تحت المنحنى (C) وبين العددين 1 و 3

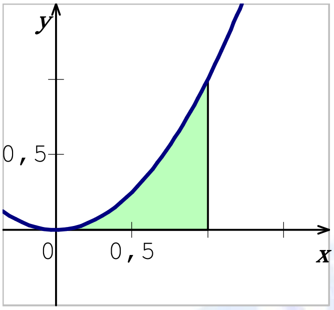


1. احسب بـــ cm^2 المساحة S.
2. عين F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
3. احسب $F(3)-F(1)$.
4. ماذا تستنتج؟ .

الحل :

1. $S=\frac{(3+1)\times 2}{2}=4cm^2$
2. دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي : $F(x)=\frac{1}{2}x^2$
3. $F(3)-F(1)=\frac{1}{2}(3)^2-\frac{1}{2}(1)^2=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$
4. نستنتج أن $F(3)-F(1)$ هي المساحة S لشبه المنحرف الملون.

النشاط4



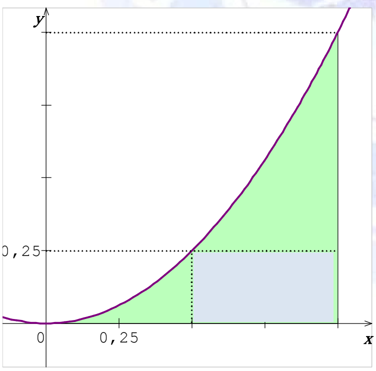
نعتبر الدالة العددية f المعرفة في المجال $[0;1]$ بـــ: $f(x)=x^2$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس.

نهدف من هذا النشاط إلى حساب مساحة الحيز S تحت المنحني (C) و المستقيم ذو المعادلة $x=1$ و محور الفواصل.

ملاحظة:

لا يمكن حساب المساحة السالفة الذكر باستعمال القواعد الهندسية .
لإيجاد مقاربة لحساب هذه المساحة نتبع المراحل التالية:

1. في المرحلة الأولي:



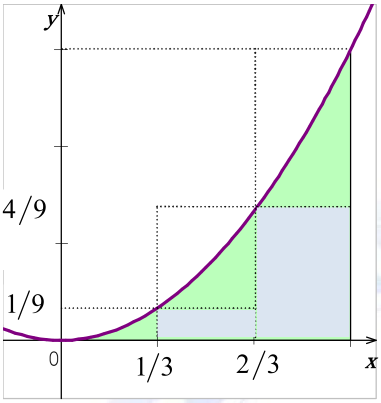
نقسم المجال $[0;1]$ إلى مجالين طول كل منهما 0,5.

الأول $[0,5\,;1]$ و الثاني $[0;\ 0,5]$

و منه $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\leq S\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$

أي: $\frac{1}{2}\left[0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\leq S\leq\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{2}\right)^2\right]$

ومنه: $\frac{1}{8}\leq S\leq\frac{5}{8}$



2. في المرحلة الثانية:

نقسم المجال $[0;1]$ إلى ثلاث مجالات

طول كل منها $\frac{1}{3}$ فتكون:

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}\leq S\leq\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times 1$$

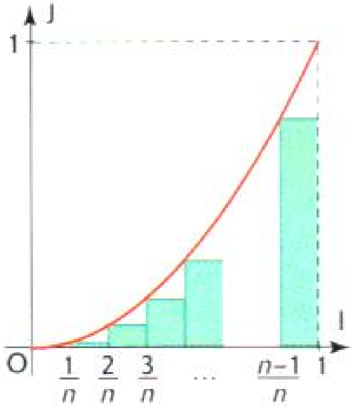
أي: $\frac{1}{3}\left[0^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]\leq S\leq\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{3}\right)^2\right]$

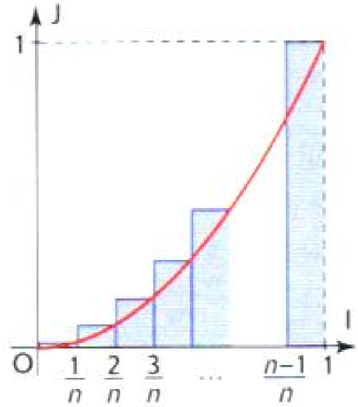
و منه: $\frac{5}{27}\leq S\leq\frac{14}{27}$

3. في المرحلة الثالثة:

نقسم المجال $[0;1]$ إلى n مجال طول كل منها $\frac{1}{n}$ و هي من الشكل

$\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ حيث: $0\leq k\leq n-1$ مع n و k عددين طبيعيين.





$$\frac{1}{n}\left[0^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+......+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]\leq S\leq\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+......+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$$

و بالتالي:

ن $$\frac{1}{n^3}\left(0^2+1^2+2^2+......+(n-1)^2\right)\leq S\leq\frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+......+n^2\right)$$

ضع من أجل كل n طبيعي غير معدوم:

$$u_n=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+......+(n-1)^2)$$

$$v_n=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+......+n^2)$$

لدينا:

$$u_n=\frac{1}{6}\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \quad \text{و} \quad v_n=\frac{1}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

لنبرهن أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

من أجل كل n طبيعي غير معدوم. $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-3n^2 - 5n - 1}{6n^2(n+1)^2}$

لدينا $v_{n+1} - v_n < 0$ إذن (v_n) متناقصة تماما, كذلك

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{3n^2 + n - 1}{6n^2(n+1)^2}$ إذن: $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه: (u_n) متزايدة تماما. لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

و منه المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان و تتقاربان نحو نفس النهاية.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{3}$

الخلاصة:

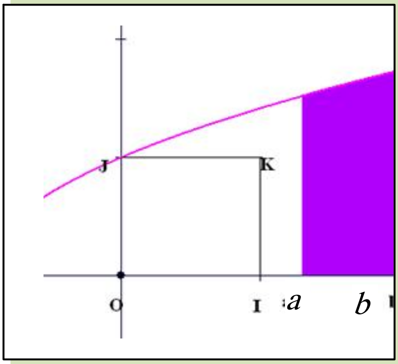
مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل و المستقيمين ذو المعادلتين $x = a$ و $x = b$ تساوي $\dfrac{1}{3}$ وحدة مساحة

الدالة الأصلية للدالة $f : x \mapsto x^2$ على $\mathbb{R}$ هي : $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$

و منه: $F(b) - F(a) = \dfrac{1}{3}$

الـــــــدرس:

تعريف 1:



f دالة مستمرة و موجبة على مجال I ، a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \le b$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;I,J)$، F دالة أصلية للدالة f على I وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OIKJ$

المساحة D للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل و المستقيمين ذي المعادلتين $x=a$ و $x=b$ هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.

تعريف 2:

f دالة مستمرة وموجبة على مجال I ، a و b عددان حقيقيان من I, العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$, حيث F دالة أصلية للدالة f على I يسمى تكامل من a إلى b للدالة f و نرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)dx$.

خاصية:

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I، a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \le b$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;I,J)$ و F دالة أصلية للدالة f على I , المساحة D للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C)

والمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ و $x=b$ و $y=0$ هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)\,dx$.

ملاحظات :

في الكتابة : $\int_a^b f(x)\,dx$ التي تشمل المتغير x يمكن تبديل x بأي حرف آخر ما عدا a و b و f التي تدل أشياء معينة.

فنكتب : $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(z)\,dz$

- نكتب عادة : $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=\left[F(x)\right]_a^b$

-يعرف D على أنه مجموعة النقط M من المستوى ذات الإحداثيتين $(x\,;\,y)$ حيث : $a\leq x\leq b$ و $0\leq y\leq f(x)$

مثال 1:

احسب التكامل الآتي : $\int_1^2\left(x^2-4x+5\right)dx$

الحل:

الدالة f : $x\mapsto x^2-4x+5$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و عليه تقبل دوال أصلية F معرفة بالعبارة:

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x+\lambda\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

و منه : $\int_1^2\left(x^3-4x+5\right)dx=\left[F(x)\right]_1^2=F(2)-F(1)$

$$=\frac{8}{3}-8+10-\frac{1}{3}+2-5=\frac{7}{3}-1=\frac{4}{3}$$

مثال2 :

المستوى منسوب إلى المعلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث

$\|\vec{i}\|=3$, $\|\vec{j}\|=2$ (الوحدة هي cm)

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x)=x^2+4$.

