2. مراجعة في الدوال والاحتمالات

تصميم الدرس

I. تمارين في الدوال كثيرات الحدود والدوال التناظرية
II. تمارين للبحث والتعمق

تمارين للمراجعة:

أ. تمارين

دوال كثيرات الحدود

.1 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=2x+4$

1. عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أرسم في معلم متعامد المنحني (C_f) الممثل للدالة f.

.2 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=-x+2$

1. عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أرسم في معلم متعامد المنحني (C_f) الممثل للدالة f.

.3 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=-x^2-x+2$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. عين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.
4. أكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1.
5. ارسم في معلم متعامد المنحني (C_f) و المماس (Δ).

4 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=x^3+x-2$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ادرس تغيرات الدالة وأنشئ (C_f)

5. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=-x^3-x^2+5x+2$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=(x-2)(-x^2-3x-1)$.

استنتج نقط تقاطع (C_f) مع $(x'x)$.

4. أرسم في معلم متعامد المنحني (C_f).

6. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=x^3-3x+2$.

$\mathcal{C}$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ــ أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

ب ــ أدرس اتجاه تغيّر الدالة f واستنتج جدول تغيّراتها.

2) برهن أن النقطة A من المنحني $\mathcal{C}$ التي فاصلتها $x=0$ هي نقطة انعطاف للمنحني $\mathcal{C}$.

3) اكتب معادلة للمماس Δ للمنحني $\mathcal{C}$ في النقطة A.

4) بين أن المستقيم d الذي معادلته $y=2$ يقطع المنحني $\mathcal{C}$ في ثلاث نقط يطلب تعيين إحداثياتها.

5) احسب $f(2)$ و $f(-2)$ ثم ارسم كلا من Δ و $\mathscr{C}$.

دوال تناظرية

7. f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{-x}{x+1}$

وليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ و المنحني (C_f).

8. f دالة معرفة على $[-1;1[\cup]1;3]$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{-4}{x-1}$

وليكن (C_f) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أدرس نهاية الدالة f عند 1. ماذا تستنتج ؟
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المستقيم ذو المعادلة $x=1$ و المنحني (C_f).

9. f دالة معرفة على $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ادرس تغيرات الدالة وأنشئ (C_f) .

10. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـِ $f(x)=\dfrac{2-5x}{x+1}$

و ليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين العدد الحقيقي a بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$، $f(x)=a+\dfrac{7}{x+1}$.
2. أدرس نهايات الدالة f عند $-\infty$، $+\infty$ و 1.استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. أرسم المستقيمين المقاربين والمنحني (C_f).

11. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-3}$

يرمز (C) للمنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ ــ أحسب النهايات للدالة f عند حدود مجالات التعريف.

ب ــ أدرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها.

2) أوجد نقط تقاطع (C) مع محوري الإحداثيات

3) أثبت أن المنحني (C) يقبل مماسين T و T' معامل توجيه كل منهما يساوي -2 .

عين معادلة لكل من T و T' .

4) أرسم T وَ T' ثم المنحني (C).

تمارين للبحث والتعمق في الدوال والاحتمالات:

I. الدوال

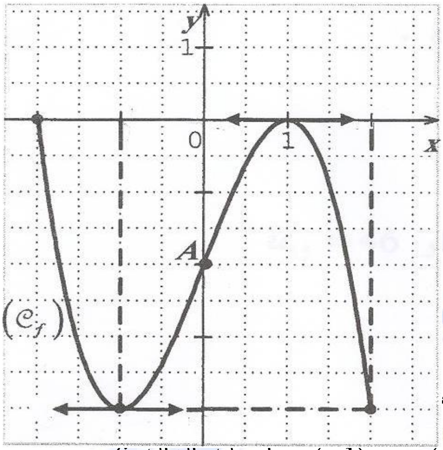
تمرين 1:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
2. اُدرس اتجاه تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن النقطة $I(\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$ هي نقطة إنعطاف للمنحى (C_f).
4. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة I.
5. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=(x-1)^2(2x-5)$
ثم استنتج نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.
6. ارسم (Δ) و (C_f).

تمرين 2:



f دالة عددية معرفة على المجال $[-2;2]$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

انظر الشكل و أجب عن الأسئلة التالية :

1. أ- عين $f'(1)$ و $f'(1)$ ، f' ه

ب- عين صورتي العددين (-2) و (-1) بواسطة الدالة f .

ج- شكل جدول تغير الدالة f على المجال $[-2;2]$.

2. باستعمال اتجاه تغير الدالة f ، قارن العددين $f(\frac{3}{2})$ و $f(\sqrt{3})$.

3. A هي النقطة من المنحنى (C_f) التي إحداثياها $(0;-2)$، و بفرض أن $f'(x)=3$ ؛ اشرح كيف يمكن رسم مماس المنحنى (C_f) في النقطة A ثم ارسمه بعد نقل الشكل.

تمرين 3 :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـــ : $f(x)=\frac{2x-5}{x+2}$.

يرمز C للمنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- أحسب النهايتين للدالة f عند حدود مجالات التعريف.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2. عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى C مع حامل محور الفواصل.
3. عين معادلة ديكارتية للمستقيم T مماس المنحني C في النقطة ذات الفاصلة 0 .
4. أنشئ كلا من : T و C .
5. بين أن المستقيم Δ الذي معادلته : $3x+y-2=0$ يقطع المنحني C في نقطتين يطلب تحديدهما.

تمرين 4 :

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$

حيث: $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

و ليكن (C) المنحني البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1. أدرس اتجاه تغيرات الدالة f .
2. عين نقط تقاطع المنحنى (C) مع محوري الإحداثيات.
3. A ، B نقطتان من المنحني (C) فاصلتاهما على الترتيب 0، أحسب $f'(0)$ و $f'(-2)$ ، ثم استنتج أن (C) يقبل مماسين متوازيين عند A ، B . أكتب معادلتيهما.
4. أنشئ المماسين ثم أرسم (C) .

تمرين 5 :

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$

حيث: $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$.

و ليكن (C) المنحني البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1. أدرس اتجاه تغيرات الدالة تا .عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C).
2. أ)عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحنى (C) مع محوري الإحداثيات .

ب) بين أنه نقطتان من المنحني (C) يكون معامل توجيه المماس عند كل منهما يساوي (-1) .

ج) عين معادلة كل من المماسين للمنحني (C) عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 0 و 2 .

3. أرسم المماسين و المنحني (ي) .

تمرين 6:

f و g دالتان عدديتان للمتغير الحقيقي x معرفتان على الترتيب على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}-\{1\}$ حيث: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ و $g(x)=\frac{x}{1-x}$.

(C_f) و (C_g) منحنياهما البيانيان على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1. أدرس تغيرات كل من الدالتين f و g .
2. عين معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني (C_g).
3. عين نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g).
4. أرسم المنحنيين (C_f) و (C_g) .

تمرين 7:

لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بالعبارة: $f(x)=\frac{2-x}{x+5}$

اختر الجواب الصحيح من ضمن الأجوبة المقترحة مع التبرير.

أ- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$.

ب- الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-5[$ و $]-5;+\infty[$.

ج- إشارة مشتقة الدالة f ثابتة.

د- منحني الدالة f لا يقطع محور الفواصل .

ه- منحني الدالة f هو قطع مكافئ.

و- مماس منحني الدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0 هي منحني $y=-\frac{7}{25}x+\frac{2}{5}$

II. الاحتمالات

تمرين 1:

يحتوي صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5 لا نفرق بينها عند اللمس، نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع (أي بعد كل سحبة نعيد الكرية إلى الصندوق) نسجل بالترتيب الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة لنحصل عندئذ على ثلاثة أرقام من بين 1، 2 ، 3 ، 4 ، 5.

1) ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟.
2) نعيد التجربة هذه المرة لكن دون إرجاع الكرية المسحوبة ، ما هو عدد الأعداد الممكنة؟.

- ما احتمال الحادثة A " الكرية الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4".

تمرين 2:

يدفع لاعبان A و B ، 6 و 10 دينار على الترتيب و يرمي منظم اللعبة حجري نرد متوازنين كل منهما ذو أربعة أوجه مرقمة من 1 إلى 10 ويدفع للاعبين ضعف مجموع رقمي الوجهين الظاهرين بعد الرمي.

