1. الاحتمالات

الاحتمالات الشرطية – الحوادث المستقلة

الكفاءات المستهدفة

- حساب احتمال وقوع حدث شرط وقوع حدث آخر.
- بناء شجرة الإمكانيات المرجحة.
- استعمال أشجار مرجحة للحصول على علاقة الاحتمالات الكلية.
- التحقق من استقلال حادثتين.
- بناء شجرة الإمكانيات المرجحة واستعمالها في حالة تكرار تجارب متطابقة ومستقلة.

تصميم الدرس

تعريف

I. الاحتمالات الشرطية
II. شجرة الإمكانيات
III. الحوادث المستقلة
IV. ملخص
V. توظيف المعارف (تمارين + حلول وإرشادات)
VI. التقويم الذاتي (اختيار من متعدد + صحيح أم خاطئ)
VII. استعد للبكالوريا

تعريف:

"تابع لما قدّم في بداية الإرسال الثاني"

حل *Jérôme Cardan* الرياضياتي الإيطالي الجنسية (1501– 1576) بتوزيع المبلغ على اللاعبين بدلالة النقط التي تنقص كل واحد منهما لربح الجولة، وبالرّغم من أنّه لا يمكن تقديم النقد السابق لهذا الحل، الاّ أنّه غير مدعم بأي استدلال.

وفي النهاية فإنّ *Blaise Pascal* الرياضياتي الفرنسي الجنسية (1623– 1662) هو من حل المشكلة التي طرحها عليه أحد اصدقائه، ويُذكر أنّ هذه المشكلة وردت في مراسلة بين الرياضيين *Pascal* و *Fremat*: حيث يصطنع شوطا إضافيا، والذي يمكن أن يعطي إحدى النتيجتين:

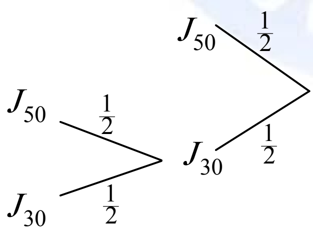
- إما اللاعب المتأخر يربح، وكل منهما يأخذ 11 أوقية.
- وإما اللاعب المتقدم يربح، وعندئذ يربح اللعبة فيأخذ 22 أوقية.

ومنه فإنّ اللاعب المتقدم من حقه 11 أوقية، بينما الـ 11 أوقية الأخرى يقتسمانها معا بالتساوي، لأنّ كلا منهما له نفس الحظ في ربح الشوط الإضافي، وبالتالي فإنّ اللاعب المتقدم يأخذ *16,5* أوقية والآخر يأخذ *5,5* أوقية.

وهو حل مبني على استدلال متين، ولم يتعرض لأية مناقشة إلى اليوم.

حل معاصر: نرمز بـ J_{50} (J_{30}) للحادثة "اللاعب الذي سجل 50 (30) نقطة يربح"، فيكون: $P(J_{50})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

و $P(J_{30})=1-P(J_{50})=\frac{1}{4}$



ومنه اللاعب الذي سجل 50 نقطة يأخذ ثلاثة أرباع المبلغ أي 16,5 أوقية، والآخر يأخذ ربع المبلغ أي 5,5 أوقية.

المصدر : *http://www.math93.com/theoreme/probabilites.html* بتصرف

I. الاحتمالات الشرطية :

نشاط

في قسم ثالثة آداب بإحدى الثانويات 38 تلميذا، منهم:

- 25 يدرسون اللغة الأمازيغية.
- 27 بنتا 19، منهنَّ يدرسن اللغة الأمازيغية.

1. لتلخيص الوضعية انقل الجدول الإحصائي المرفق وأكمله.

	ذكور	إناث	المجموع
يد أماز		19	
لا يد أماز			
المجموع			38

يد أماز : يدرس أمازيغية

لا يد أماز : لا يدرس أمازيغية

2. نختار عشوائيا تلميذا واحدا من هذا القسم، بإعطاء النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال، اُحسب احتمالات الحوادث الآتية:

F :"التلميذ أنثى" ، A :"التلميذ يدرس الأمازيغية" ، $F \cap A$: "التلميذ بنت تدرس الأمازيغية".

3. نأخذ الملف المدرسي لتلميذ من هذا القسم عشوائيا، إنّه ملف تلميذة. ما احتمال أن تكون تدرس الأمازيغية ؟

تسمية وترميز

يُسمَّي الاحتمال في هذه الحالة: " احتمال A شرط F " ونرمز له بالرمز $P_F(A)$ أو $P(A/F)$

كما يُسمَّى الاحتمال الشرطي لـ A علما أنّ F محققة.

• اوجد مساواة بين $P(F\cap A)$ ، $P(F)$ من ناحية و $P_F(A)$ من ناحية أخرى.

4. ماذا يعني $P_A(F)$ ؟ احسبه.

5. نلتقي تلميذا لا يدرس الأمازيغية من هذا القسم عشوائيا، ما احتمال أن يكون ولدا ؟

حل

1. إكمال الجدول

		المجموع	إناث F	ذكور G
يد أماز	A	25	19	6
لا يد أماز	$\overline{A}$	13	8	5
المجموع		38	27	11

2. حساب الاحتمالات

$P(F)=\frac{27}{38}$ (لوجود 27 فتاة من 38 تلميذا).

$P(A)=\frac{25}{38}$ (لوجود 25 تلميذا يدرس الأمازيغية من 38 تلميذا).

$P(F\cap A)=\frac{19}{38}$ (لوجود 19 فتاة تدرسن الأمازيغية من 38 تلميذا).

3. بما أنّ عدد الفتيات في هذا القسم هو 27 ومنهنّ 19 يدرسن الأمازيغية، فإنّ $P_F(A)=\frac{19}{27}$.

• البحث عن مساواة بين $P(F\cap A)$ ، $P(F)$ و $P_F(A)$.

لدينا $\frac{19}{27}=\frac{19}{38}\div\frac{27}{38}=\frac{P(F\cap LA)}{P(F)}$ و $P_F(A)=\frac{19}{27}$

ومنه $P_F(A)=\frac{P(F\cap A)}{P(F)}$

4. $P_A(F)$ يعني احتمال أن يكون التلميذ بنتا علما أنّه يدرس الأمازيغية

حساب $P_A(F)$: بما أنّ عدد الذي يدرسون الأمازيغية 25 ومنهم 19 بنتا، فإنّ $P_A(F)=\frac{19}{25}$.