(C) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

احسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=0$, $x=1$, $y=0$

الحل :

الدالة f مستمرة و موجبة على $[0\ ;\ 1]$ وعليه تعطى المساحة A

بالعبارة : $A=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x^2+4)\,dx$

لكن الدوال الأصلية للدالة f تعطى بالعبارة $g(x)=\frac{x^3}{3}+4x+c$

و منه :
$$A=\left[\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^1\times 3\times 2cm^2$$

$$A=\left[\left(\frac{(1)^3}{3}+4(1)\right)-\left(\frac{0^3}{3}+4(0)\right)\right]_0^1\times 6cm^2$$

$$A=\left(\frac{13}{3}\right)\times 6cm^2$$

$$A=26cm^2$$

مبرهنة:

إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال I فإن دالتها الأصلية التي تنعدم من أجل القيمة a من I هي الدالة F المعرفة على I كما يلي :

من أجل كل $x \in I$ $\quad F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

البرهان:

f مستمرة على I، a عدد حقيقي من I. نعتبر الدالة العددية F

المعرفة على I كما يلي: $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

نعلم أنه إذا كانت H دالة أصلية للدالة f على I فإنه من أجل كل عدد حقيقي x من I: $F(x)=H(x)-H(a)$

لدينا من أجل كل عدد x من I: $F'(x)=H'(x)$

ولدينا: $F(a)=H(a)-H(a)=0$

وعليه F هي الدالة الأصلية للدالة f على I و التي تنعدم عند a.

خواص:

خاصية 1:

f دالة مستمرة على I. من أجل كل الأعداد الحقيقية a، b و c من I لدينا :

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$$

البرهان:

بما أن f مستمرة على I فإنه تقبل دالة أصلية لها F على I.

من أجل كل الأعداد الحقيقية a، b و c من I لدينا:

$$F(c)-F(a)=\left[F(c)-F(b)\right]+\left[F(b)-F(a)\right]$$

و عليه : $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$

و منه : $\int_b^c f(x)\,dx+\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

حالات خاصة:

أ) إذا كان : $a=b=c$ يكون : $\int_a^a f(x)\,dx+\int_a^a f(x)\,dx=\int_a^a f(x)\,dx$

و بالتالي : $\boxed{\int_a^a f(x)\,dx=0}$

ب) إذا كان $c=a$ يكون:

$$\int_a^a f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^a f(x)\,dx$$

$$0=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^a f(x)\,dx$$

و بالتالي: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx}$

خاصية 2 :

f دالة مستمرة على I و k عدد حقيقي كيفي. من أجل كل العددين الحقيقيين a و b من I لدينا : $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

البرهان :

بما أن f مستمرة على I فإنها تقبل دالة أصلية F على I.

و عليه الدالة الأصلية للدالة kf على I هي kF

ومنه : $\int_a^b kf(x)\,dx = [kF(x)]_a^b = kF(b) - kF(a)$

$$= k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)\,dx$$

خاصية 3 :

g, f دالتان مستمرتان على مجال I .

مهما يكن العددان الحقيقيان a و b من I لدينا :

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

البرهان :

f و g دالتان مستمرتان على المجال I . وعليه تقبل كل منهما دالة أصلية على I و لتكن F و G على الترتيب في المجال I . من أجل العددين الحقيقيين a و b من I لدينا :

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = [F(x) + G(x)]_a^b$$

لأن دالة أصلية للدالة $f+g$ هي $F+G$ ومنه :

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = [F(b) + G(b)] - [F(a) + G(a)]$$

$$= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)]$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

ملاحظات:

- إذا f زوجية فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
- إذا f فردية فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
- إذا f دورية و دورها T فإن: $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$

خاصية 4 :

f دالة مستمرة على مجال I . a و b عددان حقيقيان من I حيث: $a \leq b$. إذا كانت الدالة f موجبة على المجال $[a;b]$ يكون: $\int_{a}^{b} f(x)dx \geq 0$.

البرهان:

الدالة f مستمرة على I و عليه تقبل دالة أصلية F على I

بما أن الدالة f موجبة على I فإن الدالة F متزايدة على I لأن f هي الدالة المشتقة للدالة F .

و منه نستنتج أنه إذا كان a و b عددان من I فإنه:

إذا كان $a \leq b$ فإن $F(a) \leq F(b)$ أي: $F(b) - F(a) \geq 0$

و عليه: $\int_{a}^{b} f(x)dx \geq 0$

ملاحظة :

- إذا كانت الدالة f سالبة على المجال $[a;b]$ فإن: $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

- إذا كان من أجل كل عدد x من $[a;b]$: $f(x) \leq g(x)$

حيث f و g دالتان مستمرتان على $[a;b]$ فإن: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

خاصية 5:

الدالة f مستمرة على $[a;b]$.

أ) إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من $[a;b]$ يوجد عددان حقيقيان

m و M بحيث: $m \leq f(x) \leq M$

فإن: $m(a-b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(a-b)$

ب) إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من $[a;b]$ يوجد عدد حقيقي M

بحيث : $0 \leq |f(x)| \leq M$

فإن : $0 \leq \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(a-b)$

البرهان:

لدينا : $m \leq f(x) \leq M$ من أجل كل عدد حقيقي x من $[a;b]$.

حسب الخاصية و الملاحظة السابقة: $\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$

إذن: $[mx]_a^b \leq \int_a^b f(x)dx \leq [Mx]_a^b$

و بالتالي : $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

جـ) بما أن : $0\le\left|f(x)\right|\le M$ فإن: $-M\le f(x)\le M$

و عليه : $\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le M\left|b-a\right|}$

مبرهنة القيمة المتوسطة لدالة على مجال :

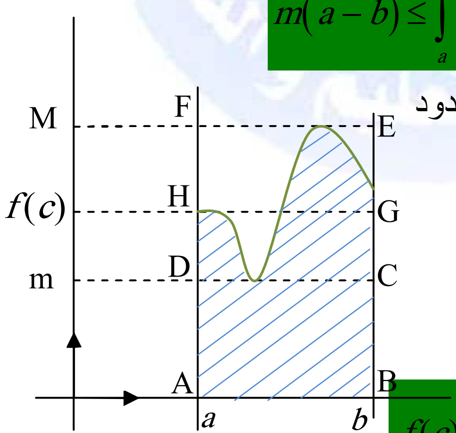
من أجل كل دالة f معرفة ومستمرة على مجال $[a\ ;\ b]$ يوجد على الأقل عدد حقيقي c من $[a\ ;\ b]$ بحيث: $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

العدد الحقيقي $f(c)$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a\ ;\ b]$.

التفسيرات الهندسية:

لتكن f دالة مستمرة و موجبة و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد.

* الحصر $\boxed{m(a-b)\le\int_a^b f(x)dx\le M(a-b)}$



يعني أن مساحة الحيز المشطب محدود من الأسفل بمساحة المستطيل $ABCD$ ، و محدودة من الأعلى بمساحة المستطيل $ABEF$.

* المساواة : $\boxed{f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$.

تعني مساحة الحيز الملون مساوية
لمساحة المستطيل $ABGH$.

مثال 1:

نعتبر الدالة f حيث: $f(x)=\frac{1}{x}$ حيث x عدد حقيقي في المجال $[1\ ;\ 3]$.

– عين حصرا للعدد : $\int_{3}^{1} f(x)\,dx$ مستنتجا حصرا للعدد $\ln 3$.

الحل :

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}_+$ أو على $\mathbb{R}_-$ لأنها دالة ناطقة وعليه فهي مستمرة على $[1\ ;\ 3]$.

ولدينا : $1 \leq x \leq 3$ ومنه : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$

إذن : $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$ وحسب الخاصية 5 :

$$\frac{1}{3}(3-1) \leq \int_{1}^{3} f(x)\,dx \leq 1(3-1)$$

إذن : $\frac{2}{3} \leq \int_{1}^{3} f(x)\,dx \leq 2$ وعليه : $\frac{2}{3} \leq \int_{1}^{3} \frac{1}{x}\,dx \leq 2$

ومنه : $\frac{2}{3} \leq [\ln x]_1^3 \leq 2$ أي أن : $\frac{2}{3} \leq \ln 3 - \ln 1 \leq 2$

وبالتالي : $\frac{2}{3} \leq \ln 3 \leq 2$.

مثال2 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x^2$

عين القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0\ ;\ 2]$.

الحل :

الدالة مستمرة على $\mathbb{R}$ وعليه فهي مستمرة على المجال $[0\ ;\ 2]$

ومنه القيمة المتوسطة α للدالة f على هذا المجال تعطى كما يلي :

$$\alpha=\frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx$$

$\alpha=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left[\frac{2^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right]$ إذن : $\alpha=\frac{4}{3}$ وعليه: $f(c)=\frac{4}{3}$

ومنه: $c^2=\frac{4}{3}$ و $c\in[0;2]$ و بالتالي: $c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{4}{3}$ هي القيمة المتوسطة لـ f على $[0\ ;\ 2]$ تبلغها من أجل $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

المكاملة بالتجزئة :

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على I ودالتاهما المشتقتان f' و g' مستمرتان على I.

a و b عددان حقيقيان من I. لدينا من أجل كل عدد t من I :

$$(f.g)'(t)=f'(t).g(t)+f(t).g'(t)$$

$$\int_a^x (f\times g)'(t)\,dt=\int_a^x \left[f'(t).g(t)+f(t).g'(t)\right]dt$$

وعليه : $\left[f(t).g(t)\right]_a^x=\int_a^x f'(t).g(t)\,dt+\int_a^b f(t).g'(t)\,dt$

$$\int_a^x f'(t).g(t)\,dt=\left[f(t).g(t)\right]_a^x-\int_a^x f(t).g'(t)\,dt$$

ملاحظة :

تستعمل هذه النتيجة لحساب تكاملات وذلك عندما يكون حساب التكامل الموجود في الطرف الثاني من المساواة أسهل من حساب التكامل المطلوب والموجود في الطرف الأول.