- أحسب أمل الربح لكل لاعب.

تمرين 3:

(A) ، (B) ، (C) ثلاثة صناديق حيث :

الصندوق (A) يضم 3 كريات حمراء و 5 كريات سوداء.

الصندوق (B) يضم كريتين حمراوين و كرية سوداء .

الصندوق (C) يضم كريتين حمراوين و 3 كريات سوداء.

نأخذ عشوائيا أحد الصناديق و نسحب منه عشوائيا كرية واحدة .

إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء فما هو إحتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق (A) . $\frac{3}{8}$

تمرين 4:

يضم صندوق كرتين حمراوين و ثلاث كرات خضراء. نسحب عشوائيا كرة واحد. إذا كانت بيضاء،نعيدها إلى الصندوق ونضيف كرة كرة بيضاء أخرى و إذا كانت سوداء نعيدها إلى الصندوق مع إضافة كرة سوداء أخرى ثم نعيد عملية السحب مرة ثانية . أحسب الحوادث التالية :

A " يوجد ثلاث كرات سوداء في الصندوق قبل السحبة الثالثة" .

B " يوجد خمس كرات بيضاء في الصندوق قبل السحبة الثالثة" .

تمرين 5:

يضم كيس أربع كرات بيضاء و ثمان كرات حمراء .

1- نسحب عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع . هل الحاثتان B_1 و B_2 مستقلتان ؟.

B_1 " الكرة الأولى بيضاء " ، B_2 " الكرة الثانية بيضاء ".

2- نسحب الآن عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع . هل الحاثتان B_1 و B_2 مستقلتان ؟.

تمرين 6:

يضم كيس ثلاث كرات بيضاء و كرتين حمراوين.

نسحب عشوائيا عددا من الكرات على التوالي دون إرجاع .

نعتبر الحوادث التالية : M " الرتان مختلفتا اللون"، N " كرة على الأكثر حمراء "

1) إذا كان عدد الكرات المسحوبة اثنتين، هل الحادثان M و N مستقلتان؟

2) إذا كان عدد الكرات المسحوبة ثلاثة ، هل الحادثان M و N مستقلتان؟

تمرين 7:

تستقبل ثانوية L تلاميذ السنة الأولى من ثلاث متوسطات M_1 ، M_2، M_3 % 25 من التلاميذ يأتون من المتوسطة M_1 ، % 40 من من المتوسطة M_2 و الباقي من المتوسطة M_3، % 5 من تلاميذ من المتوسطة M_1 ، 10% من تلاميذ M_2 و % 0.1 من تلاميذ M_3 يعيدون السنة . نختار تلميذا عشوائيا .

a) كون شجرة متوازنة تترجم الوضعية.

b) أحسب احتمال الحادثة A " التلميذ الذي تم اختياره يعيد السنة".

تمرين 8:

في مسابقة يجيب الطالب عن عددين من الأسئلة و يشار للجواب الصحيح بالعدد 1 و للخاطئ بالعدد 0.

نعتبر الحادثتين A " ليس للأجوبة نفس الإشارة "، B " جواب واحد على الأكثر ذو إشارة 0 "

1) إذا كان عدد الأسئلة اثنين، هل A و B مستقلتان ؟
2) إذا كان عدد الأسئلة ثلاثة، هل A و B مستقلتان ؟

تمرين 9:

صنف مواطنو بلدية حسب الاحتياجات و الجنس كما يلي :

تم اختيار أحد المواطنين عشوائيا ليمثل البلدية في أحد المهرجات.

ما احتمال أن يكون ذكرا ذا حالة متوسطة؟

	فقراء P	أغنياء R	متوسطون N	المجموع
ذكور M	0,5	0,2	0,3	90
إناث F	0,55	0,15	0,3	60
المجموع	52	53	45	150

ب. حلول للتمارين

دوال كثيرات الحدود

.1

.1 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x) = -\infty$ و

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x) = +\infty$.

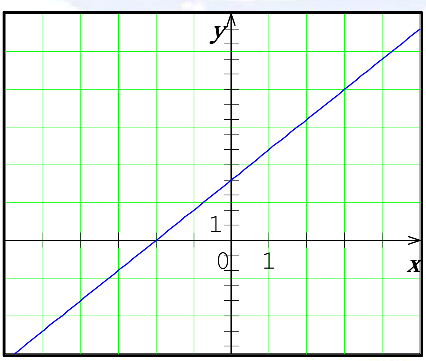
.2 من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=2$. نلاحظ أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)>0$

و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

.1 المنحني الممثل للدالة f هو المستقيم ذو المعادلة $y=2x+4$

وتكفينا نقطتان لرسمه. فمثلا $f(0)=4$ و $f(-2)=0$.



.2

.2 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ و

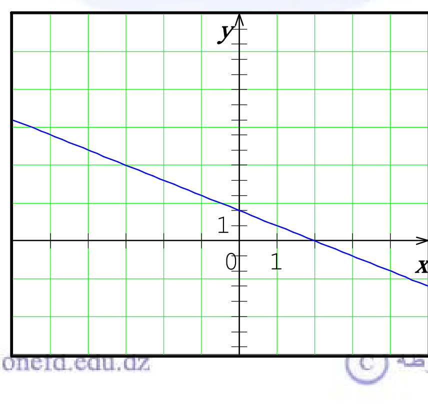
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$.

.3 من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = -1$. نلاحظ أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) < 0$

و منه الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

.3 المنحني الممثل للدالة f هو المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 2$ وتكفينا نقطتان لرسمه. فمثلا $f(0) = 2$ و $f(1) = 1$.



.3

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$ و

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$.

2. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = -2x - 1$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
إشارة $-2x-1$		$+$	0	$-$	

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right]$ و متزايدة تماما

على المجال $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

3. لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع $(x'x)$ نقوم بحل

المعادلة: $-x^2 - x + 2 = 0$.

$\Delta = 9$ ، $x' = -2$ و $x'' = 1$. يتقاطع إذن (C_f) مع $(x'x)$ في نقطتين

فاصلتاهما -2 و 1.

لدينا $f(0) = 2$ و منه يتقاطع (C_f) مع $(y'y)$ في النقطة التي ترتيبها 2 .

4. معادلة (Δ) هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

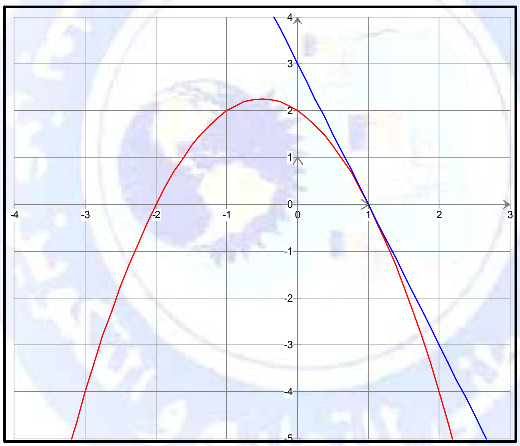
لدينا $f(1)=0$ و $f'(1)=-3$

و بالتالي معادلة للمماس (Δ) هي: $y=-3x+3$.

5. لرسم المنحني (C_f) ننشئ بعض النقط المساعدة

و من أجل ذلك نملأ الجدول التالي:

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	0	2	2	0	-4



.4

- النهايات:

لدينا حسب النشاط الثالث: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

- المشتقة: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=3x^2+1$.