كما يمكن حساب $P_A(F)$ بتطبيق المساواة المتوصل إليها سابقا، أي:

$$P_A(F) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{19}{38} \div \frac{25}{38} = \frac{19}{25}$$

5. إذا رمزنا بالرمز G : للحادثة "التلميذ ولد" ، $\overline{A}$: للحادثة "التلميذ لا يدرس الأمازيغية" فإنّ احتمال أن يكون تلميذ ولدا علما أنّه لا يدرس الأمازيغية هو $P_{\overline{A}}(G)$ ويمكن حسابه بطريقتين:

- **الأولى:** بما أنّ عدد الذي لا يدرسون الأمازيغية 13 ومنهم 5 ذكور، فإنّ

$$P_{\overline{A}}(G) = \frac{5}{13}$$

- **الثانية:** بتطبيق المساواة $P_{\overline{A}}(G) = \frac{P(G \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$

نجد $P_{\overline{A}}(G) = \frac{P(G \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{5}{38} \times \frac{38}{13} = \frac{5}{13}$

تعريف

A و B حادثان، حيث احتمال الحادث A غير معدوم $\left(P(A) \neq 0 \right)$.

احتمال B علمًا أن A محققة (أو احتمال B علمًا A) هو العدد الذي نرمز له بـ $P_A(B)$ حيث:

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

P_A يسمى الاحتمال الشرطي علما أنّ الحادثة A محققة

ملاحظة

$P_A(B)$ تكتب أيضا $P(B/A)$ وتقرأ " احتمال B علمًا A "

مثال

صندوق يحوي 9 قريصات غير متمايزة في الملمس، مرقّمة بالأرقام $1;2;3;\cdots;8;9$ (من 1 إلى 9)، نسحب منه قريصتين عشوائيا على التوالي ودون إرجاع.

• ما احتمال الحصول على رقمين فرديين ؟

حل

نسمي A الحادثة "القريصة المسحوبة الأولى تحمل رقما فرديا" و B الحادثة "القريصة الثانية تحمل رقما فرديا"، والمطلوب هو حساب $P(A\cap B)$

من $P_A(B) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}$ نجد $P(B\cap A) = P_A(B)\times P(A)$

واضح أنّ $P(A) = \dfrac{5}{9}$

و $P_A(B)$ هو احتمال سحب قريصة تحمل رقما فرديا من الصندوق الذي أصبح يحوي على 4 قريصات تحمل أرقاما فردية من بين 8 قريصات، وذلك بعد سحب القريصة الأولى تحمل رقما فرديا.

أي $P_A(B) = \dfrac{4}{8}$

وبالتالي $P(A\cap B) = \dfrac{5}{9}\times\dfrac{4}{8} = \dfrac{5}{18}$

تطبيق1

كيس يحوي 30 قريصة، كل عشرة منها ملوّنة بلون، والألوان هي الأبيض، والأحمر، والأخضر، وتحمل الأرقام 9;8;7;6;5;4;3;2;1;0 .
نحسب من الكيس قريصة عشوائيا إنّها تحمل الرقم 9، ما احتمال أن يكون لونها أحمر ؟

حل

نسمي A الحادثة "القريصة المسحوبة تحمل الرقم 9" و R الحادثة "القريصة المسحوبة حمراء" ، والمطلوب هو حساب $P_A(R)$.

لدينا $P_A(R) = \dfrac{P(R\cap A)}{P(A)}$

إنّ $R\cap A$ هو الحادثة "القريصة المسحوبة حمراء وتحمل الرقم 9"،
ولوجد قريصة وحيدة حمراء وتحمل الرقم 9، فإنّ $P(R\cap A) = \dfrac{1}{30}$

و $P(A) = \dfrac{3}{30} = \dfrac{1}{10}$

وبالتالي $P_A(R) = \dfrac{P(R\cap A)}{P(A)} = \dfrac{1}{30} \div \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{3}$

تطبيق2

كيس يحوي 30 قريصة، كل عشرة منها ملوّنة بلون، والألوان هي الأبيض، والأحمر، والأخضر، وتحمل الأرقام 9;8;7;6;5;4;3;2;1;0 .
نحسب من الكيس قريصتين عشوائيا على التوالي ودون إرجاع، ما احتمال أن تكون الأولى تحمل الرقم 9، والثانية لونها أحمر ؟

حل

نسمي A الحادثة "القريصة الأولى تحمل الرقم 9"

ونسمي R الحادثة "القريصة الثانية حمراء".

عندئذ نصيغ المطلوب وهو حساب $P(A \cap R)$

من $P_A(R) = \dfrac{P(R \cap A)}{P(A)}$

نجد $P(R \cap A) = P_A(R) \times P(A)$

إنّ القريصة الأولى التي تحمل الرّقم 9 :

• يمكن أن تكون حمراء

وفي هذه الحالة $P(A) = \dfrac{1}{30}$

وعندئذ يبقى في الكيس 29 قريصة منها 9 قريصات حمراء.

ومنه $P_A(R) = \dfrac{9}{29}$

• كما يمكن أن تكون غير حمراء (أي خضراء أو بيضاء)

وفي هذه الحالة $P(A) = \dfrac{2}{30}$

وعندئذ يبقى في الكيس 29 قريصة منها 10 قريصات حمراء.

ومنه $P_A(R) = \dfrac{10}{29}$

ولدينا $P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R)$

وبالتالي $P(A \cap R) = \dfrac{1}{30} \times \dfrac{9}{29} + \dfrac{2}{30} \times \dfrac{10}{29}$

ومنه $P(A \cap R) = \dfrac{1}{30}$

II. شجرة الإمكانيات :

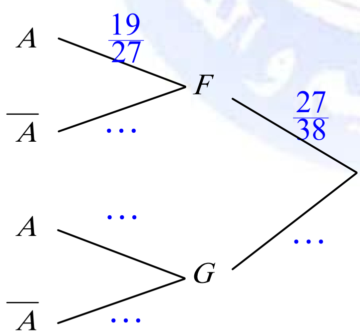
نشاط

تذكر أنّ الجدول أدناه يلخص الوضعية الإحصائية لتلاميذ قسم الثالثة آداب بإحدى الثانويات بعضهم يدرس اللغة الأمازيغية (انظر النشاط المقترح في درس الاحتمالات الشرطية الصفحة 3).

نأخذ الملف المدرسي لتلميذ من هذا القسم عشوائيا، ولتكن الحوادث:

F :"التلميذ أنثى" ، A :"التلميذ يدرس الأمازيغية" ، G :"التلميذ ولد" ، $\overline{A}$:"التلميذ لا يدرس الأمازيغية"

	ذكور G	إناث F	المجموع
A	6	19	25
$\overline{A}$	5	8	13
المجموع	11	27	38



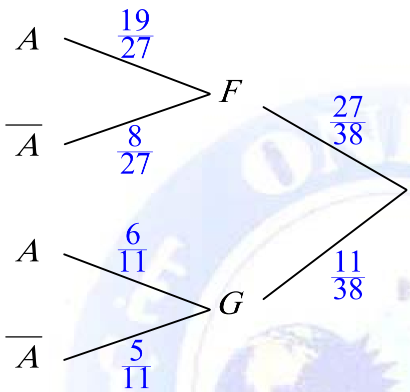
الشجرة المرفقة تُسمّى **شجرة الإمكانيات**، وفروعها مثقلة بالاحتمالات المواتية.