مثال :

احسب الدالة الأصلية التي تأخذ القيمة 0 من أجل $x=\frac{\pi}{2}$ للدالة f

حيث : $f(x)=x\sin x$

الحل :

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و عليه تقبل دالة أصلية وحيدة g تأخذ القيمة 0 من أجل $x=\frac{\pi}{2}$ وهي معرفة كما يلي : $g(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin t\,dt$

وباستعمال المكاملة بالتجزئة نجد :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x g'(t).s(t)\,dt=\left[g(t).s(t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^x-\int_{\frac{\pi}{2}}^x s'(t)\,g(t)\,dt$$

بوضع : $g'(t) = \sin t$ نجد : $g(t) = -\cos t$

وبوضع : $s(t) = t$ نجد $s'(t) = 1$

ومنه : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t\sin t\,dt = [-t\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} -\cos t\,dt$

$$= [-t\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{x} + [\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{x} = [-t\cos t + \sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$= [-x\cos x + \sin x] - \left[-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right]$$

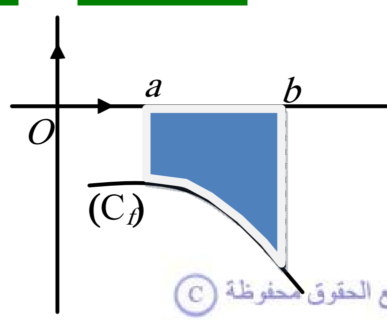
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t\sin t\,dt = -x\cos x + \sin x - 1$$

حساب المساحات و الحجوم:

أ)حساب المساحات:

* إذا كانت الدالة f مستمرة و سالبة على المجال $[a\ ;\ b]$ فإن مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) الممثل لتغيرات الدالة f و المستقيمات التي معادلاتها : $x = a$, $x = b$, $y = 0$

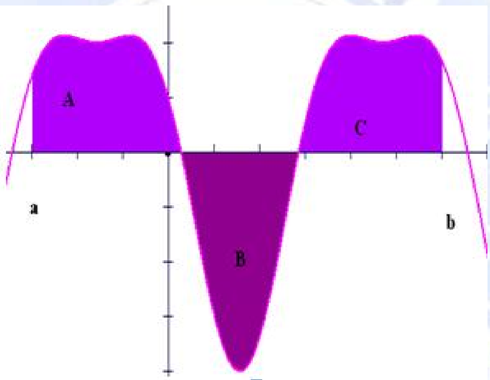
تعطى بالعبارة : $\int_{a}^{b} -f(x)\,dx$ أو $\int_{b}^{a} f(x)\,dx$



و تكون قيمتها المتوسطة : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

* إذا كانت f مستمرة و إشارتها متغيرة على مجال $[a;b]$ تكامل من a إلى b للدالة f هو مجموع المساحات الجبرية للأجزاء المحددة بالمجالات التي تكون f تحافظ على إشارة ثابتة

أي: $\int_a^b f(x)dx = A - B + C$



* إذا كانت f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a\ ;\ b]$ حيث من أجل كل x من $[a;b]$: $f(x) > g(x)$ فإن مساحة المجال D المحدد بالمنحيين (C_f) و(C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = a$, $x = b$ تعطى مقدرة بوحدة المساحات بالعبارة :

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

تطبيق :

1) أنشئ التمثيلين البيانيين للدالتين f و g حيث :

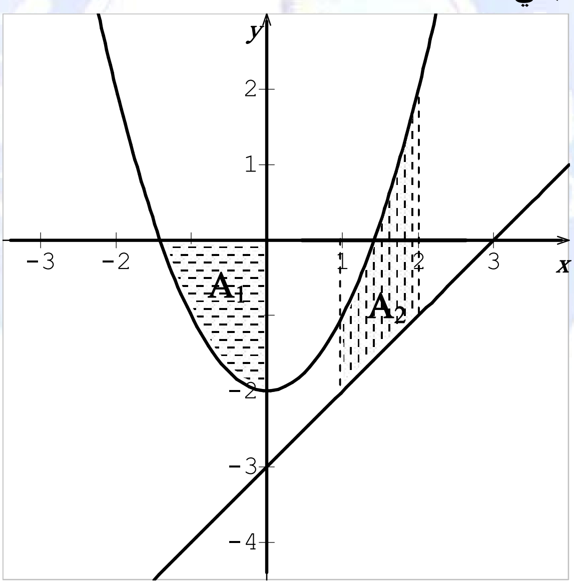
$f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = x - 3$ على المجال $\mathbb{R}$ في معلم متعامد متجانس (الوحدة هي cm)

2) احسب A_1 مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلتها : $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$

3) احسب A_2 مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$, $x = 2$

الحل :

1) التمثيل البياني :



1) حساب A_1 :

في المجال $\left[-\sqrt{2} \; ; \; 0\right]$ الدالة f سالبة و عليه :

$$A_1 = \int_{0}^{-\sqrt{2}} f(x)\,dx$$

$$A_1 = \int_0^{-\sqrt{2}} \left(x^2 - 2\right) dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_0^{-\sqrt{2}} = \left[\frac{\left(-\sqrt{2}\right)^3}{3} - 2\left(-\sqrt{3}\right)\right] - \left[\frac{0^3}{3} - 2(0)\right]$$

$A_1 = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} cm^2$: ومنه $A_1 = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3}$

2) حساب A_2 :

في المجال $[1 ; 2]$ لدينا : $f(x) > g(x)$

و عليه : $A_2 = \int_1^2 \left[f(x) - g(x)\right] dx$

$$= \int_1^2 \left(x^2 - x + 1\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(2)^2}{2} + 2\right) - \left(\frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2} + 1\right)\right]$$

إذن : $A_2 = \left(\dfrac{8}{3} - 2 + 2 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} - 1\right) cm^2$

ومنه : $A_2 = \left(\dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{2} - 1\right) cm^2$ أي : $A_2 = \dfrac{11}{6} cm^2$

ب)حساب بعض الحجوم :

مبرهنة :

لتكن f دالة مستمرة على المجال I . a و b عددان حقيقيان من I حيث: $a<b$. (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$
(D) مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلتها: $x=a$, $x=b$, $y=0$ إن حجم الجزء المتولد عن دوران (D) حول محور الفواصل مقدر بوحدة الحجوم يعطى بالعبارة :

$$V=\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$$

مثال 1 :

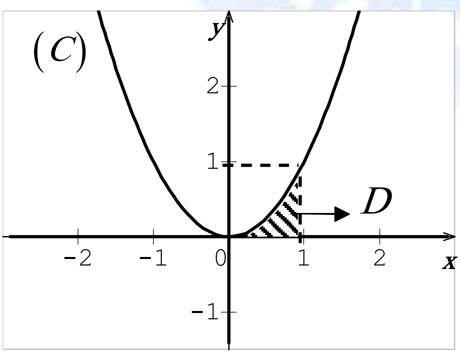
نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=x^2$

أنشئ تمثيلها (C) في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. و لتكن (D) مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C) (الوحدة cm) والمستقيمات التي معادلاتها : $x=0$, $x=1$, $y=0$

احسب الحجم V المتولد عن دوران (D) حول محور الفواصل.

الحل :

1) التمثيل البياني :



2) حساب الحجم V :

$$V=\int_0^1 \pi\left[f(x)\right]^2 dx=\pi\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx=\pi\int_0^1 x^4 dx$$

$$V=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left[\frac{(1)^5}{5}-\frac{(0)^5}{5}\right]=\pi\left[\frac{1}{5}\right]cm^3$$

و منه: $V=\frac{\pi}{5}cm^3$

مثال 2 :

نعتبر الدالة f : $f(x)=\frac{x}{4x^3+1}$

1- أنشئ التمثيل البياني للدالة f على $\mathbb{R}_+$

و ليكن (C) في معلم متعامد متجانس.