- إشارة المشتقة:

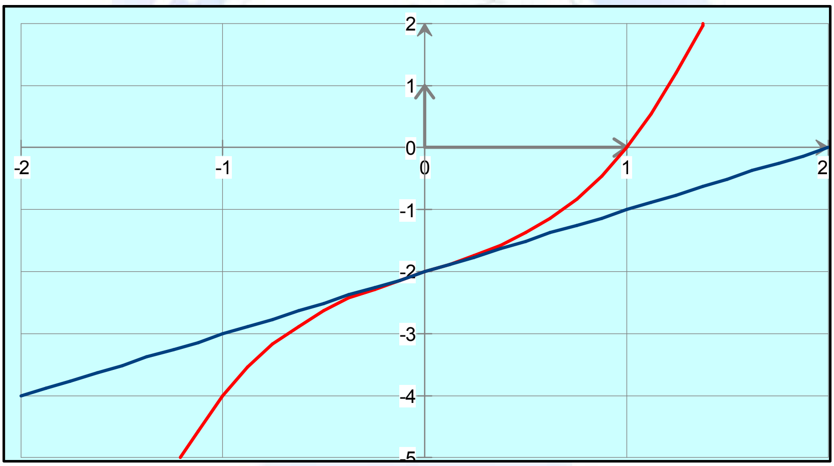
من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

- التمثيل البياني: مثلنا في الشكل المقابل (C_f)

و مماسه (Δ) عند نقطة الانعطاف، النقطة التي فاصلتها 0 و ترتيبها 2.



.5

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3) = +\infty$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3) = -\infty$.

2. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = -3x^2 - 2x + 5$.

لدينا $\Delta = 64$، $x' = -\frac{5}{3}$ و $x'' = 1$. و منه:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
إشارة $-3x^2-2x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{121}{27}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

3. نقوم بالنشر:

$$(x-2)(-x^2-3x-1)=-x^3-3x^2-x+2x^2+6x+2$$
$$=-x^3-x^2+5x+2=f(x)$$

$f(x)=0$ يعني $(x-2)(-x^2-3x-1)=0$

أي $x=2$ أو $-x^2-3x-1=0$

مميز $-x^2-3x-1=0$ هو $\Delta=5$ و منه الحلان هما:

$$x'=\frac{3-\sqrt{5}}{-2} \quad \text{و} \quad x''=\frac{3+\sqrt{5}}{-2}$$

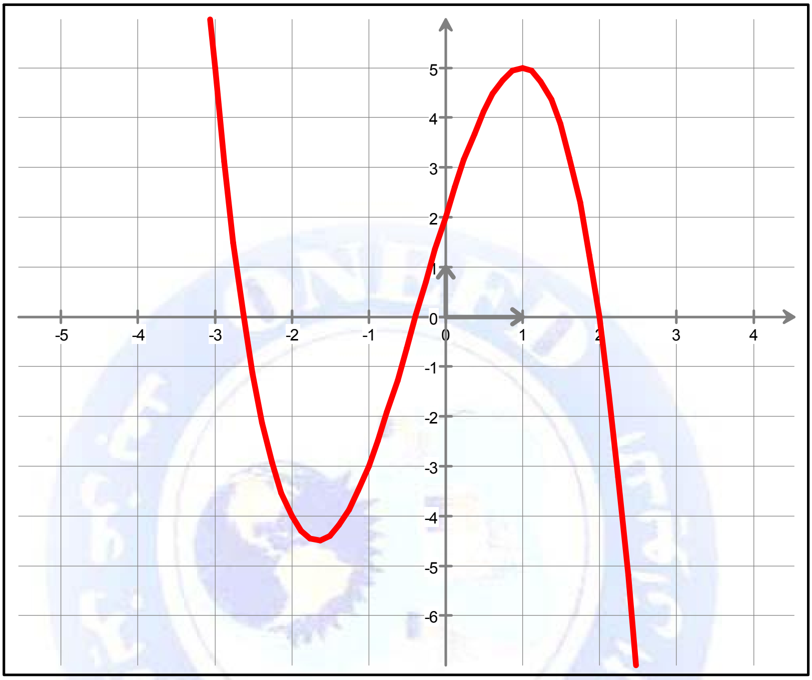
القيم المقربة لحلي المعادلة $-x^2-3x-1=0$ هما:

$-0,38$ و $-2,62$. يتقاطع إذن (C_f) مع $(x'x)$ في

ثلاث نقط فواصلها على الترتيب $-2,62$ ، $-0,38$ و 2.

4. لدينا كذلك $f(0)=2$ و منه يقطع (C_f) المحور

$(y'y)$ في النقطة التي ترتيبها2.



.6

1) أ ــ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

ب ــ الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$$

لدينا -1 و 1 هما جدران لثلاثي الحدود x^2-1 ومنه جدول الإشارة :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=6x$

f'' تنعدم عند 0 مغيرة إشارتها ، $f''(x)>0$ من أجل $x>0$

و $f''(x)<0$ من أجل $x<0$ و $f(0)=2$

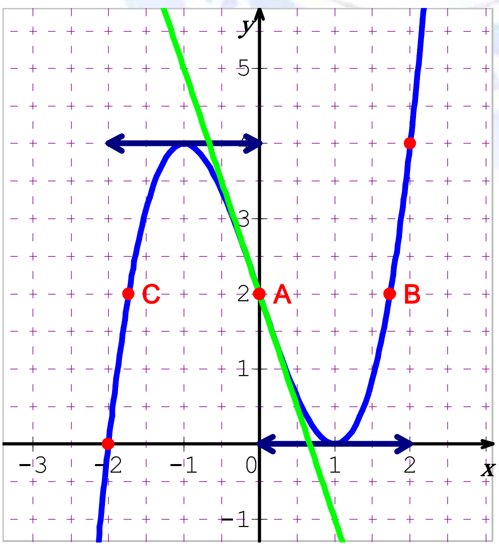
إذن $A(0;2)$ هي نقطة انعطاف للمنحني $\mathscr{C}$

3) $f'(0)=-3$ إذن معادلة للمماس Δ هي: $y=-3x+2$.

4) نحل المعادلة $f(x)=2$ أي $x^3-3x+2=2$ ومعناه $x(x^2-3)=0$

أي $x=0$ أو $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$.

إذن d يقطع $\mathscr{C}$ في نقط $A(0;2)$ ؛ $B(\sqrt{3};2)$ و $C(-\sqrt{3};2)$



5) $f(2)=4$ و $f(-2)=0$.

دوال تناظرية

7.

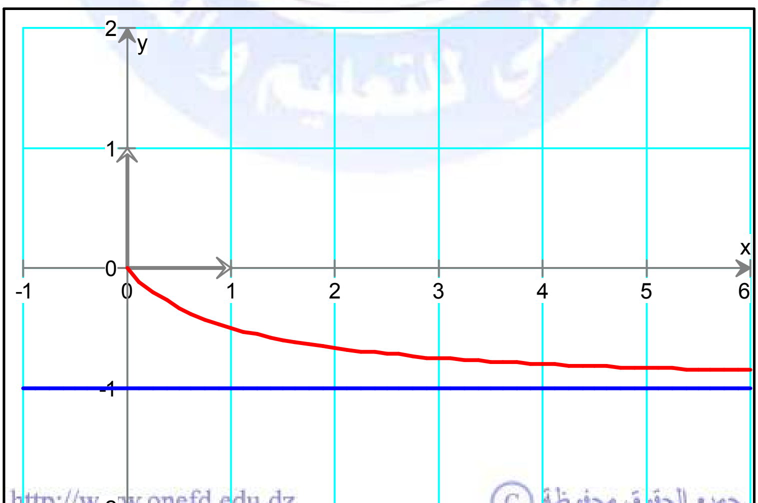
1. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{-1}{1}=-1$. نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ مستقيما مقاربا للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

2. من أجل كل x من $[0;+\infty[$،

$$f'(x)=\frac{-1(x+1)-1(-x)}{(x+1)^2}=\frac{-x-1+x}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2} .$$

من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)<0$ و منه الدالة f متناقصة تماما على $[0;+\infty[$. لدينا كذلك $f(0)=0$.

x	$0 \qquad\qquad\qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -1$



.8

1. من أجل كل x من $[-1;1[\cup]1;3]$، $f(x)=-4\times\frac{1}{x-1}$.