1. انقل الشجرة، وأعط تفسيرا للاحتمالين الموجودين على الفرع الأول، ثمّ أكملها.
2. احسب $P(F \cap A)$ احتمال كون الملف المأخوذ للتلميذة تدرس الأمازيغية.

3. ما عدد المسالك التي تؤدي إلى الحادثة A ؟ احسب $P(A)$.

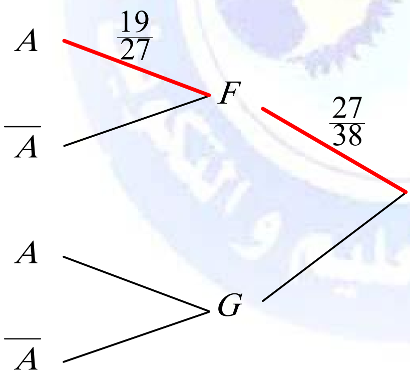
حل

1. $\frac{27}{38}$ هو احتمال كون الملف المأخوذ لبنت أي $P(F)=\frac{27}{38}$



$\frac{19}{27}$ هو احتمال كون الملف المأخوذ لتلميذ يدرس الأمازيغية علما أنّه بنت أي

$P_F(A) = \frac{19}{27}$



2. حساب $P(F\cap A)$

تتحقق الحادثة $F\cap A$ عند اتباع الفرع الملوّن باللون الأحمر، واحتماله هو جداء الاحتمالين المصادفين، أي:

$$P(F\cap A)=P(F)\times P_F(A)$$

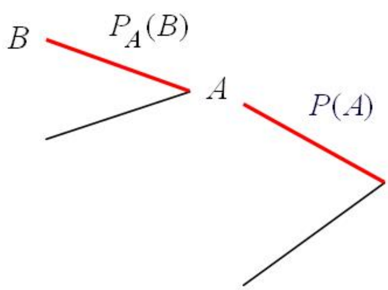
ومنه $P(F\cap A)=\frac{27}{38}\times\frac{19}{27}=\frac{19}{39}$

3. عدد المسالك المؤدية إلى الحادثة A هو 2 .

حساب $P(A)$. يمكن الوصول إلى الحادثة A عن طريق F و A أو عن طريق G و A . ومنه $P(A) = P(F\cap A) + P(G\cap A)$

وبالتالي $P(A) = \frac{27}{38}\times\frac{19}{27}+\frac{11}{38}\times\frac{6}{11}=\frac{25}{38}$

طريقة:

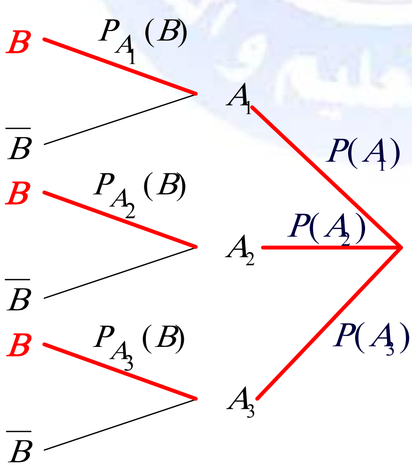


عند تمثيل وضعية بشجرة الإمكانيات المثقلة بالاحتمالات فإنّ:

- الفروع الأولى تثقّل باحتمالات عادية لحوادث هذه الفروع، مثل $P(A)$.
- بينما الفروع الثانية تثقّل باحتمالات شرطية (احتمال حادثة الفرع الثاني علما حادثة الفرع الأول المنبثق منه) مثل $P_A(B)$ أعلاه.
- في المثال المرفق أعلاه يمثّل المسلك الملوّن بالأحمر الحادثة $A \cap B$ ، واحتماله هو جداء احتمالي الفرعين المكوّنان له، أي:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

- احتمال الحادثة B هو مجموع احتمالات المسالك المؤدية إليه، انظر المثال أدناه:



$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

أي

$$P(B) = P(A_1)\,P_{A_1}(B) + P(A_2)\,P_{A_2}(B) + P(A_3)\,P_{A_3}(B)$$

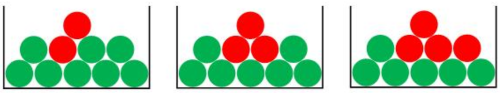
• مجموع احتمالات فروع كل عقدة هو 1 .

فمثلا: $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$.

تطبيق

ثلاث صناديق يحوي كل منها 10 كريات غير متمايزة في الملمس، وملوّنة باللونين الأخضر أو الأحمر (انظر الشكل المرفق).

نأخذ عشوائيا أحد الصناديق ونسحب منه عشوائيا كرية واحدة.



(A) (B) (C)

1. ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة حمراء؟
2. ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة حمراء وآتية من الصندوق الأول؟
3. إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء فما هو إحتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق الأول؟

حل

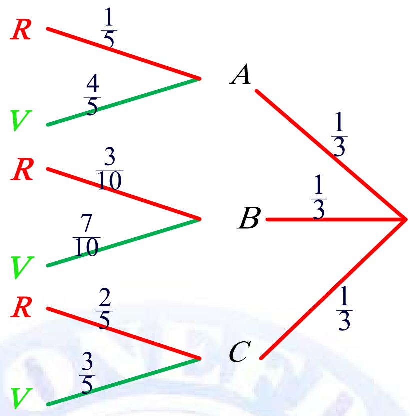
نعتبر الحوادث:

A، B، C : "سحب كرية من الصندوق A، B، C" على الترتيب.

R :"سحب كرية حمراء"

V :"سحب كرية خضراء"

عندئذ يمكن تمثيل الوضعية بشجرة الامكانيات المرفقة:



1. إن المسارات ذات اللون الأحمر هي التي تؤدي الى تحقق الحادثة R ، أي سحب كرية حمراء، ومنه احتمال أن تكون الكرية المسحوبة حمراء هو $P(R)$ حيث:

$$P(R) = P(A)\,P_A(R) + P(B)\,P_B(R) + P(C)\,P_C(R)$$
$$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\times\frac{3}{10} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{5} = \frac{3}{10}$$

2. احتمال أن تكون الكرية المسحوبة حمراء وآتية من الصندوق الأول هو $P(R\cap A)$ حيث:

$$P(R\cap A) = P(A)\times P_A(R) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

3. إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء فإنّ إحتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق الأول هو $P_R(A)$ ، ولدينا: $P_R(A) = \dfrac{P(R\cap A)}{P(R)}$

ومنه $P_R(A) = \dfrac{1}{15} \div \dfrac{3}{10} = \dfrac{2}{9}$

III. الحوادث المستقلة :

نشاط 1

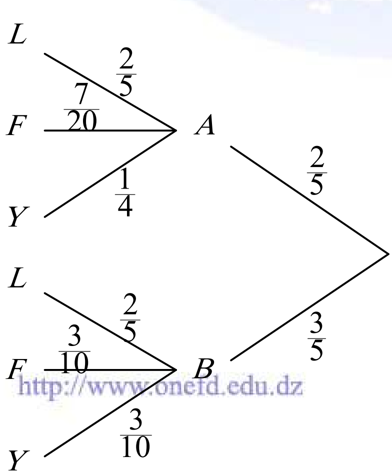
لملبنة مصنعان A و B ينتجان الحليب والجبن والياغورت، بنسبة 40% و 60% على الترتيب.