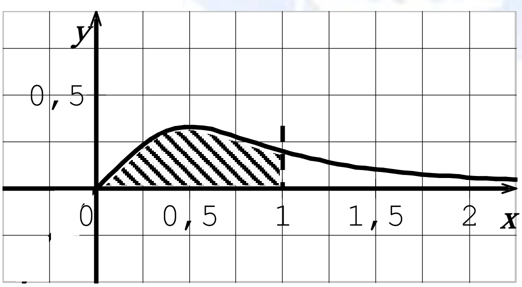
نفرض (D) مساحة الحيز المستوي المحدد بالمحنى (C)

والمستقيمات التي معادلتها : $x=0$, $x=1$, $y=0$.

- احسب الحجم المتولد عن دوران (D) حول محور الفواصل.

الحل :

1- التمثيل البياني :



2- حساب الحجم :

$$V=\int_0^1 \pi\left[f(x)\right]^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \frac{x^2}{\left(4x^3+1\right)^2}\,dx = \pi \int_0^1 \frac{12x^2}{12\left(4x^3+1\right)^2}\,dx$$

$$V = \frac{\pi}{12} \int_0^1 \frac{12x^2}{\left(4x^3+1\right)^2}\,dx = \frac{\pi}{12}\left[\frac{-1}{4x^3+1}\right]_0^1$$

$$V = \frac{\pi}{12}\left[\left(\frac{-1}{5}\right) - \left(\frac{-1}{1}\right)\right] = \frac{\pi}{12}\left(\frac{-1}{5}+1\right)$$

إذن : $V = \frac{\pi}{12} \times \frac{4}{5}$ وعليه : $V = \frac{\pi}{15}\,cm^3$

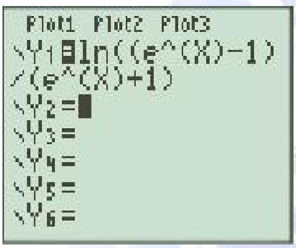
تكنولوجيا الإعلام و الاتصال:

التطبيق1:

1) أنشئ بآلة بيانية التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة بالعبارة :

$$f(x)=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$$

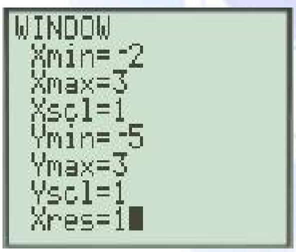
2) احسب التكامل الآتي : $\int_1^2 f(x)\,dx$



الحل :

1) نضغط على الزر : 

ونكتب عبارة الدالة f في y_1 كما يلي:

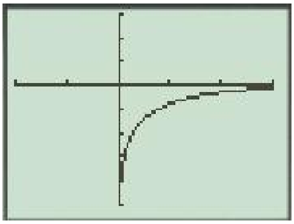


2) نضغط على الزر 

وندخل الأرقام التالية:

3) نضغط على الزر GRAPH

فنحصل على البيان



4) نضغط على الزر 2nd

ثم على الزر TRACE

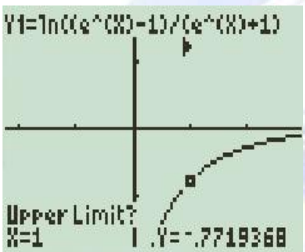
ثم نختار العدد 7

ثم نصادق بالزر ENTER

فيظهر المنحنى عليه نقطة ثم نضغط

على العدد 1 و نصادق بـــ ENTER

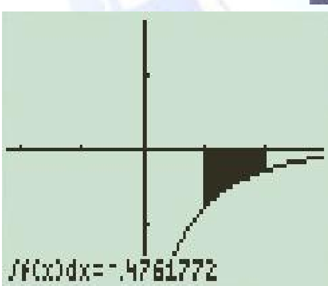
فتظهر الشاشة المقابلة :



العدد 1 هو حد الأدنى للتكامل

6) نضغط على العدد2 و نصادق بـــ ENTER

فتظهر الشاشة المقابلة :

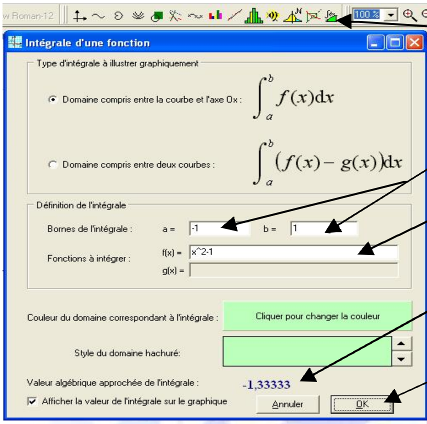


العدد 2 هو حد الأعلى للتكامل

فنجد : $\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{dx} = -0,4761772$

التطبيق2:

حساب $\int_{-1}^{1}\left(x^{2}-1\right)dx$ باستعمال sinequanon



1) ننقر على

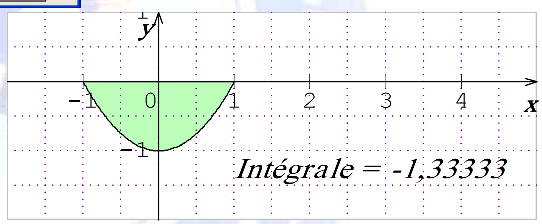
2) نكتب حدود التكامل

3) نكتب عبارة الدالة

فتظهر النتيجة

5) ننقر على

فيظهر الرسم أدناه:



تمـــاريـــن و مشكـــــلات:

التمرين 1

أذكر صحة أو خطأ ما يلي مع التعليل :

1) العدد $\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل مساحة إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a\ ;\ b]$.

2) التكامل $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$ يعطى بالعبارة : $\left[\frac{-1}{x}\right]_{-2}^{2} = -1$

3) $\int_a^b \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$

4) إذا كانت f دالة مستمرة و تحقق $f(x) > 1$ على المجال $[0\ ;\ 1]$ فإن : $\int_0^1 f(x)\,dx > 1$

5) $\int_1^2 \left(x^2+2\right)dx > \int_1^2 x^2\,dx$

6) $\int_0^1 \left(x^4+x^2+1\right)dx > 0$

7) f دالة مستمرة على المجال $[1\ ;\ 4]$

$$1\int_2^4 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$$

8) $a-b \leq \int_a^b \sin x\,dx \leq b-a$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^5\,dx = 0 \quad (9$$

$$\int_{-a}^{a} x^4\,dx = 2\int_{0}^{a} x^4\,dx \quad (10$$

$$\int_{\pi}^{3\pi} \sin x dx = \int_{0}^{2\pi} \sin x dx \quad (11$$

$$\int_{a}^{b} xf(x)\,dx = x\int_{a}^{b} f(x)\,dx \quad (12$$

التمرين2

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}$

1- عين مجموعة تعريف الدالة f .

2- بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

3- عين الدوال الأصلية g للدالة f على المجال $]-\infty\ ;\ -1[$

4- أحسب التكامل $\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx$

5- استنتج s مساحة الحيز المستوى المحدد بمنحنى الدالة f

والمستقيمات التي معادلتها : $x=-2,\ \ x=-3\ \ ,\ \ y=0$.

التمرين 3

احسب التكاملات الآتية :

1) $\int_{-1}^{1}\left(1-4x+x^3\right)dx$

2) $\int_{1}^{3}(x+1)\left(x^2+2x\right)^2dx$

3) $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x+2}dx$

4) $\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{3x+2}}dx$

5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}dx$

6) $\int_{-1}^{1}\frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx$

7) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$

8) $\int_{-4}^{3}\frac{|x+2|}{\left(x^2+4x+10\right)^2}dx$

9) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos x}dx$

10) $\int_{-\pi}^{0}\cos^3 x\,dx$

التمرين 4

احسب باستعمال المكاملة بالتجزئة التكاملات الآتية :

1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2x-3)\cos x\,dx$

2) $\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

3) $\int_{1}^{2}\ln x\,dx$

4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx$

التمرين 5

نعتبر التكامل : $\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx$

1) احسب كل من I_0 , I_1 .

2) باستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد علاقة تراجعية بين I_n ; I_{n+1} .

استنتج I_2 , I_3 .

التمرين 6

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) ادرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث الوحدة على محور الفواصل $2cm$ وعلى محور التراتيب $1cm$.

2) احسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C)

و بالمستقيمات التي معادلاتها : $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $y=0$

التمرين 7

1) أنشئ في معلم متعامد متجانس التمثيلين

البيانيين للدالتين f و g حيث :

$$g(x) = x^3 - 1 \quad , \quad f(x) = x^2 + 3$$

2) ادرس الوضع النسبي للمنحيين (C_f) و (C_g).

3) احسب S مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحيين (C_f)

و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=2$, $x=3$

التمرين8

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{1}{1+\ln x}$

1 – ادرس تغيرات الدالة f .

2 – أنشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد متجانس $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.

3 – لتكن s مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=e$, $x=1$, $y=0$

– عين حصرا للمساحة s .

التمرين9

1– ادرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x)=1+\cos x$ على المجال $[0\ ;\ \pi]$ ثم أنشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد متجانس (الوحدة هي cm) .