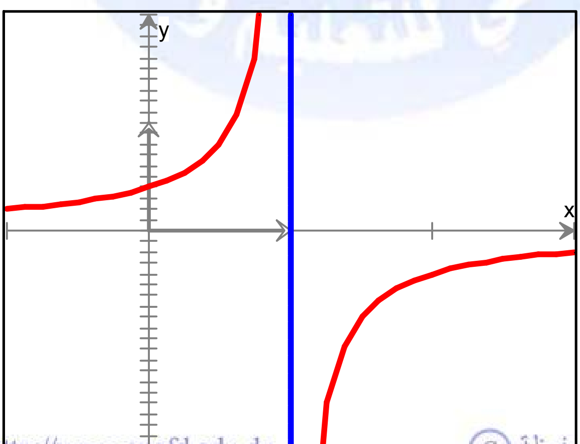
لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\frac{1}{x-1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\frac{1}{x-1}=+\infty$ و منه بعد الضرب في العدد (-4) نحصل على:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=-\infty$.

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مستقيما مقاربا للمنحني (C_f).

2. من أجل كل x من $[-1;1[\cup]1;3]$، $f'(x)=\frac{4}{(x-1)^2}$. إذن f متزايدة تماما على $[-1;1[$ و $]1;3]$.

x	-1		1		3
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-2



.9

- النهايات:

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{2}{1}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{2}{1}=2$.

* يمكن أن نكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x)=(2x+1)\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$.

لندرس إشارة $x+2$:

x	$-\infty$ $\qquad$ -2 $\qquad$ $+\infty$
إشارة $x+2$	$-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$

لدينا $\lim\limits_{x\to-2}(2x+1)=-3$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)=-\infty$ و منه

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-2}(2x+1)=-3$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)=+\infty$ و منه

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=-\infty$.

- المستقيمات المقاربة: يقبل (C_f) مستقيمان مقاربان أحدهما يوازي محور الفواصل والآخر يوازي محور التراتيب معادلتاهما $y=2$ و $x=-2$

- المشتقة: من أجل كل x من $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ ،

$f'(x)=\dfrac{2(x+2)-1(2x+1)}{(x+2)^2}=\dfrac{3}{(x+2)^2}$.

- إشارة المشتقة: من أجل كل x من $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ ،

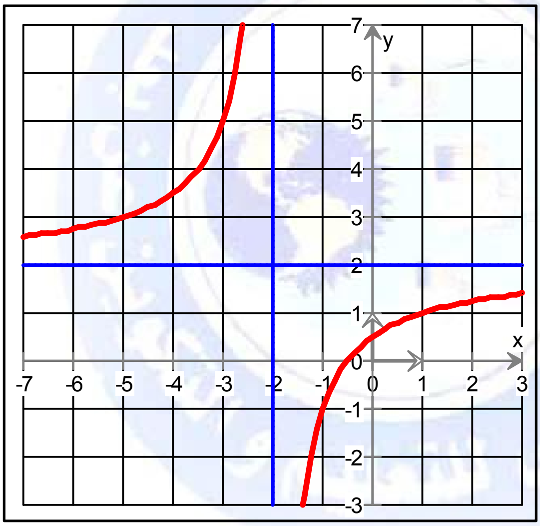
$f'(x)>0$

نستنتج أن f متزايدة تماما على كل من $]-\infty;-2[$ و $]-2;+\infty[$.

• جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert \ -\infty$	$\nearrow$	2

• التمثيل البياني: انظر الشكل المقابل.



ملاحظات

يسمى التمثيل البياني للدالة f المعرفة

على $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$ بــ: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ مع $c\neq 0$

و $ad-bc\neq 0$ قطعا زائدا معادلتا مستقيميه المقاربين $y=\frac{a}{c}$

و $x=-\frac{d}{c}$.

.10

.1 لدينا مثلا من جهة $f(0)=2$ و من جهة ثانية $f(0)=a+7$

و منه $a+7=2$ أي $a=-5$.

و بالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $f(x)=-5+\frac{7}{x+1}$.

.2 * لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-5$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-5$.

* لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ،

$f(x)=-5+7\times\frac{1}{x+1}$. لندرس إشارة $x-1$:

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $+\infty$
إشارة $x+1$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

$\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\left(\frac{1}{x+1}\right)=-\infty$ و منه بعد الضرب في 7 و إضافة -5 نحصل على $\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=-\infty$.

$\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left(\frac{1}{x+1}\right)=+\infty$ و منه بعد الضرب في 7 و إضافة -5 نحصل على $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=+\infty$.

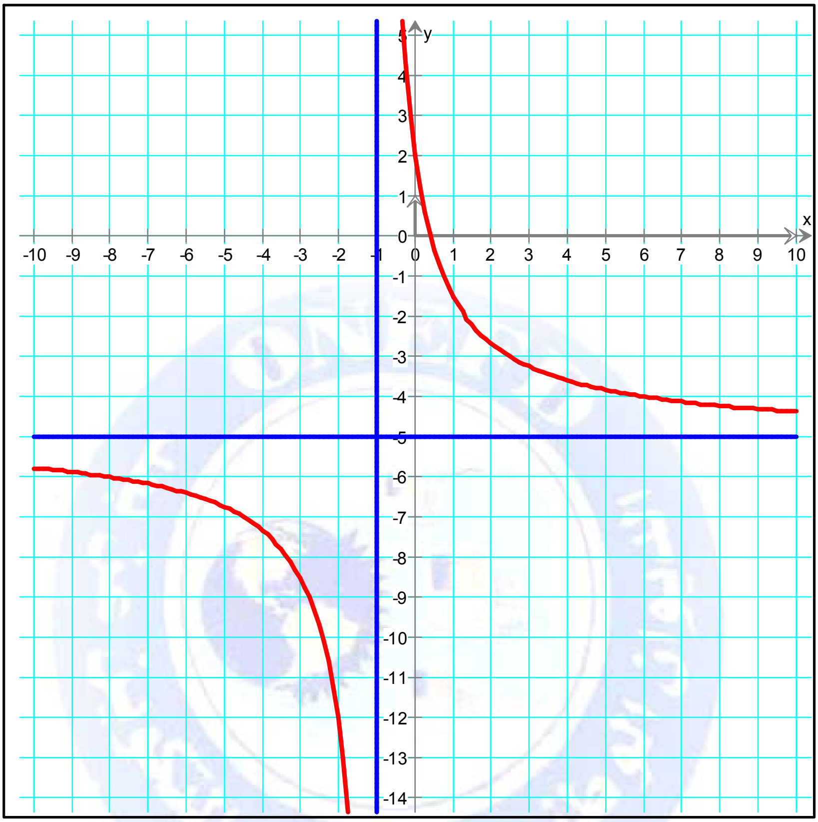
نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل $(x'x)$ معا دلته $y=-5$ و مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب $(y'y)$ معادلته $x=-1$.

3. لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $f'(x)=-\dfrac{7}{(x+1)^2}$.

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $f'(x)<0$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-5

4. لرسم المنحني (C_f) بأكثر دقة يمكن رسم بعض النقط المساعدة كنقطة تقاطع (C_f) مع $(y'y)$ و المحصل على ترتيبها بحساب $f(0)$ و نقطة تقاطع (C_f) مع $(x'x)$ و المحصل على فاصلتها بحل المعادلة $f(x)=0$.



.11

1) أ ـــ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

$\lim_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = +\infty$

ب ـــ $f'(x) = \frac{-2}{(x-3)^2}$ ومنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ ، $f'(x) < 0$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	2

2) تقاطع (C) مع (xx') بوضع $y=0$ أي $\frac{2x-4}{x-3}=0$ ومعناه $x=2$

تقاطع (C) مع (yy') بوضع $x=0$ أي $y=\frac{2\times 0-4}{0-3}$ ومعناه $y=\frac{4}{3}$

3) $f'(x)=-2$ معناه $\frac{-2}{(x-3)^2}=-2$ أي $(x-3)^2=1$ ويكافئ

$x-3=1$ أو $x-3=-1$ ومعناه $x=4$ أو $x=2$.

$T: y=-2x+12$ و $T': y=-2x+4$.

4) التمثيل البياني:

حلول لتمارين البحث والتعمق في الدوال والاحتمالات:

I. الدوال

تمرين 1:

1. حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.