المصنع A ينتج 40% حليب و 35% جبن و 25% ياغورت، والمصنع B ينتج 40% حليب و 30% جبن و 30% ياغورت.

نأخذ منتوجا عشوائيا من هذه الملبنة، ونعتبر الحوادث الآتية:

A :"المنتوج من المنصع A "، B :"المنتوج من المنصع B "، L :"المنتوج حليب"، F :"المنتوج جبن"، Y :"المنتوج ياغورت".

1. أنجز شجرة الامكانيات المناسبة.
2. احسب الاحتمالين $P(L)$ و $P(F)$.
3. احسب $P(A\cap L)$ (احتمال المنتوج حليب وآت من المصنع A)، و $P(B\cap F)$ (احتمال المنتوج جبن وآت من المصنع B)
4. قارن بين $P(A\cap L)$ و $P(A)\times P(L)$ وبين $P(B\cap F)$ و $P(B)\times P(F)$



حل

1. شجرة الامكانيات متقلة بالاحتمالات المواتية.

2. حساب الاحتماليين $P(L)$ و $P(F)$.

$$P(L) = P(A)\,P_A(L) + P(B)\,P_B(L) = \frac{2}{5}\times\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(F) = P(A)\,P_A(F) + P(B)\,P_B(F) = \frac{2}{5}\times\frac{7}{20} + \frac{3}{5}\times\frac{3}{10} = \frac{8}{25}$$

3. احسب $P(A\cap L)$ و $P(B\cap F)$

لدينا $P(A\cap L) = P(A)\,P_A(L) = \frac{2}{5}\times\frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

و $P(B\cap F) = P(B)\,P_B(F) = \frac{3}{5}\times\frac{3}{10} = \frac{9}{50}$

4. المقارنة بين $P(A\cap L)$ و $P(A)\times P(L)$

لدينا $P(A)\times P(L) = \frac{2}{5}\times\frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

ومنه $P(A\cap L) = P(A)\times P(L)$

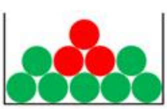
- المقارنة بين $P(B\cap F)$ و $P(B)\times P(F)$

لدينا $P(B)\times P(F) = \frac{3}{5}\times\frac{8}{25} = \frac{24}{125}$

ومنه $P(B\cap F) \neq P(B)\times P(F)$

نقول: إنّ الحادثتين A و L مستقلتان (بالنسبة إلى هذا الاحتمال)، بينما الحادثتين B و F غير مستقلتين.

نشاط 2



يضم صندوق 3 كرات حمراء و 7 كرات خضراء لا نفرق بينها عند اللمس.

نسحب منه كرتين عشوائيا على التوالي ودون إرجاع.

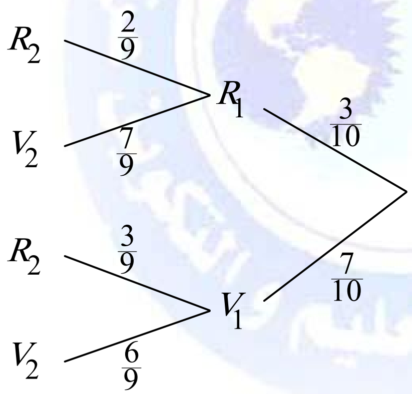
لتكن الحوادث R_1: "الكرية الأولى حمراء"، و R_2: "الكرية الثانية حمراء"، و V_1: "الكرية الأولى خضراء"، و V_2: "الكرية الثانية خضراء"

.1

أ) احسب $P(R_1 \cap V_2)$ (احتمال الحصول على الكرية الأولى حمراء والثانية خضراء).

ب) هل $P(R_1 \cap V_2) = P(R_1) \times P(V_2)$ ؟ ماذا تستنتج ؟

2. نعتبر الآن سحب كرتين عشوائيا على التوالي ولكن بإرجاع الكرة الأولى قبل سحب الكرة الثانية، والمطلوب: أجب عن السؤالين أ) و ب) الواردين في الجزء (1.).



حل

.1

أ) حساب $P(R_1 \cap V_2)$.

لدينا

$$P(R_1 \cap V_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(V_2)$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$$

ب) نحسب أولا $P(V_2)$

هناك مسلكان للوصول إلى الحادثة V_2 (انظر شجرة الامكانيات)، ومنه:

$$P(V_2) = P(R_1 \cap V_2) + P(V_1 \cap V_2)$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{7}{10}$$

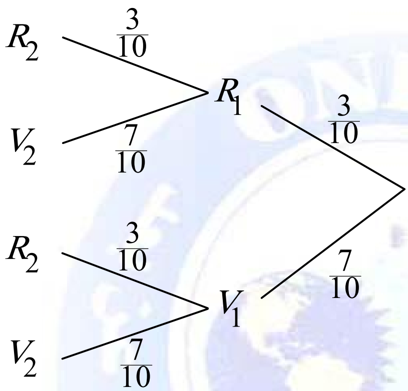
عندئذ نحسب $P(R_1) \times P(V_2)$

$$P(R_1)\times P(V_2)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{100}$$

ومنه $P\left(R_1\cap V_2\right)\neq P\left(R_1\right)\times P(V_2)$

نستنتج أنّ الحادثتين R_1 و V_2 غير مستقلتين (بالنسبة إلى هذا الاحتمال).

.2



أ) حساب $P'(R_1\cap V_2)$.

لدينا

$$P'(R_1\cap V_2)=P'(R_1)\times P'_{R_1}(V_2)$$
$$=\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{100}$$

ب) نحسب أولا $P'(V_2)$

هناك مسلكان للوصول إلى الحادثة V_2 (انظر شجرة الامكانيات)، ومنه:

$$P'(V_2)=P'(R_1\cap V_2)+P'(V_1\cap V_2)$$
$$=\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}+\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{10}$$

عندئذ نحسب $P'(R_1)\times P'(V_2)$

$$P'(R_1)\times P'(V_2)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{100}$$

ومنه $P'\left(R_1\cap V_2\right)=P'\left(R_1\right)\times P'(V_2)$

نستنتج أنّ الحادثتين R_1 و V_2 مستقلتان (بالنسبة إلى هذا الاحتمال).

ملاحظة هامة

استقلال حادثتين ليست خاصية مميزة لهاتين الحادثتين، إنّها (أي الاستقلالية) مرتبطة بالاحتمال المعرّف، وبالتالي قد تكون حادثتان مستقلتين بالنسبة إلى احتمال P وغير مستقلتين بالنسبة إلى احتمال آخر P'.