2– احسب مساحة الحيز المستوى (D) المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x=0$, $x=\pi$, $y=0$

3– احسب (D) حجم الجسم المحصل عليه بدوران حول محور الفواصل .

التمرين 10

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=x\sqrt{3-x}$

1- ادرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ تمثيلها البياني (γ) في معلم متعامد متجانس $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j})$ الوحدة هي cm .

2- نعتبر الدالة g حيث : $g(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{3-x}$

- عين a و b و c حتى تكون g الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-\infty\,;\,3[$.

3- احسب المساحة A للحيز المستوى (D) المحدد بالمنحنى (γ) والمستقيمات التي معادلاتها : $x=3$, $x=0$, $y=0$.

4- احسب حجم الجسم المولد عن دوران (γ) حول محور الفواصل.

التمرين 11

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$.

1- ادرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ تمثيلها البياني (γ) في معلم متعامد متجانس $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j})$ الوحدة هي cm.

2- احسب التكامل : $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln x}{x}dx$.

3- احسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;4]$.

التمرين 12

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x)=\frac{1}{4}x-1+\frac{1}{2}\ln|x-1|$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية .

2- بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α

حيث : $\frac{5}{2}<\alpha<3$.

3- اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

4- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم الذي

معادلته : $y=\frac{1}{4}x$.

5- أنشئ (Δ) و (C_f).

6- احسب المساحة $s(\alpha)$ للحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f)

و المستقيمات التي معادلاتها : $y=\frac{1}{4}x$, $x=\alpha$, $y=4$.

7- بين أن : $s(\alpha)=\frac{1}{4}\left(-\alpha^2-7\alpha-6\ln 3+20\right)$ Cm^2 .

الحـــلــــــــــــــــــول:

التمرين 1

1) خاطئة :

حتى تكون مساحة يجب أن تكون f موجبة تماما على $[a\ ;\ b]$

فيكون $\int_a^b f(x)dx > 0$.

2) خاطئة :

لأن التكامل غير موجود لكون الدالة $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ غير معرفة عند 0

وعليه فهي غير مستمرة على $[-2\ ;\ 2]$.

3) صحيحة لأن:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \int_a^b \alpha f(x)\, dx + \int_a^b \beta g(x)\, dx$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

4) صحيح لأن:

$f(x) > 1$ أي : $\int_a^b f(x)\, dx > \int_a^b dx$

أي أن : $\int_0^1 f(x)\, dx > [x]_0^1$ وعليه : $\int_0^1 f(x)\, dx > 1$

5) صحيح لأن:

$x^2+2>x^2$ ومنه : $\int_1^2 \left(x^2+2\right)dx>\int_1^2 x^2dx$

6) صحيح لأن:

$x^4+x^2+1>0$ على $[0\ ;\ 1]$ وعليه : $\int_0^1 \left(x^4+x^2+1\right)dx>0$

7) صحيح لأن:

$\int_1^3 f\left(x\right)dx+\int_3^4 f\left(x\right)dx=\int_1^4 f\left(x\right)dx$ من خواص التكامل .

8) صحيح لأن:

$-1\le \sin x\le 1$ وعليه : $-1\left(b-a\right)\le \int_a^b \sin xdx\le 1\left(b-a\right)$

إذن : $a-b\le \int_a^b \sin xdx\le b-a$

9) صحيح لأن : الدالة $x\mapsto x^5$ فردية وعليه : $\int_{-\alpha}^{\alpha} x^5dx=0$

10) صحيح لأن : الدالة $x\mapsto x^4$ زوجية وعليه :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^4dx=2\int_0^{\alpha} x^4dx$$

11) صحيح لأن : 2π دور للدالة $x\mapsto \sin x$

وعليه : $\int_{\pi}^{3\pi} \sin xdx+\int_{0+\pi}^{\pi+2\pi} f\left(x\right)dx=\int_0^{2\pi} f\left(x\right)dx$

12) خطأ لأن : x متغير و ليس ثابت .

التمرين 2

1– تعيين مجموعة التعريف :

لدينا : $D_f=\left\{ x\in\mathbb{R} : x^2-1\neq 0\right\}$ حيث : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\ ;\ 1\}$

$$D_f=]-\infty\ ;\ -1[\cup]-1\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$$

2– كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^2}$

لدينا :
$$f(x)=\frac{a(x+1)^2+b(x-1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2}$$

$$f(x)=\frac{a\left(x^2+2x+1\right)+b\left(x^2-2x+1\right)^2}{\left[(x+1)(x-1)\right]^2}$$

$$f(x)=\frac{(a+b)x^2+(2a-2b)x+a+b}{\left(x^2-1\right)}$$

إذن : $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a-2b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a=b \\ 2a=1 \\ a+b=1 \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ومنه : $f(x)=\dfrac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}$

3– تعيين الدوال الأصلية : $f(x)=\dfrac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}$

ومنه : $$f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{(x+1)^2}$$

وعليه : $$g(x)=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x+1}+c$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]+c \quad , \quad c\in\mathbb{R}$$

4- حساب التكامل : $\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx$

$$=\left[\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x-1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x+1}\right]_{-3}^{-2}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\times\frac{-1}{-3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{-2+1}\right]-\left[\frac{1}{2}\times\frac{-1}{-3-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{-3+1}\right]$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{4+12-3-6}{24}=\frac{7}{24}$$

5- استنتاج المساحة :

لدينا : $f(x)=\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ ومنه : $f(x)>0$

ومنه : $s=\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx$ إذن : $s=\frac{7}{24}us$

us: تعني وحدة مساحة .

التمرين 3

حساب التكاملات :

1) لدينا : $\int_{-1}^{1}\left(1-4x+x^3\right)dx$

$$=\left[x-2x^2+\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}=\left(1-2+\frac{1}{4}\right)-\left(-1-2+\frac{1}{4}\right)$$

$$=-1+\frac{1}{4}+3-\frac{1}{4}=2$$

2) لدينا: $\int_{1}^{3}(x+1)\left(x^2+2x\right)^2dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}(2x+2)\left(x^2+2x\right)^2 dx$

$$=\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\left(x^2+2x\right)^3\right]_{1}^{3}$$

$$=\frac{1}{6}(15)-\frac{1}{6}(3)=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$$

3) لدينا : $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x+2}dx=\left[\ln|x+2|\right]_{-1}^{0}=\ln 2-0=\ln 2$

4) لدينا : $\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{3x+2}}dx=\frac{2}{3}\int_{1}^{2}\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}dx$

$$=\left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+2}\right]_{1}^{2}=\frac{2}{3}\sqrt{8}-\frac{2}{3}\sqrt{5}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2\sqrt{5}}{3}=\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{3}$$

5) لدينا :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}dx = \left[\frac{-1}{1+\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$$

6) لدينا :
$$\int_{-1}^{2} \frac{2e^{2x}+e^{x}}{e^{2x}+e^{x}+1}dx = \left[\ln\left(e^{2x}+e^{x}+1\right)\right]_{-1}^{2}$$
$$= \ln\left(e^{4}+e^{2}+1\right) - \ln\left(e^{-2}+c^{-1}+1\right)$$
$$= \ln\frac{e^{4}+e^{2}+1}{e^{-2}+e^{-1}+1}$$

7) لدينا :
$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx = \frac{3}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{3}{2}\left[-\cos x\right]$$
$$= \frac{3}{2}\left[0+0\right] = 0$$

8) لدينا :
$$\int_{-4}^{3} \frac{\left|x+2\right|}{\left(x^2+4x+10\right)^2}dx$$
$$= \int_{-4}^{-2} \frac{\left|x+2\right|}{\left(x^2+4x+10\right)^2}dx + \int_{-2}^{3} \frac{\left|x+2\right|}{\left(x^2+4x+10\right)^2}dx$$
$$= \int_{-4}^{-2} \frac{-\left(x+2\right)}{\left(x^2+4x+10\right)^2}dx + \int_{-2}^{3} \frac{x+2}{\left(x^2+4x+10\right)^2}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-4}^{-2}\frac{2x+4}{\left(x^2+4x+10\right)^2}dx+\frac{1}{2}\int_{-2}^{3}\frac{2x+4}{\left(x^2+4x+10\right)^2}dx$$

$$=\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{x^2+4x+10}\right)\right]_{-4}^{-2}+\left[\frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{x^2+4x+10}\right)\right]_{-2}^{3}$$

$$=\left[\frac{-1}{2}\times\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}\right]+\left[\frac{1}{2}\times\frac{-1}{31}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right]$$

$$=\frac{1}{12}-\frac{1}{20}-\frac{1}{62}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}-\frac{1}{20}-\frac{1}{62}$$

$$=\frac{310-93-60}{1860}=\frac{157}{1860}$$

9) لدينا : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos x}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$$=-\left[\frac{-1}{\cos x}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\left[\frac{1}{\cos x}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=0$$