2. دراسة اتجاه تغيرات الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها

الدالة f قابلة الاشتقاق في $\mathbb{R}$ باعتبارها دلة كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة و لدينا : من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$$\boxed{f'(x) = 6(x^2 - 3x + 2)}$$

درسة إشارة $f'(x)$. المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلين متمايزين هما $x=1$ و $x=2$ و لدينا الجدول

x	$-\infty$ 1 2 $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 − 0 +

و عليه فإن الدالة f متزايدة في المجال $]-\infty,1]\cup[2,+\infty[$

f متناقصة في المجال $[1,2]$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1)=0$ $\qquad$ $f(2)=-1$

3. النقطة $I(\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$ هي نقطة انعطاف للمنحى (C_f) .

تكون النقطة I نقطة انعطاف للمنحى (C_f) إذا تحقق ما يلي:

- الدالة $x\to f'(x)$ قابلة الاشتقاق و تنعدم عند القيمة $\frac{3}{2}$.
- إشارة $f''(x)$ تتغير عند القيمة $x=\frac{3}{2}$.

الدالة $x\to f'(x)=6x^2-18x+12$ قابلة الاشتقاق في $\mathbb{R}$ باعتبارها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية و لدينا : $f''(x)=12x-18$

$f''(x)=6(x-3)$

من جهة أخرى المعادلة $f''(x)=0$ تقبل حلا وحيدا هو $x=\frac{3}{2}$

و لدينا من إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	

لنحسب $f(\frac{3}{2})$. $f(\frac{3}{2})=2(\frac{3}{2})^3-9(\frac{3}{2})^2+12(\frac{3}{2})-5$

$f(\frac{3}{2})=\frac{-1}{2}$

إذن النقطة $I(\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$ هي نقطة انعطاف للمنحى (C_f) .

4. معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة I .

نعلم أن معادلة المماس تكتب على الشكل :

$(\Delta):\quad y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ مع $x_0=\frac{3}{2}$

و عليه فإن $(\Delta):\quad y = f'(\frac{3}{2})(x-\frac{3}{2})+f(\frac{3}{2})$

$$f(\frac{3}{2})=\frac{-1}{2}$$

$$f'(\frac{3}{2})=\frac{-1}{2}$$

بتعويض القيمتين نحصل على :

$$(\Delta):\quad y=\frac{-3}{2}x+\frac{7}{4}$$

ملاحظة : النقطة $I(\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$ تنتمي إلى : $(C_f)\cap(\Delta)$.

5. تحقق أن : $f(x)=(x-1)^2(2x-5)$

لنحسب على حدى العبارة $(x-1)^2(2x-5)$ لدينا :

$$\begin{aligned}(x-1)^2(2x-5) &= (x^2-2x+1)(2x-5)\\ &= 2x^3-5x^2+2x-5-4x^2+10x\\ &= 2x^3-9x^2+12x\\ &= f(x)\end{aligned}$$

ملاحظة : نلاحظ أن $f(1)=0$ و منه $f(x)=(x-1)^2(ax^2+bx+c)$

و بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نحصل على $a=2$

$b=-7$

$c=5$

$$f(x)=(x-1)^2(2x^2-7x+5)$$

و بما أن : $2x^2-7x+5=2(x-1)(x-\frac{-5}{2})$ نحصل على الجواب المطلوب بطريقة أخرى .

نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل هي حلول المعادلة

$f(x)=0$ أي $(x-1)^2(2x-5)=0$

$x=1$ أو $x=\frac{5}{2}$

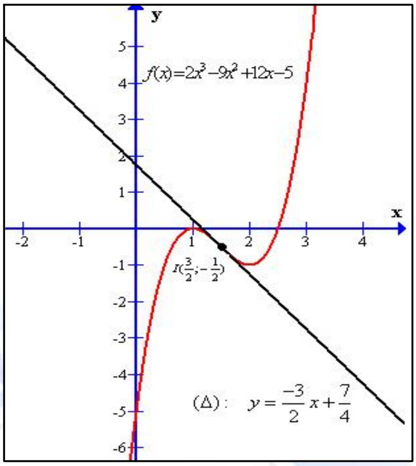
و لدينا النقط $(1,0)$ ، $(\frac{5}{2},0)$.

6. رسم (Δ) و (C_f) .

$(\Delta):\ y=\frac{-3}{2}x+\frac{7}{4}$ و لدينا $I\in(\Delta)$

يمكن إبراز نقط مساعد لإنشاء (C_f) و هي النقط التالية

$I(\frac{3}{2};-\frac{1}{2})\in(C_f)$ فالنقط التالية $(1;0)$ ، $(\frac{5}{2};0)$ و $(0;-5)$ النقط لحديه للمنحنى هي : $(1;0)$ و $(2;-1)$.



تمرين 2:

1. أ- تعين $f'(1)$ و $f'(1)$.

من خلال القرارة على الشكل نلاحظ أن المنحنى (C_f) يقبل عند النقطة $(1\,;0)$ مماسا موازي لحامل محور الفواصل و عليه فإن $f'(1)=0$.

نفس الملاحظة عند النقطة $(-1\,;0)$ و لدينا إذا $f'(-1)=0$

ب- تعين صورتي العددين $f(-2)$ و $f(-1)$.

بالقراءة على الشكل لدينا المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل عند القيمتين $x=-2$ و $x=1$ هذا معناه أن $f(-2)=\ f(1)=0$

ج− جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-2;2]$.

x	-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	-4	↗	0	↘	-4

2. مقارنة العددين $f(\frac{3}{2})$ و $f(\sqrt{3})$.

من الواضح أن $\sqrt{3}>\frac{3}{2}$ لأن $(\sqrt{3})^2>(\frac{3}{2})^2$

و لدينا $\sqrt{3}>\frac{3}{2}>1$ و في المجال $[1,+\infty[$ فإن الدالة f متناقصة و عليه

فإن : $f(\sqrt{3})< f(\frac{3}{2})$.

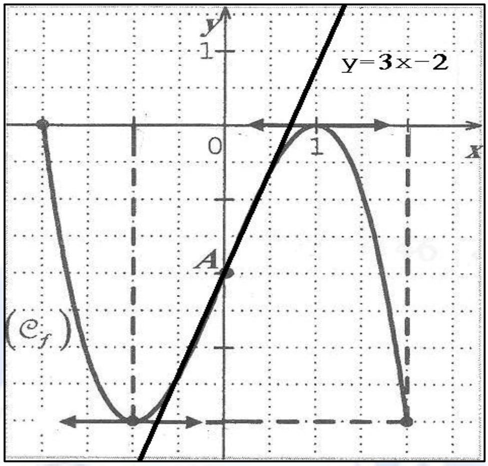
3. $A(0\,;-2)$ تنتمي إلى (C_f) : $f(0)=-2$

و بما أن $f'(x)=3$ فإن معادلة المماس للمنحنى في النقطة A معادلتها

هي $y= f'(0)(x-0)+(-2)$

$y=3x-2$

بإمكاننا رسم المستقيم ذو معادلة $y=3x-2$.



تمرين 3:

1. أ− حساب النهايات للدالة f عند حدود مجالات التعريف.

$f(x)=\dfrac{2x-5}{x+2}$ و منه مجموعة التعريف للدالة f هي:

$$D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{2x-5}{x+2}=2$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\ >}} f(x)=-\infty \quad ؛ \quad \lim_{\substack{x\to-2\\ <}} f(x)=+\infty$$

ب− دراسة اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها .

الدالة f قابلة الاشتقاق D_f و لدينا :

$f'(x)=\dfrac{2(x+2)-(1)(2x-5)}{(x+2)^2}$ أي $f'(x)=\dfrac{9}{(x+2)^2}$

و منه فإن $f'(x)>0$ و عليه فإن f متزايدة في D_f .

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 2$

2. نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل .

فواصل تقاطع (C) مع حامل محور الفواصل هي حلول المعادلة :

$f(x)=0$ أي : $\frac{2x-5}{x+2}=0$ معناه أن $x=\frac{5}{2}$ و لدينا النقطة $(\frac{5}{2};0)$

3. معادلة المماس T للمنحني C في النقطة ذات الفاصلة 0 .

نعلم أن معادلة (T) تكتب على الشكل :

$(T):\quad y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ علما أن $x_0=0$

$(T):\quad y=f'(0)x+f(0)$

$f'(0)=\frac{9}{4}$ و $f(0)=\frac{-5}{2}$

$(T):\quad y=\frac{9}{4}x-\frac{5}{2}$

4. إنشاء (T) و C .