مثال

الحادثتين R_1 و V_2 والاحتمالين P و P' في النشاط 2 السابق.

تعريف

ليكن P احتمال، و A و B حادثتان.

نقول عن الحادثتين A و B أنّهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

خاصية

ليكن P احتمال، و A و B حادثتان احتمال كل منهما غير معدوم، إنّ المساويات الثلاث الآتية متكافئة:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \quad ، \quad P_A(B)=P(B) \quad ، \quad P_B(A)=P(A)$$

برهان

• المساوات $P_B(A)=P(A)$ تكتب $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$

أي $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

• المساوات $P_A(B) = P(B)$ تكتب $P(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

أي $P(A\cap B)= P(A)\times P(B)$

ملاحظة

الحادثتان المستقلتان هما اللتان يكون وقوع إحداهما لا يؤثر في وقوع الأخرى.

تطبيق

نرمي قطعة نقود عادية عددا من المرّات (احتمال ظهور الوجه يساوي احتمال ظهور الشعار).

نعتبر الحادثتين M و N حيث:

M: "الحصول على شعارات وأوجه"

N: "الحصول على وجه على الأكثر"

1. إذا كان عدد الرّميات اثنين، هل الحادثتان M و N مستقلتان؟
2. إذا كان عدد الرّميات ثلاث، هل الحادثتان M و N مستقلتان؟

حل

1. نرمز للوجه بالرمز F وللشعار بالرمز P .

بما أنّ عدد الرّميات اثنين فمجموعة النتائج الممكنة هي:

$$\Omega = \{(F,F);(F,P);(P,F);(P,P)\}$$

إنّ $M = \{(F,P);(P,F)\}$ و $N = \{(F,P);(P,F);(P,P)\}$

وبالتالي $P(M) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ و $P(N) = \frac{3}{4}$

ومنه $P(M)\times P(N)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

ولدينا $M\cap N=\{(F,P);(P,F)\}$

إذن $P(M\cap N)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

بما أن $P(M\cap N)\neq P(M)\times P(N)$ فالحادثتان M و N غير مستقلتين.

2. بما أنّ عدد الرّميات ثلاثة فمجموعة النتائج الممكنة هي:

$$\Omega=\{\ (F,F,F);(F,F,P);(F,P,F);(F,P,P);\\ (P,F,F);(P,F,P);(P,P,F);(P,P,P)\ \}$$

لدينا
$$M=\{\ (F,F,P);(F,P,F);(F,P,P);(P,F,F);\\ (P,F,P);(P,P,F)\ \}$$

و $N=\{(F,P,P);(P,F,P);(P,P,F);(P,P,P)\}$

و بالحساب المباشر نجد:

$P(M)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ و $P(N)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

ومنه $P(M)\times P(N)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

ولدينا $M\cap N=\{(F,P,P);(P,F,P);(P,P,F)\}$

إذن $P(M\cap N)=\frac{3}{8}$

بما أن $P(M\cap N)=P(M)\times P(N)$ فالحادثتان M و N مستقلتان.

IV. ملخص:.

• الاحتمالات الشرطية

A و B حادثان، حيث احتمال الحادثة A غير معدوم $\left(P(A) \neq 0\right)$.

احتمال B علمًا A هو العدد الذي نرمز له بـ $P_A(B)$ حيث:

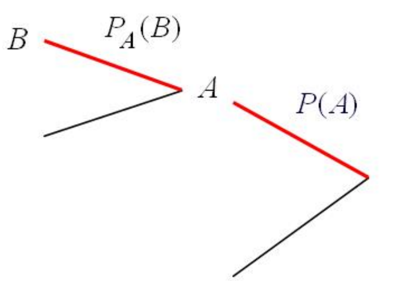
$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

P_A يسمى الاحتمال الشرطي علما أنّ الحادثة A محققة.

$P_A(B)$ تكتب أيضا $P(B/A)$ وتقرأ " احتمال B علمًا A "

• شجرة الإمكانيات

عند تمثيل وضعية بشجرة الإمكانيات المثقلة بالاحتمالات فإنّ:



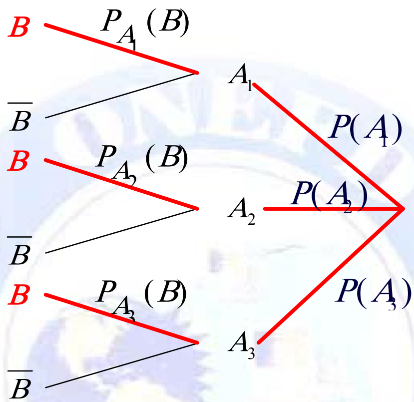
- الفروع الأولى تثقّل باحتمالات عادية لحوادث هذه الفروع، مثل $P(A)$.
- بينما الفروع الثانية تثقّل باحتمالات شرطية (احتمال حادثة الفرع الثاني علما حادثة الفرع الأول المنبثق منه) مثل $P_A(B)$.

- في المثال المرفق أعلاه يمثّل المسلك الملوّن بالأحمر الحادثة $A \cap B$ ، واحتماله هو جداء احتمالي الفرعين المكوّنان له، أي:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

• احتمال الحادثة B هو مجموع احتمالات المسارات المؤدية إليه، انظر المثال أدناه:

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B)$$



• مجموع احتمالات فروع كل عقدة هو 1 .

فمثلا: $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$

- **الحوادث المستقلة**

• ليكن P احتمال، و A و B حادثتان.

نقول عن الحادثتين A و B أنّهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

• ليكن P احتمال، و A و B حادثتان احتمال كل منهما غير معدوم، إنّ المساويات الثلاث الآتية متكافئة:

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ، $P_A(B) = P(B)$ ، $P_B(A) = P(A)$

V. توظيف المعارف.:

أ. تمارين

1. A و B حادثتان حيث:

$$P_A(B)=0,2 \quad \text{و} \quad P_{\overline{A}}(B)=0,7 \quad \text{و} \quad P(A)=0,4$$

أنشئ شجرة الامكانيات المثقلة بالاحتمالات، ثم أحسب $P(A\cap B)$ و $P(B)$

2. A و B حادثتان حيث:

$$P(A\cap B)=0,2 \quad \text{و} \quad P(\overline{A}\cap B)=0,3 \quad \text{و} \quad P(A)=0,4$$

احسب $P_A(B)$ و $P_{\overline{A}}(\overline{B})$

3. يضم كيس 10 كريات بيضاء وكرتين سوداوين غير متمايزة في الملمس. نسحب منه كريتين على التوالي ودون إرجاع.