10) لدينا : $\int_{-\pi}^{0}\cos^3 x\,dx=\int_{-\pi}^{0}\cos x.\cos^2 x\,dx$

$$=\int_{-\pi}^{0}\cos x\left(1-\sin^2 x\right)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{0}\left(\cos x-\cos x.\sin^2 x\right)dx$$

$$=\left[\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}=\left(1-\frac{1}{3}\right)-(0-0)=\frac{2}{3}$$

التمرين 4

التكامل بالتجزئة :

1) لدينا : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2x-3)\cos x dx$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=\left[f(x).g(x)\right]_a^b-\int_a^b g'(x)\,f(x)dx$$

بوضع : $f'(x)=\cos x$ و $g(x)=2x-3$

نجد: $f(x)=\sin x$ و $g'(x)=2$

إذن : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2x-3)\cos x dx=\left[(2x-3)\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x dx$

$$=\left[(2x-3)\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-2\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\left[(2x-3)\sin x+2\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=(-2)-(\pi-3)=1-\pi$$

2) لدينا : $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=\left[f(x).g(x)\right]_a^b-\int_a^b g'(x)\,f(x)dx$$

بوضع : $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ و $g(x)=x$

إذن : $f(x)=2\sqrt{x+1}$ و $g'(x)=1$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\left[2x\sqrt{x+1}\right]_0^1-\int_0^1 2\sqrt{x+1}dx$$

$$=2\sqrt{2}-2\int_0^1 (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\sqrt{2}-2\left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=2\sqrt{2}-\left[\frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_0^1$$

$$=2\sqrt{2}-\frac{4}{3}\left[2\sqrt{2}+2\right]=-\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{4}{3}$$

3) لدينا : $\int_1^2 \ln xdx$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=\left[f(x).g(x)\right]_a^b-\int_a^b g'(x)\,f(x)dx$$

بوضع : $f'(x)=1$ و $g(x)=\ln x$

نجد : $f(x)=x$ و $g'(x)=\frac{1}{x}$

$$\int_1^2 \ln xdx=\left[x\ln x\right]_1^2-\int_1^2 1dx$$

$$=\left[x\ln x\right]_1^2-\left[x\right]_1^2=\left[x\ln x-x\right]_1^2$$

$$=(2\ln 2-2)-(1\ln 1-1)$$

$$=2\ln 2-1$$

4) لدينا : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

$$\int_{a}^{b} f'(x)g(x)\,dx=\left[f(x).g(x)\right]_a^b-\int_{a}^{b} g'(x)\,f(x)\,dx$$

بوضع : $f'(x)=\cos x$ و $g(x)=x^2$

نجد : $f(x)=\sin x$ و $g'(x)=2x$

ومنه : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx=\left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

$$=\frac{\pi^2}{4}-2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin dx$$

– حساب $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$:

لدينا : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)g(x)\,dx=\left[f(x).g(x)\right]_a^b-\int_{a}^{b} g'(x)\,f(x)\,dx$

بوضع : $f'(x)=\sin x$ و $g(x)=x$

نجد : $f(x)=-\cos x$ و $g'(x)=1$

إذن : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx=\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

$$=0+\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

ومنه : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$

التمرين 5

1) حساب I_0 :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

- حساب I_1 : $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

لدينا : $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) f(x)dx$

بوضع : $f'(x) = \sin x$ و $g(x) = x$

نجد : $f(x) = -\cos x$ و $g'(x) = 1$

إذن : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$

و مما سبق : $I_1 = 1$

2) إيجاد علاقة تراجعية بين I_n و I_{n+1} : $I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1} \sin x dx$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) f(x)dx$$

بوضع : $f'(x) = \sin x$ و $g(x) = x^{n+1}$

نجد : $f(x) = -\cos x$ و $g'(x) = (n+1)x^n$

ومنه : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1}\sin x dx = \left[x^{n+1}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\, x^n \cos x dx$

$$= \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\cos\frac{\pi}{2} - 0\cos 0\right) - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx$$

$$= -(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx$$

- حساب : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx$

لدينا : $\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x).g(x)\right]_a^b - \int_a^b g'(x)\, f(x)dx$

بوضع : $f'(x) = \cos x$ و $g(x) = x^n$

نجد : $f(x) = \sin x$ و $g'(x) = nx^{n-1}$

وبالتالي : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx = \left[x^n \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}\sin x dx$

أي : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \sin\frac{\pi}{2} - 0 - n.\mathrm{I}_{n-1}$

ومنه : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\mathrm{I}_{n-1}$

إذن : $\mathrm{I}_{n+1} = -(n+1)\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\mathrm{I}_{n-1}\right]$

و منه : $$\mathrm{I}_{n+1} = -(n+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^n + n(n+1)\mathrm{I}_{n-1}$$

استنتاج I_2 و I_3 :

$$\mathrm{I}_2 = -2\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 + 2\mathrm{I}_0 = -\pi + 2$$

$$\mathrm{I}_3 = -3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 6\mathrm{I}_1 = \frac{-3\pi^2}{4} + 6$$

التمرين 6

1 – دراسة تغيرات f : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 > 0\}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

و منه : $D_f =]-1\,;\,1[$

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$

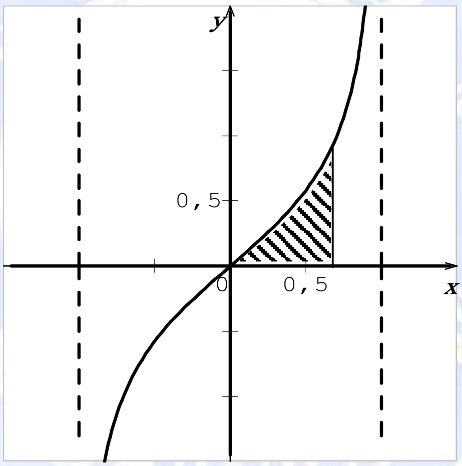
$$f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{1-x^2} - x \times \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1-x^2+2x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

ومنه : $f'(x)>0$ وعليه f متزايدة تماما على $]-1\,;\,1[$

x	-1 $\qquad\qquad$ 1
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

هناك فرعين لا نهائيين ومستقيمين مقاربين معادلتيهما $x=-1$ و $x=1$.



2- حساب المساحة :

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$S=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

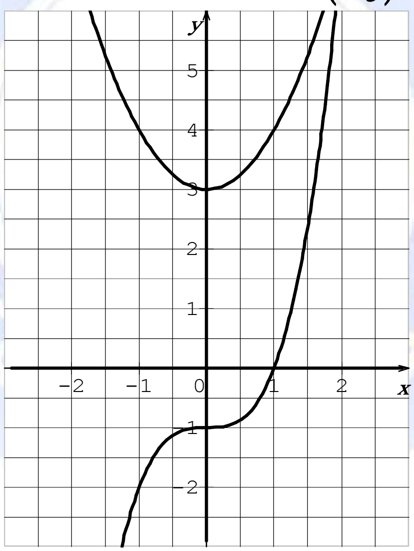
$$S=\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\left(-\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)-\left(-\sqrt{1-(0)^2}\right)$$

ومنه : $S=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\times 4cm^2$ وعليه : $S=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\times 4cm^2$

إذن : $S=2\left(2-\sqrt{3}\right)cm^2$

التمرين 7

1- إنشاء (C_f) و (C_g) :



2- دراسة الوضع النسبي لـــ : (C_f) و (C_g) :

$$g(x)-f(x)=x^3-1-x^2-3=x^3-x^2-4$$

$$=(x-2)\left(x^2+x+2\right)$$

$$g(x)-f(x)=0$$

معناه : $x-2=0$ ومنه : $x=2$ لأن : $x^2+x+2>0$

وعليه : $f(x)-g(x)>0$ تكافئ : $x>2$

إذن : (C_f) تقع تحت (C_g) في المجال $]2;+\infty[$ و تقع فوق (C_g) في المجال $]-\infty;2[$

3- حساب المساحة :

في المجال $[2;3]$ لدينا : (C_g) تقع فوق (C_f) ومنه :

$$S=\int_2^3\left[g(x)-f(x)\right]dx$$

$$S=\int_2^3\left(x^3-x^2-4\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3$$

$$S=\left[\frac{(3)^4}{4}-\frac{(3)^3}{3}-4(3)\right]-\left[\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}-4(2)\right]$$

$$S=\frac{81}{4}-\frac{27}{3}-12-\frac{16}{4}+\frac{8}{3}+8$$

$$S=\frac{81}{4}-9-4-4+\frac{8}{3}=\frac{81}{4}+\frac{8}{3}-17$$

$$S=\frac{243+32-204}{12}=\frac{71}{12}(us)$$

التمرين 8

1− دراسة تغيرات f :

$$D_f=\{\ x\in\mathbb{R}:\ \ x>0\ ;\ 1+\ln x\neq 0\ \}$$

$1+\ln x=0$ معناه : $\ln x=-1$ ومنه : $x=\dfrac{1}{e}$

$$D_f=\left]0\ ;\ \frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{1}{e}\ ;\ +\infty\right[$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{1+\ln x}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ <}}\frac{1}{1+\ln x}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ >}}\frac{1}{1+\ln x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\ln x}=0$$

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2}=\frac{-1}{x(1+\ln x)^2}$$

وعليه : $f'(x)<0$ و منه : f متناقصة تماما على كل من المجالين $\left]\frac{1}{e} ; +\infty\right[$ و $\left]0 ; \frac{1}{e}\right[$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

2- إنشاء (C) : $x=\frac{1}{e}$, $y=0$ معادلتي المستقيمين المقاربين .