معادلة لـــ (T): هي $y=\frac{9}{4}x-\frac{5}{2}$

إبراز بعض النقط المميزة للمنحني C .

$(\frac{5}{2};0)\in(C)$

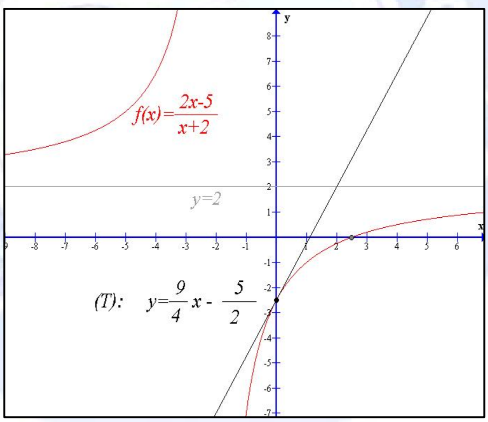
$(0;-\frac{5}{2})\in(C)$

المستقيمات المقاربة للمنحني (C)

بما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{2x-5}{x+2}=2$ فإن المستقيم ذو معادلة $y=2$ مستقيم مقارب للمنحني يوازي محور الفواصل.

و بما أن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x)=-\infty \end{cases}$ فإن المستقيم ذو معادلة $x=2$ مستقيم مقارب للمنحني يوازي محور التراتيب .

إنشاء المنحني مع إبراز المستقيمات المقاربة



5. المستقيم (Δ) يقطع المنحني C في نقطتين

$(\Delta): \quad 3x+y-2=0$

فواصل نقط تقاطع (C) مع (Δ) هي حلول المعادلة $f(x)=2-3x$

أي: $\dfrac{2x-5}{x+2}=2-3x$ معناه : $(2-3x)(x+2)=2x-5$

معناه : $x^2+2x-3=0$ معادلة تقبل حلين متمايزين $x=1$ أو $x=-3$

و عليه فإن نقط تقاطع (C) مع (Δ) هي النقط $(1;-1)$ و $(-3;11)$.

تمرين 4:

1. **دراسة تغيرات الدالة f .**

الدالة f قابلة الاشتقاق في مجال تعريفها D_f حيث $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

باعتبارها دالة ناطقة. و لدينا $f'(x)=\dfrac{2(x+1)-(1)(2x-1)}{(x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ موجبة تماما مهما يكن x عنصر من D_f .

و عليه فإن الدالة f متزايدة في المجال : $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

2. **عين نقط تقاطع المنحنى (C) مع محوري الإحداثيات .**

تقاطع (C) مع محور الفواصل :

فواصل هذه النقط هي حلول المعادلة $f(x)=0$ أي : $\dfrac{2x-1}{x+1}=0$

معناه: $2x-1=0$ التي تقبل حلا وحيدا $x=\dfrac{1}{2}$ و لدينا النقطة $(\dfrac{1}{2};0)$.

تقاطع (C) مع محور التراتيب : نحسب $f(0)$.

$f(0)=-1$ و لدينا النقطة $(0;-1)$.

3. **حساب $f'(0)$ ثم $f'(-2)$** .

$f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ و منه $f'(0)=3$ و $f'(-2)=3$

لدينا $A(0;-1)$ و $B(-2;5)$. بما أن معامل توجيه المماس للمنحني عند النقطة A يساوي معامل توجيه المماس عند النقطة B فإن المماسين متوازيين.

- معادلة المماس للمنحني عند النقطة $A(0\,;-1)$

و عليه نحصل على :
$$\begin{cases} y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x_0=0 \quad \text{علما أن} \end{cases}$$

$$y = f'(0)(x-0)+f(0)$$

معادلة المماس للمنحني عند النقطة A هي $y=3x-1$

- معادلة المماس للمنحني عند النقطة $B(-2\,;5)$ هي :

$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ مع $x_0=-2$

$y = f'(-2)(x+2)+f(-2)$ أي $y=3x+11$

4. إنشاء المماسين .

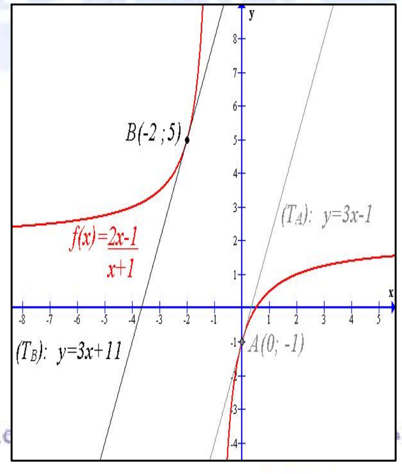
نرمز إلى T_A المماس للمنحني (C) عند النقطة A

T_B المماس للمنحني (C) عند النقطة B

لدينا : $(T_A):\quad y=3x-1$

$(T_B):\quad y=3x+11$

إنشاء المنحني (C) ذو معادلة $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$.



تمرين 5:

الدالة f معرفة في $\mathbb{R}-\{1\}$ و عبارتها : $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$.

الدالة f قابلة الاشتقاق في مجموعة تعريفها D_f

حيث : $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ كونها دالة ناطقة

و لدينا : $f'(x)=\dfrac{(-1)(x-1)-(-x+2)}{(x+1)^2}$ معناه : $f'(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$.

دراسة تغيرات الدالة f مع تعين المستقيمات المقاربة.

من عبارة $f'(x)$ نستنتج أن $f'(x)<0$ من أجل كل عنصر x من D_f

حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1} f(x)$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ و عليه فإن المستقيم ذو معادلة $y=-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) يوازي محور الفواصل .

حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$.

من خلال إشارة $(x-1)$ نحصل على النتائج التالية :

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} \dfrac{-x+2}{x-1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} \dfrac{-x+2}{x-1}=+\infty$ و عليه فإن المستقيم ذو معادلة $x=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) يوازي محور التراتيب.

2. أ)تعيين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C) مع:

تقاطع (C) يوازي محور الفواصل : نحل المعادلة $f(x)=0$ أي $\dfrac{-x+2}{x-1}=0$ معناه $x=2$ و لدينا النقطة $(2\,;0)$.

تقاطع (C) يوازي محور التراتيب: تحسب $f(0)$.

$f(0)=-2$ و لدينا النقطة $(0\,;-2)$.

ب) وجود نقطتان من (C) يكون معامل توجيه المماس عند كل منهما يساوي (-1) .

نحل المعادلة $f'(x)=-1$ أي $\frac{-1}{(x-1)^2}$ أي $x(x-2)=0$ معادلة تقبل حلين متمايزين هما $x=0$ و $x=2$ و لدينا النقطتان $(0;-2)$ و $(2;0)$.

ج) معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطتين $(0;-2)$.

لدينا $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ علما أن $x_0=0$

أي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$y=-x-2$

ح) معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطتين $(2;0)$.

لدينا $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ علما أن $x_0=2$

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$ أي : $y=-x+2$

نلاحظ أن المماسين متوازيين.

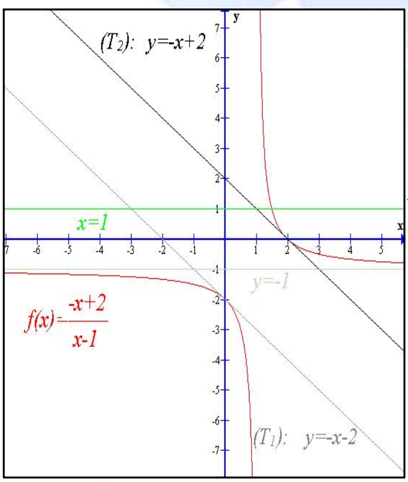
3. أرسم المماسين و المنحني (C) .

المماسين : $(T_1):\ y=-x-2$

$(T_2):\ y=-x+2$

المنحنى (C)

- إبراز نقط تقاطع (C) مع المحاور $(0;-2)$ ، $(2;0)$.
- المستقيمات المقاربة:
- $x=1$ و $y=-1$.



تمرين 6:

f و g دالتان عدديتان للمتغير الحقيقي x معرفتان على الترتيب على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}-\{1\}$ حيث: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ و $g(x)=\frac{x}{1-x}$.