نرمز بـ B_1 للحادثة "الكرية المسحوبة في المرّة الأولى بيضاء"

و بـ B_2 للحادثة "الكرية المسحوبة في المرّة الثانية بيضاء"

و بـ N_1 للحادثة "الكرية المسحوبة في المرّة الأولى سوداء"

و بـ N_2 للحادثة "الكرية المسحوبة في المرّة الثانية سوداء"

1. أُحسب كلا من $P(B_1)$ و $P_{B_1}(B_2)$ واستنتج $P(B_1\cap B_2)$.
2. أُحسب كلا من $P(N_1)$ و $P_{N_1}(N_2)$ و $P(N_2)$.
3. أُحسب احتمال الحصول على كريتين بلونين مختلفين.

4. نفس أسئلة التمرين 3 مع إرجاع الكرية الأولى إلى الكيس قبل سحب الكرية الثانية منه.

5. في أي من التمرينين 3 و4 تكون الحادثتين N_1 و N_2 مستقلتين؟

6. نظّمت ثانوية لتلاميذها المتفوقين وعددهم 105 رحلتين على الخيار نهاية الفصل الأول: الأولى إلى حديقة الحيوانات والتسلية، والثانية إلى زيارة مواقع أثرية، وحافظ هؤلاء التلاميذ على تفوقهم فكرّرت لهم العملية نهاية الفصل الثاني.

- خلال رحلة الفصل الأول: 60 تلميذا اختاروا الذهاب إلى حديقة الحيوانات والتسلية، والباقي ذهبوا إلى زيارة المواقع الأثرية.
- خلال رحلة الفصل الثاني: 40 تلميذا قرّروا الرجوع إلى حديقة الحيوانات والتسلية، و20 قرّروا الرجوع إلى المواقع الأثرية، والباقي ذهبوا في الرحلة التي لم يشاركوا فيها خلال الفصل الأول.

بعد العودة من رحلة الفصل الثاني، سألنا تلميذا منهم عشوائيا عن الرحلة التي شارك فيها، ونعتبر الحوادث:

Z_1 (Z_2)"التلميذ زار حديقة الحيوانات والتسلية في الفصل الأول (الثاني)"

R_1 (R_2)"التلميذ زار المواقع الأثرية في الفصل الأول (الثاني)"

1. مثّل هذه الوضعية بشجرة الامكانيات المثقلة بالاحتمالات.
2. احسب احتمال كون التلميذ قد زار المواقع الأثرية في الفصل الثاني.
3. هل Z_1 و R_2 مستقلان ؟ هل Z_1 و Z_2 مستقلان ؟

7. للرفع في عدد مبيعاتها قرّرت مؤسسة تصنع الياغورت وضع نوعين من الهدايا في كل 1 % من انتاجها، بحيث 35 % من العلب الرابحة تسمح بربح دراجة هوائية، والـ 65 % الأخرى تسمح بربح طقم لشرب القهوة.

اشترى زبون علبة من هذا الياغورت، ونعتبر الحوادث:

G : "العلبة التي اشتراها الزبون رابحة"

V : "العلبة التي اشتراها هذا الزبون تسمح بربح دراجة هوائية"

S : "العلبة التي اشتراها هذا الزبون تسمح بربح طقم لشرب القهوة"

1. مثل هذه الوضعية بشجرة الامكانيات المثقلة بالاحتمالات.
2. احسب كلا من: • $P(V)$: احتمال أن يربح الزبون دراجة هوائية.
   • $P(S)$: احتمال أن يربح الزبون طقما لشرب القهوة.

8. في استبيان حول نوع الرياضية المُمارسَة شمل تلاميذ إحدى الثانويات، وجد أنّ: 80 % يمارسون كرة القدم، و 50 % يمارسون كرة السلة، و 37 % يمارسون كرة القدم وكرة السلة.

إلتقينا صدفة أحد هؤلاء التلاميذ، ولتكن الحوادث:

F : "التلميذ يمارس كرة القدم" و B : "التلميذ يمارس كرة السلة"

G : "التلميذ يمارس كرة القدم فقط" و H : "التلميذ يمارس كرة السلة فقط"

1. احسب كلا من: $P(F)$ و $P(B)$ و $P(F \cap B)$ و $P(G)$ و $P(H)$
2. ما احتمال أن يكون التلميذ يمارس كرة السلة علمًا أنّه يمارس كرة القدم؟
3. ما احتمال أن يكون التلميذ يمارس كرة القدم علمًا أنّه يمارس كرة السلة؟
4. ما احتمال أن يكون التلميذ لا يمارس أيا من الرياضتين ؟

9. يتكون فريق كرة سلة من 6 لاعبين ممتازين في تسديد الرّميات الحرة. إثنين منهم نسبة نجاح كل مهنما في التسديد هي 80%، وثلاثة نسبة نجاح كل منهم في التسديد هي 90%، وسادسهم نسبة نجاحه في التسديد هي 95%.

حضرنا مقابلة لهذا الفريق حيث كل لاعب من هؤلاء كانت له نفس فرص التسديد، وفي نهايتها التقينا أحد اللاعبين عشوائيا، ونعتبر الحوادث:

R : "رمية ناجحة" و $\overline{R}$: "رمية غير ناجحة"

ومن أجل $i \in \{80 ; 90 ; 95\}$ الحادثة J_i : "اللاعب نسبة نجاحه في التسديد هي $i\%$"

1. مثِّل هذه الوضعية بشجرة الامكانيات، واشرح كيفية الحصول على احتمال كل فرع من فروعها.
2. احسب $P(R)$.

10. مصنعان A و B للمصابيح الكهربائية يزودان متجرا بنسبة 60% و 40% على الترتيب.

- 3% من إنتاج المصنع A غير صالحة.
- 1% من إنتاج المصنع B غير صالحة.

نأخذ من هذا المتجر مصباحا عشوائيا، احسب احتمالات الحوادث الآتية:

1. المصباح غير صالح علما أنّه من المصنع A .
2. المصباح من المصنع A وغير صالح.
3. المصباح صالح ومن المصنع B .
4. المصباح غير صالح.

11. يحتوي صندوق 10 قريصات مرقمة من 1 الى 10.
نسحب قريصتين على التوالي مع الإرجاع.
1. احسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4.
2. احسب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما 10 وفرقهما 4.
3. احسب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما 10 علما أنّ فرقهما 4.

12. يحتوي صندوق قطعتين نقديتين غير متمايزتين عند الملمس. قطعة عادية، وقطعة مغشوشة بحيث إحتمال ظهور الوجه هو ضعف إحتمال ظهور الشعار. نختار عشوائيا قطعة من الصندوق ونرميها مرة واحدة. أحسب إحتمال الحصول على وجه (يمكنك تشكيل الشجرة).

13. A و B كيسان. يحتوي الكيس A على كريتين حمراوين وكرية خضراء. ويحتوي الكيس B على 3 كرات حمراء كرية واحدة خضراء.
نسحب كرية من الكيس A ونضعها في الكيس B، ثم نسحب كرية من الكيس B.
1. مثّل الوضعية بشجرة الامكانيات المناسبة.
2. ما احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون؟
3. ما احتمال الحصول على كرية حمراء في السحبة الأولى بشرط أن تكون الكرية الثانية خضراء.