3– حصر المساحة S :

$$S=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e \frac{1}{1+\ln x}dx$$ بما أن $1< x<e$

فإن : $0<\ln x<1$ ومنه : $1<1+\ln x<2$

إذن : $\frac{1}{2}<\frac{1}{1+\ln x}<1$ وعليه : $\frac{1}{2}< f(x)<1$

ومنه : $$\frac{1}{2}(e-1)\le\int_1^e f(x)\,dx\le 1(e-1)$$

وعليه : $$\frac{1}{2}(e-1)< S<e-1$$

التمرين 9

1) دراسة تغيرات f : $D_f=[0\,;\,\pi[$

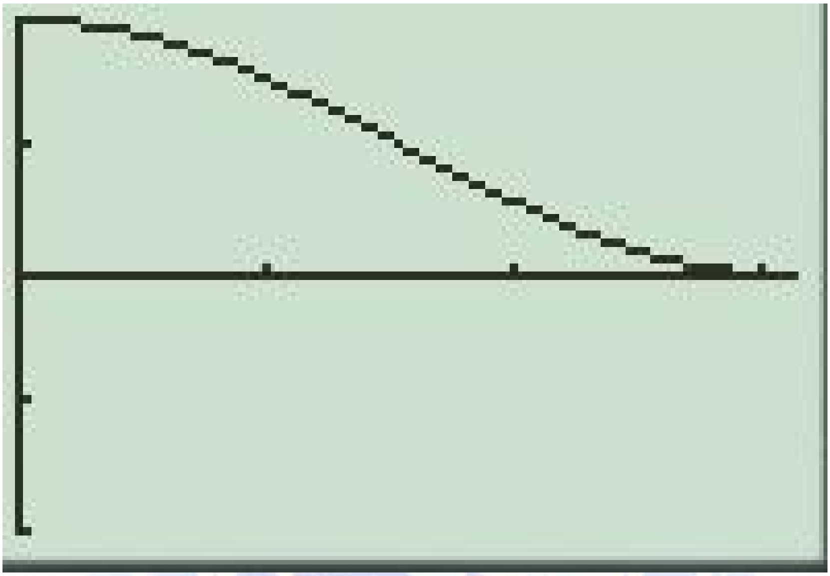
$f(0)=2 \quad , \quad f(\pi)=0$

$f'(x)=-\sin x$ ولدينا : $\sin x>0$ في المجال $]0\,;\,+\infty[$

ومنه : $f'(x)<0$

إذا كان : $x=0$ أو $x=\pi$ فإن : $f'(x)=0$

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	2	$\searrow$	0



2 – حساب المساحة :

$$S=\int_{0}^{\pi} f(x)dx=\int_{0}^{\pi}(1+cosx)dx$$

$$S=[x+\sin x]_0^{\pi}=\pi \quad cm^2$$

3 – حساب الحجم :

$$V=\int_{0}^{\pi}\pi[f(x)]^2 dx$$

$$V=\int_{0}^{\pi}\pi(1+\cos x)^2 dx=\pi\int_{0}^{\pi}(1+2\cos x+\cos^2 x)dx$$

$$V=\int_{0}^{\pi}\pi\left(1+2\cos x+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$V=\int_0^{\pi}\pi\left(\frac{3}{2}+2\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$V=\pi\left[\frac{3}{2}x+2\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]$$

$$V=\frac{3}{2}\pi\ cm^3$$

التمرين 10

1- دراسة تغيرات f : لدينا : $D_f=\{x\in\mathbb{R} : 3-x\geq 0\}$ ومنه :

$D_f=]-\infty\ ;\ 3[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{3-x}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\sqrt{3-x}=0$$

$$f'(x)=\sqrt{3-x}+x\times\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

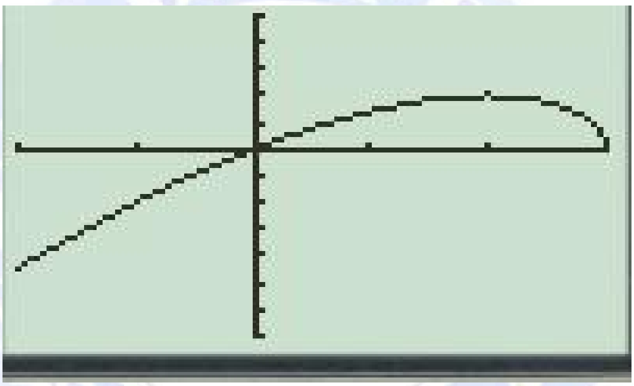
$$f'(x)=\frac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}}=\frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$$

x	$-\infty$		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

و منه f متزايدة تماما على المجال $]-\infty\ ;\ 2]$ و متناقصة تماما على $[2\ ;\ 3[$

x	$-\infty$		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

–الرسم البياني بآلة :



2– تعيين a و b و c : $g(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{3-x}$

$$g'(x)=(2ax+b)\sqrt{3-x}+\left(ax^2+b+x+c\right)\times\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$g'(x)=\frac{2(2ax+b)(3-x)-\left(ax^2+bx+c\right)}{2\sqrt{3-x}}$$

$$g'(x)=\frac{(4ax+2b)(3-x)-ax^2-bx-c}{2\sqrt{3-x}}$$

$$g'(x)=\frac{12ax-4ax^2+6b-2bx-ax^2-bx-c}{2\sqrt{3-x}}$$

$$g'(x)=\frac{-5ax^2+(12a-3b)x+6b-c}{2(3-x)}\times\sqrt{3-x}$$

و عليه نكون g دالة أصلية للدالة f إذا كانت و فقط إذا كان :

$$\frac{-5ax^2+(12a-3b)x+6b-c}{6-2x}=x$$

و منه : $-5ax^2+(12a-3b)x+6b-c=-2x^2+6x$

و عليه : $\begin{cases}-5a=-2\\12a-3b=6\\6b-c=0\end{cases}$ و عليه : $\begin{cases}a=\frac{2}{5}\\\frac{24}{5}-3b=6\\c=6b\end{cases}$

ومنه : $a=\frac{2}{5}$ ؛ $b=-\frac{2}{5}$ ؛ $c=-\frac{12}{5}$

و بالتالي : $g(x)=\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{2}{5}x-\frac{12}{5}\right)\sqrt{3-x}$

3 – حساب المساحة A :

$$A=\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 x\sqrt{3-x}\,dx$$

$$A=\left[g(x)\right]_0^3=g(3)-g(0)$$

$$=\frac{2}{5}(3^2-3-6)\sqrt{3-3}-\frac{2}{3}(0-0-6)\sqrt{3-0}$$

$$A=\frac{12\sqrt{3}}{5}\ cm^2$$

4 – حساب الحجم : $V=\int_0^3 \pi f^2(x)\,dx=\pi\int_0^3\left(x\sqrt{3-x}\right)^2 dx$

$$V=\int_0^3 x^2(3-x)\,dx=\pi\int_0^3\left(-x^3+3x^2\right)dx$$

$$V=\pi\int_0^3\left[-\frac{x^4}{4}+x^3\right]_0^3=\pi\left[\left(\frac{-81}{4}+27\right)-0\right]$$

$$V=\frac{27\pi}{4}\ cm^3$$

التمرين 11

1– دراسة تغيرات f : $D_f=\left]0\,;\,+\infty\right[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}\ln x=-\infty$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-lnx}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

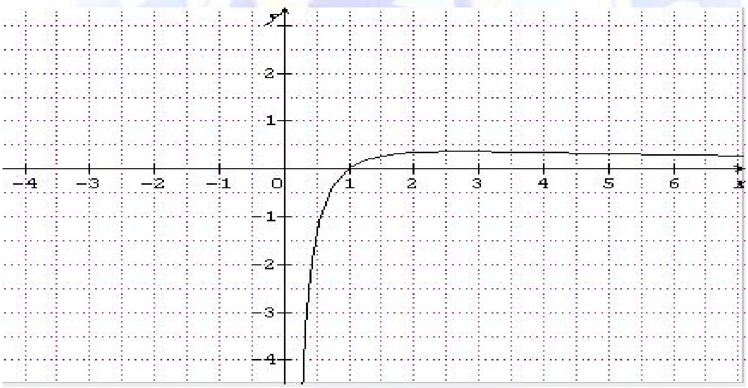
$g'(x)=0$ تكافئ : $1-\ln x=0$ و منه : $\ln x=1$ إذن : $x=e$

x	0	e	$+\infty$
$1-\ln x$	+	0	−
$f'(x)$	+	0	−

لدينا : $f(e)=\frac{1}{e}$ ومنه:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	e

– إنشاء البيان : $x=0$ ، $y=0$ معادلتين للمستقيمين المتقاربين .