(C_f) و (C_g) منحنياهما البيانيان على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1. أ- دراسة تغيرات الدالتين f و g حيث : $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ ؛ $g(x)=\frac{x}{1-x}$.

الدالة f و عبارتها : $f(x)=\frac{-x+2}{x-1}$.

الدالة f قابلة الاشتقاق في مجموعة تعريفها $D_f=\mathbb{R}$ باعتبارها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية و لدينا $f'(x)=-x^2$.

الدالة g قابلة الاشتقاق في مجموعة تعريفها $\mathbb{R}-\{1\}$ لكونها دالة ناطقة و لدينا : $g'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$.

و من خلال عبارة كلا من $f(x)$ و $g(x)$ نستنتج ما يلي :

$f'(x)\leq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x و عليه فإن الدالة f متناقصة في $\mathbb{R}$.

$g'(x)>0$ مهما يكن x عنصر من $D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$ و عليه فإن الدالة g متزايدة في D_f .

ب – المستقيمات المقاربة للمنحني (C_g) .

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=-1$ و عليه فإن المستقيم ذو م

عادلة $y=-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_g) .

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} g(x)=-\infty$ و عليه فإن المستقيم $x=1$

مستقيم مقارب للمنحني (C_g) يوازي محور التراتيب .

2. نقط تقاطع (C_f) و (C_g) .

$(C_f):\quad f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ ؛ $(C_g):\quad g(x)=\frac{x}{1-x}$.

فواصل نقط تقاطع (C_f) و (C_g) هي حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

لنحل المعادلة إذا : $\frac{-1}{2}x^2=\frac{x}{1-x}$

معناه $-x^2(1-x)=2x$ أي $x\left[2+x(1-x)\right]=0$

$x=0$ أو $x^2-x-2=0$ معادلة

تقبل حلين متمايزين هما : $x=-1$ و $x=+2$.

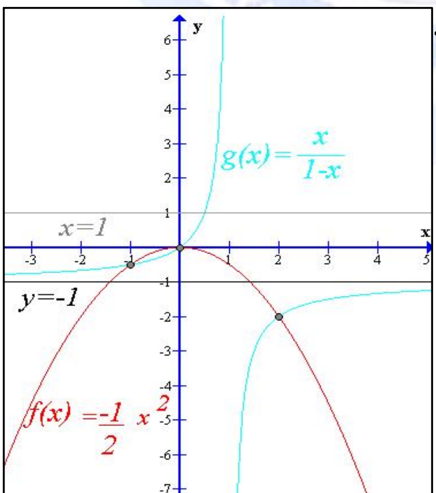
إذا المنحنيين (C_f) و (C_g) يتقاطعان في ثلاثة نقط هي $(0\,;0)$ ؛

$(-1\,;-\frac{1}{2})$ ؛ $(2\,;-2)$.

3. رسم المنحنيين (C_f) و (C_g) .

$(C_f):\quad f(x)=-\frac{1}{2}x^2$

$(C_g):\quad g(x)=\frac{x}{1-x}$.



تمرين 7:

أ – خطأ .

ب– بما أن $f'(x)=\frac{-7}{(x+5)^2}$ و $f'(x)<0$ فإن f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-5[$ و $]-5;+\infty[$ إذا: (ب) خطأ.

ج – خطأ لأن $f'(x)\neq 0$.

د– خطأ لأن $f'(x)=0$ يقبل حلا $x=2$.

هـــ – خطأ.

و– معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي : $y=-\frac{7}{25}x+\frac{2}{5}$ الجواب (و) صحيح .

تمرين 8:

$f(x)=-1+\frac{7}{2(x-2)}$.

1– خطأ لأن $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$.

2– عبارة أخرى لــ: $f(x)=\frac{-2x+11}{2x+4}$ ←خطأ لاحظ عبارة المقام في كلا من العبارتين لـــ: $f(x)$.

3– صحيح لأن $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}2} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}2} f(x)=-\infty$.

4– لدينا $f'(x)=\frac{-7}{2}\left[\frac{-1}{(x-2)^2}\right]$ ؛ $f'(x)<0$: الجواب خطأ.

5– $f'(1)=\frac{-7}{2}$ الجواب خطأ.

6- الدالة f متناقصة في المجال $]2\,;+\infty[$ المجال $]3\,;5[$ محتواة في $]2\,;+\infty[$ وعليه لدينا من أجل $3<x<5$ فإن $f(5)<f(x)<f(3)$ لأن الدالة f متناقصة في $]2\,;+\infty[$

$f(5)=\frac{1}{6}$ و $f(3)=\frac{5}{2}$ وعليه من أجل $3<x<5$ فإن $\frac{1}{6}<f(x)<\frac{5}{2}$

الجواب (6) صحيح.

7- لنحسب $f(0)$.

$f(0)=-1+\frac{7}{-4}=\frac{-11}{4}$. الجواب (7) خطأ.

II. الاحتمالات

تمرين 1:

1) الأعداد المحصل عليها مشكلة من المئات و العشرات و الآحاد (هناك 5 إمكانيات بالنسبة لرقم المئات، من أجل كل إمكانية هناك 5 إمكانيات بالنسبة لرقم العشرات أي 25 إمكانية ومن أجل كل إمكانية للعشرات هنا 5 إمكانيات بالنسبة لرقم الآحاد) وبالتالي هناك $5\times5\times5=125$ عدد ممكنا.

2) في الحالة الثانية هناك $5\times4\times3=60$ عددا (باعتبار أن الأرقام مختلفة مثنى مثنى ، الكرية المسحوبة لا ترجع).

- المخرج الذي يحقق الحادثة A يناسب وضع الرقم 4 رقما للعشرات فتبقى 4 إمكانيات لرقم المئات و لكل إمكانية تبقى 3 إمكانيات لرقم الآحاد أي $4\times3=12$ حالة ملائمة و بالتالي

تمرين 2:

عند رمي الحجرين مجموعة النتائج الممكنة هي $S=\{2,3,4,5,6,7,8\}$

باعتبار أن النتيجة هي مجموع الرقمين الظاهرين يدفع اللاعب A ستة دنانير ويأخذ ضعف النتيجة و بالتالي قيم الربح

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

هي $E'=\{-2,0,2,4,6,8,10\}$

قانون الاحتمال يعطى بالجدول التالي

و $\sum_{i=1}^{7} P_i = 1$

x_i	-2	0	2	4	6	8	10
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

الأمل الرياضياتي هو

$$\mu = \frac{1}{16}\times(-2)+\frac{2}{16}\times(0)+\frac{3}{16}\times(2)+\frac{4}{16}\times(4)+$$
$$\frac{3}{16}\times(6)+\frac{2}{16}\times(8)+\frac{1}{16}\times(10)=\frac{64}{16}=4$$

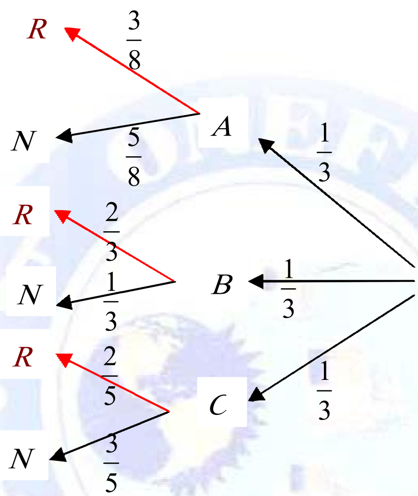
إذن أمل الربح بالنسبة للاعب A هو 4 دينار .

لحساب أمل الربح للاعب B نطرح 4 من كل القيم x_i للاعب A وبالتالي أمل ربحه $\mu'=\mu-4=0$ بالنسبة للاعب B اللعبة عادلة (لا له ولا عليه).