14. يحتوي كيس خمس كريات بيضاء مرقمة من 1 إلى 5، وثلاث كريات حمراء مرقمة من 6 إلى 8، وكرتين خضراوين يحملان الرقمين 9 و10.

نسحب كريتين عشوائيا على التوالي ودون ارجاع.

1. احسب احتمال كل من الحوادث الآتية:

A : "الكريتان تحملان رقمين فرديين"

B : "الكريتان من نفس اللون"

C : "الكريتان تحملان رقميين فرديين ومن نفس اللون"

- هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟

2. ما احتمال الحوادث الاتية:

D : "الكريتان من لونين مختلفين"

E : "الكريتان من لونين مختلفين وتحملان رقمين فرديين"

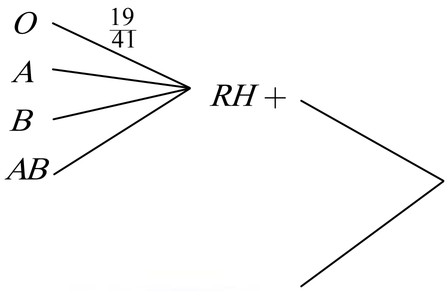
3. علما أنّنا سحبنا كريتين من لونين مختلفين. ما احتمال أن تكونا تحملان رقمين فرديين ؟

15. مطلوب في هذا التمرين إعطاء كل نتيجة على شكل سكر غير قابل للاختزال.

الجدول المرفق يبيّن توزيع النسب المئوية لمختلف الزمر الدموية لعينة من الناس.

الزّمرة	O	A	B	AB
Rh +	38	35	6	3
Rh -	9	6	2	1

1. باستعمال معطيات الجدول المرفق أكمل شجرة الإمكانيات الآتية:



2. أخذنا شخصا عشوائيا من هذه العينة، ونعتبر الحادثتين:

- Rh : "الشخص فصيلته سالبة"

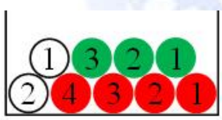
B : "الشخص زمرته B "

احسب

أ. $P(B)$

ب. احتمال أن يكون هذا الشخص فصيلته سالبة علما أنّ زمرته B ؟

16. صندوق يحتوي كريات غير متمايزة في الملمس، أربع لونها أحمر تحمل الأرقام 1 ; 2 ; 3 ; 4، وثلاثة خضراء تحمل الأرقام 1 ; 2 ; 3، وإثنان بيضاوين تحملان الرقمين 1 ; 2.



نسحب من الصندوق كرية عشوائيا، ونعتبر الحوادث:

V : "الكرية لونها أخضر"

D : "الكرية تحمل رقم 2"

T : "الكرية تحمل رقم 3"

- هل الحادثتان V و D مستقلتان ؟ نفس السؤال من أجل V و T.

17. نرمي مرّة واحدة حجري نرد عاديين، كل منهما يحمل الأرقام

$1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6$، ونعتبر الحوادث:

M_2 : "مجموع الرقمين الظاهرين مضاعف للعدد 2"

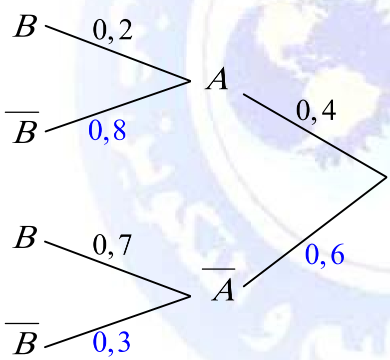
M_3 : "مجموع الرقمين الظاهرين مضاعف للعدد 3"

M_4 : "مجموع الرقمين الظاهرين مضاعف للعدد 4"

- هل الحادثتان M_2 و M_3 مستقلتان ؟ نفس السؤال من أجل M_2 و M_4.

ب. حلول للتمارين

1. إنشاء شجرة الامكانيات المثقلة بالاحتمالات



نحسب احتمالات حوادث الفروع غير المعطاة اعتمادا على العلاقة

$$P(\overline{X}) + P(X) = 1$$

- حساب $P(A \cap B)$ و $P(B)$

لدينا $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

$= 0,4 \times 0,2 = 0,08$

و $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$

ومنه $P(B) = 0,4 \times 0,2 + 0,6 \times 0,7 = 0,5$

2. حساب $P_A(B)$

لدينا $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ و $P(A \cap B) = 0,2$ و $P(A) = 0,4$ ومنه

$P_A(B) = 0,5$

لحساب $P_{\overline{A}}(\overline{B})$ نبدأ بحساب $P(\overline{A})$

لدينا $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ و $P(A) = 0,4$ ومنه $P(\overline{A}) = 0,6$

ثمّ نحسب $P_{\overline{A}}(B)$

لدينا $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})}$ و $P(\overline{A} \cap B) = 0,3$ و $P(\overline{A}) = 0,6$ ومنه

$P_{\overline{A}}(B) = 0,5$

وبما أنّ لدينا $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{A}}(B)$ فإنّ $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,5$

3. سحب الكريتين هو على التوالي ودون إرجاع.

1. لدينا عدد كل الكريات هو 12 منها 10 بيضاء، ومنه $P(B_1) = \dfrac{5}{6}$

بعد سحب كرية بيضاء، أصبح في الكيس 11 كرية منها 9 بيضاء، ومنه

$P_{B_1}(B_2) = \dfrac{9}{11}$

ولدينا $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)$

ومنه $P(B_1 \cap B_2) = \dfrac{10}{12} \times \dfrac{9}{11} = \dfrac{15}{22}$

2. لدينا عدد الكريات 12 منها 2 سوداء، ومنه $P(N_1) = \dfrac{1}{6}$

بعد سحب كرية سوداء، أصبح في الكيس 11 كرية منها واحدة بيضاء،

ومنه $P_{N_1}(N_2) = \dfrac{1}{11}$

ولدينا $P(N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(N_2)$

ومنه $P(N_2) = \dfrac{2}{12} \times \dfrac{10}{11} + \dfrac{10}{12} \times \dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{6}$

3. نرمز بـ NB لحادثة الحصول على كريتين بلونين مختلفين، فيكون:

$$P(NB) = P(N_1) \times P_{N_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(N_2)$$

ومنه $P(NB) = \frac{2}{12} \times \frac{10}{11} + \frac{10}{12} \times \frac{2}{11} = \frac{10}{33}$

4. بما أنّ سحب الكريتين هو مع إرجاع الكرية الأولى إلى الكيس قبل سحب الكرية الثانية منه، فإنّ:

1. لدينا $P(B_1) = \frac{5}{6}$

و بعد سحب كرية بيضاء وإرجاعها، يبقى في الكيس 12 كرية منها 10 بيضاء، ومنه $P_{B_1}(B_2) = \frac{5}{6}$ وبالتالي $P(B_1 \cap B_2) = \frac{10}{12} \times \frac{10}{12} = \frac{25}{36}$

2. $P(N_1) = \frac{1}{6}$ و $P_{N_1}(N_2) = \frac{1}{6}$

ولدينا $P(N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(N_2)$

ومنه $P(N_2) = \frac{2}{12} \times \frac{2}{12} + \frac{10}{12} \times \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

3. نرمز بـ NB لحادثة الحصول على كريتين بلونين مختلفين، فيكون:

$$P(NB) = P(N_1) \times P_{N_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(N_2)$$

ومنه $P(NB) = \frac{2}{12} \times \frac{10}{12} + \frac{10}{12} \times \frac{2}{12} = \frac{5}{18}$

5. في التمرين (3) وجدنا $P(N_2) = \frac{1}{6}$ و $P_{N_1}(N_2) = \frac{1}{11}$

أي $P_{N_1}(N_2) \neq P(N_2)$ وبالتالي الحادثتان N_1 و N_2 غير مستقلتين.