– حساب التكامل :
$$\int_1^4 \frac{\ln x}{x}dx=\int_1^4 \frac{1}{4}(\ln x)^1 dx$$

$$=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^4=\frac{(\ln 4)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=2(\ln 2)^2$$

3 – حساب القيمة المتوسطة للدالة f :

و هو العدد α : $\alpha = \frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)dx$ أي $\alpha = \frac{1}{3}\int_1^3 f(x)\,dx$ ومنه

$$\alpha = \frac{1}{3}\times 2(\ln 2)^2$$

إذن الدالة g معرفة بالعبارة : $g(x) = \frac{2}{3}(\ln 2)^2$

التمرين 12

1- دراسة تغيرات f : $D_f = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x-1 \neq 0\}$

f : $D_f =]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{2}\ln|x-1|$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{2}\ln(-x+1)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (-x+1)\left[\frac{\frac{1}{4}x-1}{-x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{\ln(-x+1)}{-x+1}\right] = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{2}\ln|x-1| = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to +\infty\\ >}} \frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{2}\ln|x-1| = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{2}\ln|x-1| = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{x-1} = \frac{x-1+2}{4(x-1)}$$

$$f'(x)=\frac{x+1}{4(x-1)}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على كل المجالين $]-\infty\ ;\ -1]$

و $]1\ ;\ +\infty[$ و متناقصة على المجال $[-1\ ;\ 1[$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1)\simeq-0,9$ ومنه $f(-1)=-\frac{1}{4}-1+\frac{1}{2}\ln 2$

– دراسة الفروع اللانهائية :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{\ln(-x+1)}{-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\times\frac{-x-1}{-x}\times\frac{ln(-x+1)}{-x+1} \;=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-\frac{1}{4}x=\lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{1}{4}ln(-x+1)\right)=+\infty$$

يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم الذي معادلته : $y=\frac{1}{4}x$

بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{ln(x-1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\times\frac{x-1}{x}\times\frac{ln(x-1)}{x-1} \;=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{4}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{2}ln(x-1)\right)=+\infty$$

يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم الذي معادلته : $y=\frac{1}{4}x$

بجوار $+\infty$

2 – تبيان أن (C_f) يقطع محور الفواصل :

في المجال $\left]\frac{5}{2}\;;\;3\right[$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما.

و لدينا : $f(3)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}ln2$

$$f(3)\simeq 0,096$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}ln\frac{3}{2}$$

$f\left(\frac{5}{2}\right) \simeq -0,17$ و منه : $f(3).\, f\left(\frac{5}{2}\right) < 0$

و حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α من المجال

$\left]\frac{5}{2}\,;\,3\right[$ بحيث : $f(\alpha) = 0$

و منه (C_f) يقطع محور الفواصل .

3 – معادلة المماس : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f(0) = -1$, $f'(0) = -\frac{1}{4}$

$y = -\frac{1}{4}x - 1$

4– الوضع النسبي:

$$f(x) - y = \frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}x$$

$$f(x) - y = -1 + \frac{1}{2}\ln|x-1|$$

$$f(x) - y = \frac{-2 + \ln|x-1|}{2}$$

$f(x) - y = 0$ تكافئ : $-2 + \ln|x-1| = 0$ و منه :

$\ln|x-1| = 2$ و عليه : $|x-1| = e^2$ إذن: $x - 1 = e^2$ أو

$x - 1 = -e^2$ و عليه : $x = 1 + e^2$ أو : $x = 1 - e^2$

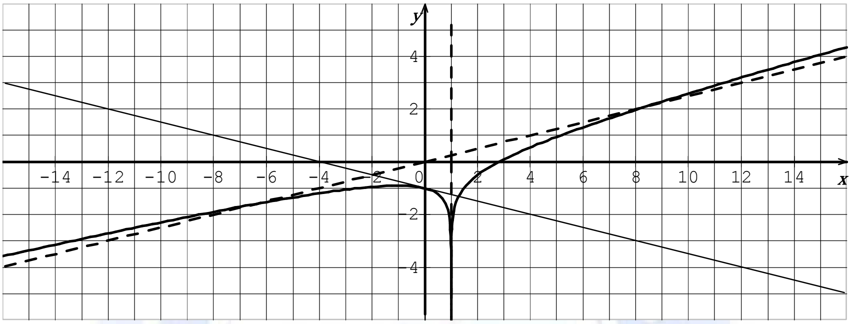
$f(x) - y < 0$ تكافئ : $\ln|x-1| - 2 < 0$ و منه : $\ln|x-1| < 2$

و عليه : $|x-1| < e^2$ و منه : $-e^2 < x - 1 < e^2$ إذن :

$1 - e^2 < x < 1 + e^2$

و عليه $\left(C_f\right)$ يقع تحت (Δ) في المجال $\left]1-e^2 ; 1+e^2\right[$ و يقع فوقه في كل من المجالين : $\left]1+e^2 ; +\infty\right[$ و $\left]-\infty ; 1-e^2\right[$

5 – رسم (Δ) و $\left(C_f\right)$:



6 – حساب المساحة :

$$S(\alpha)=\int_{\alpha}^{4}\left[y-f(x)\right]dx=\int_{\alpha}^{4}\left(1-\frac{1}{2}ln\left|x-1\right|\right)dx$$

$$S(\alpha)=\int_{\alpha}^{4}1dx-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{4}ln(x-1)dx$$

$$S(\alpha)=\left[x\right]_{\alpha}^{4}-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{4}ln(x-1)\,dx$$

$$=4-\alpha-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{4}ln(x-1)\,dx$$

المكاملة بالتجزئة : $\int_{\alpha}^{4}ln(x-1)\,dx$

لدينا :

$$\int_{a}^{b}f'(x)g(x)\,dx=\left[f(x).g(x)\right]_{a}^{b}-\int_{a}^{b}g'(x)\,f(x)\,dx$$

بوضع : $f'(x)=1$ و $g(x)=ln(x-1)$

نجد : $f(x)=x$ و $g'(x)=\frac{1}{x-1}$

$$\int_{\alpha}^{4} ln(x-1)\,dx=\left[x ln(x-1)\right]_{\alpha}^{4}-\int_{\alpha}^{4}\frac{x}{x-1}dx$$

$$=4ln3-\alpha ln(\alpha-1)-\int_{\alpha}^{4}\frac{x-1+1}{x-1}dx$$

$$=4ln3-\alpha ln(\alpha-1)-\int_{\alpha}^{4}1+\frac{1}{x-1}dx$$

$$=4ln3-\alpha ln(\alpha-1)-\left[x+ln(x-1)\right]_{\alpha}^{4}$$

$$=4ln3-\alpha ln(\alpha-1)-\left[4+ln3-\alpha-ln(\alpha-1)\right]$$

و بالتالي :

$$\int_{a}^{b} ln(x-1)\,dx=3ln3-4-(\alpha-1)ln(\alpha-1)+\alpha$$

إذن :

$$S(\alpha)=4-\alpha-\frac{1}{2}\left[3ln3-4-(\alpha-1)ln(\alpha-1)+\alpha\right]$$

$$S(\alpha)=6-\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{2}ln3+\frac{1}{2}(\alpha-1)ln(\alpha-1)\quad us$$

إثبات أن : $S(\alpha)=\frac{1}{4}\left(-\alpha^2-7\alpha-6ln3+20\right)$

لدينا : $f(\alpha)=0$ و منه : $\frac{1}{4}\alpha-1+\frac{1}{2}ln(\alpha-1)=0$

إذن: $\frac{1}{2}ln(\alpha-1)=1-\frac{1}{4}\alpha$ أي: $\frac{1}{2}ln(\alpha-1)=\frac{4-\alpha}{4}$

و عليه : $ln(\alpha-1)=\frac{4-\alpha}{2}$

بالتعويض في $S(\alpha)$ نجد :

$$S(\alpha)=6-\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{2}ln3+\frac{1}{4}(\alpha-1)(4-\alpha)$$

$$S(\alpha)=6-\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{2}ln3+\frac{1}{4}\left(4\alpha-\alpha^2-4+\alpha\right)$$

$$S(\alpha)=\frac{1}{4}\left(-\alpha^2-7\alpha-6ln3+20\right)$$