تمرين 3:

نرمز للكرية الحمراء بالرمز R

والكرية السوداء بالرمز N و ننشئ شجرة الاحتمالات بالشكل التالي :



احتمال أن نكون قد أخذنا الصندوق(A) سحبنا منه كرية حمراء هو :

. $P(A\cap R)$

$P(A\cap R)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$ و هناك ثلاثة مسارات تؤدي إلى كرية حمراء :

$$P(R)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{175}{360}$$

$$P_R(A)=\frac{P(A\cap R)}{P(R)}=\frac{1}{8}\div\frac{175}{360}=\frac{173}{45}$$

تمرين 4:

نمثل محتويات الصندوق بالثنائية (2 ، 3) التي تعني وجود كرتين حمراوين و ثلاث كرات خضراء في الصندوق.

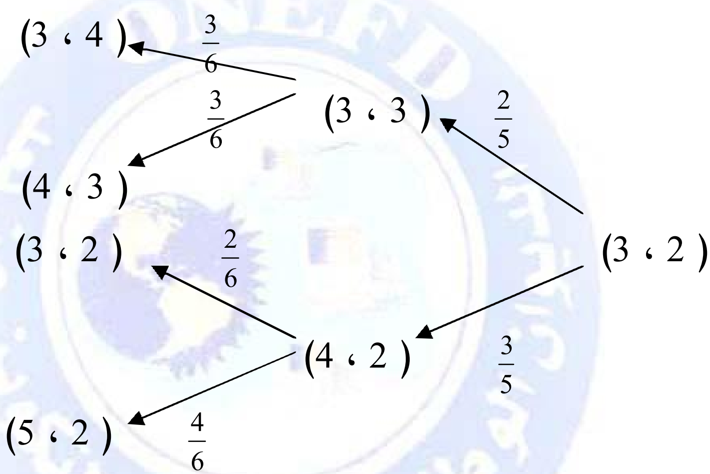
احتمال سحب كرة حمراء في السحبة الأولى هو $\frac{2}{5}$.

قبل السحبة الثانية يمثل الصندوق بالثنائية (3 ، 3).

احتمال سحب كرة خضراء في السحبة الأولى هو $\frac{3}{5}$.

قبل السحبة الثانية يمثل الصندوق بالثنائية (2 ، 4).

نلخص العملية بالمخطط المقابل :



إذن باستعمال المسارات المؤدية إلى (3 ، 4) ينتج

$P(A)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{5}$ و بنفس الطريقة نجد : $P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{5}$

تمرين 5:

1) $P(B_1)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ ، $P(B_2)=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}+\frac{8}{12}\times\frac{4}{11}=\frac{44}{132}=\frac{1}{3}$

$P(B_1\cap B_2)=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}=\frac{1}{11}$ بما أن $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\neq\frac{1}{11}$ فإن الحادثتين الحاثتان

B_1 و B_2 غير مستقلتين.

2) $P(B_1)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ ، $P(B_2)=\frac{4}{12}\times\frac{4}{12}+\frac{8}{12}\times\frac{4}{12}=\frac{48}{144}=\frac{1}{3}$ ،

$P(B_1\cap B_2)=\frac{4}{12}\times\frac{4}{12}=\frac{1}{9}$ بما أن $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ إذن B_1 و B_2 مستقلتان .

تمرين 6:

1) نرمز للكرة البيضاء بالرمز B و للكرة الحمراء بالرمز R .

مجموعة المخارج الممكنة هي : $E=\{(B,B);(B,R);(R,B);(R,R)\}$

نفرض أن القانون المعرف على E متساوي الاحتمال، لدينا عندئذ

$P(M)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ، $P(N)=\frac{3}{4}$ و منه $P(M)\times P(N)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

ولدينا $M\cap N=\{(B,R);(R,B)\}$ إذن $P(A\cap B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

ومنه الحادثتان M و N غير مستقلتين.

2) مجموعة النتائج هي :

$E=\{(B,B,B);(B,B,R);(R,B,B);(B,R,R);(R,B,R);(R,R,B);(R,R,R)\}$

$P(M)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ ، $P(N)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ و منه $P(M)\times P(N)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

و لدينا $M\cap N=\{(B,B,R);(B,R,B);(R,B,B)\}$ إذن $P(A\cap B)=\frac{3}{8}$

و منه الحادثتان M و N مستقلتان.

تمرين 7:

نرمز بالرمز A_i للحادثة " التلميذ قادم من المتوسطة M_i " مع $1\le i\le 3$

وبالرمز B للحادثة " التلميذ يعيد السنة".

a) بما أن القانون ذو توزيع منتظم (تساوي احتمال) تترجم النسب إلى

الاحتمالات التالية: $p(A_3)=1-p(A_1)-p(A_2)=0,35$

؛ $P(A_2)=0,25$ ؛ $p(A_1)=0,40$

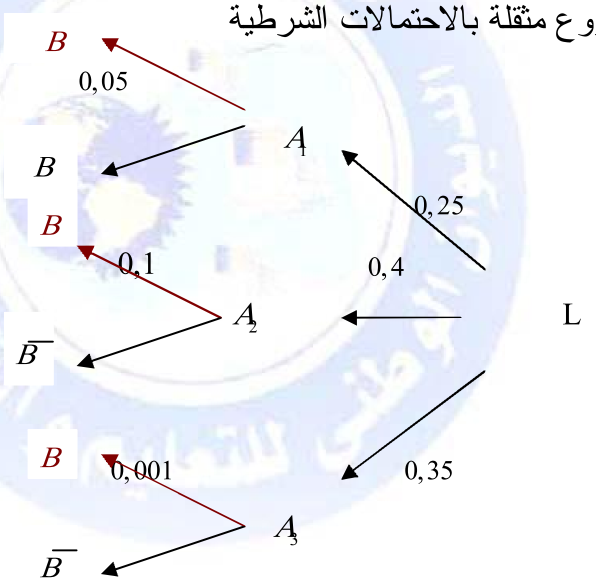
- نشكل الشجرة المتوازنة $p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)=1$
- تظهر في نص التمرين الاحتمالات الشرطية كما يلي :

احتمال أن يكون التلميذ معيدا إذا كان قادما من المتوسطة M_1 هو $0,05$

أي $p_{A_1}(B)=0,05$ و كذلك نقرأ $p_{A_2}(B)=0,1$ و $p_{A_3}(B)=0,001$

- نكمل الشجرة بفروع تتجه نحو B أو $\overline{B}$ ($\overline{B}$ الحادثة العكسية للحادثة B)

الفروع مثقلة بالاحتمالات الشرطية



لا تنس أن مجموع احتمالات الفروع في نفس المستوي يساوي 1

$p_{A_i}(B)+p_{A_i}(\overline{B})=1$ و كذلك $P(A_i\cap B)=P(A_i)\times p_{A_i}(B)$

b) نحسب $p(B)$ باستعمال دستور الاحتمالات الكلية

$$p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+p(A_3\cap B)$$

$$=0,25\times 0,05+0,4\times 0,1+0,35\times 0,001=0,05285$$

تمرين 8:

1) مجموع المخارج الممكنة هي $E=\{(1,1);(1,0);(0,1);(0,0)\}$

نفرض أن القانون المعرف على E متساوي الاحتمال، لدينا عندئذ

$p(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ، $p(B)=\frac{3}{4}$ و منه $p(A)+p(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

و لدينا $A\cap B=\{(1,0);(0,1)\}$ إذن $p(A\cap B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

و منه الحادثتان A و B غير مستقلتين

2) مجموعة النتائج هي

$$E=\{(1,1,1);(1,1,0);(1,0,1);(0,1,1);(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1);(0,0,0)\}$$

$p(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ ، $p(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ و منه $p(A)+p(B)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

و لدينا $A\cap B=\{(0,1,1);(1,1,0);(1,0,1)\}$ إذن $p(A\cap B)=\frac{3}{8}$

و منه الحادثتان A و B مستقلتان

تمرين 9:

احتمال الحادثة $A\cap B$ هو جداء الاحتمالين $p(A)$ و $p(B)$ في حالة استقلاليهما و إلا فهو جداء الاحتمالين $p(A)$ و $p_A(B)$ مثلا

لدينا $p_M(N)=0,3$ و $p(N)=\frac{45}{100}=0,3$ ، $p(N)=p_M(N)$ و هذا يعني

أن M و N مستقلتان و بالتالي $p(M\cap N)=p(M)\times p(N)$

لكن $p(M)=\frac{90}{150}=0,60$ إذن $p(M\cap N)=0,6\times 0,3=0,18$