• في التمرين (4) وجدنا $P(N_2) = P_{N_1}(N_2) = \frac{1}{6}$

أي $P_{N_1}(N_2) = P(N_2)$ وبالتالي الحادثتان N_1 و N_2 مستقلتان.

6. 1. Z_1 "التلميذ زار حديقة الحيوانات والتسلية في الفصل الأول"

بما أن عدد كل المشاركين 105 منهم 60 زاروا حديقة الحيوانات والتسلية في الفصل الأول، فإنّ $P(Z_1) = \frac{60}{105} = \frac{4}{7}$

ولدينا $P(R_1) = 1 - P(Z_1)$

ومنه $P(R_1) = \frac{3}{7}$

• حساب $P_{Z_1}(Z_2)$ و $P_{Z_1}(R_2)$

بما أن من بين الـ 60 تلميذا الذين زاروا حديقة الحيوانات والتسلية في الفصل الأول 40 تلميذا رجعوا إليها في الفصل الثاني، فإنّ

$$P_{Z_1}(Z_2) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

ولدينا $P_{Z_1}(R_2) = 1 - P_{Z_1}(Z_2)$

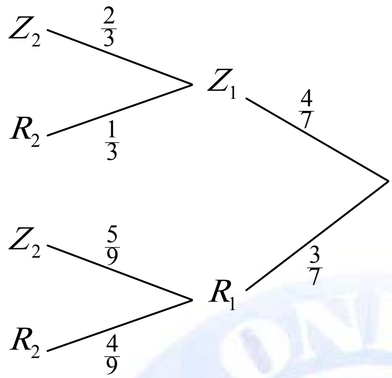
ومنه $P_{Z_1}(R_2) = \frac{1}{3}$

• حساب $P_{R_1}(R_2)$ و $P_{R_1}(Z_2)$

بما أن من بين الـ 45 تلميذا الذين زاروا المواقع الأثرية في الفصل الأول 20 تلميذا رجعوا إليها في الفصل الثاني، فإنّ $P_{R_1}(R_2) = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$

ولدينا $P_{R_1}(Z_2) = 1 - P_{R_1}(R_2)$

ومنه $P_{R_1}(Z_2) = \frac{5}{9}$



2. حساب احتمال كون التلميذ قد زار المواقع الأثرية في الفصل الثاني.

لدينا

$$P(R_2) = P(Z_1) \times P_{Z_1}(R_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(R_2)$$

ومنه $P(R_2) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{9}$ أي $P(R_2) = \frac{8}{21}$

3. دراسة استقلالية Z_1 و R_2.

لدينا $P_{Z_1}(R_2) = \frac{1}{3}$ و $P(R_2) = \frac{8}{21}$

وبما أنّ $P_{Z_1}(R_2) \neq P(R_2)$ فإنّ الحادثتين Z_1 و R_2 غير مستقلتين.

- دراسة استقلالية Z_1 و Z_2.

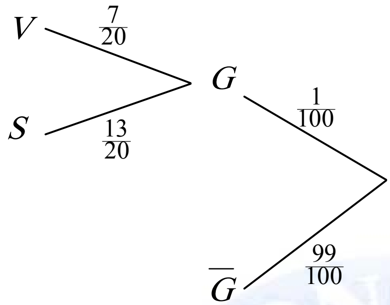
لدينا $P_{Z_1}(Z_2) = \frac{2}{3}$

و $P(Z_2) = P(Z_1) \times P_{Z_1}(Z_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(Z_2)$

ومنه $P(Z_2) = \frac{4}{7} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{7} \times \frac{5}{9}$ أي $P(Z_2) = \frac{13}{21}$

وبما أنّ $P_{Z_1}(Z_2) \neq P(Z_2)$ فإنّ الحادثتين Z_1 و Z_2 غير مستقلتين.

7. نرمز بـ $\overline{G}$ للحادثة "العلبة التي اشتراها الزبون غير رابحة"



1. شجرة الامكانيات:

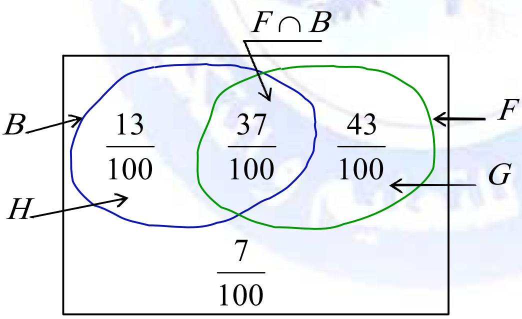
2. حساب كلا من: $P(V)$ و $P(S)$

لاحظ أنّه يوجد مسلك وحيد يؤدي إلى الحادثة V، وكذلك بالنسبة إلى الحادثة S، ومنه:

$$P(V)=P(G\cap V)=P(G)\times P_G(V)=\frac{1}{100}\times\frac{7}{20}=\frac{7}{2000}$$

و $$P(S)=P(G\cap S)=P(G)\times P_G(S)=\frac{1}{100}\times\frac{13}{20}=\frac{13}{2000}$$

8. يمكن الاستعانة بالمخطط الآتي، ومنه نجد:



$$P(F)=\frac{4}{5}$$

و $$P(B)=\frac{1}{2}$$

و $$P(F\cap B)=\frac{37}{100}$$

لدينا $G=F-(F\cap B)$

ومنه $P(G)=\frac{43}{100}$

كما أنّ $H=B-(F\cap B)$ ومنه $P(H)=\frac{13}{100}$

2. حساب $P_F(B)$

لدينا $P_F(B)=\frac{P(F\cap B)}{P(F)}$ ومنه $P_F(B)=\frac{37}{100}\div\frac{80}{100}=\frac{37}{80}$

3. حساب $P_B(F)$

لدينا $P_B(F)=\frac{P(F\cap B)}{P(B)}$ ومنه $P_B(F)=\frac{37}{100}\div\frac{50}{100}=\frac{37}{50}$

4. احتمال أن يكون التلميذ لا يمارس أيا من الرياضتين

يرمز $\overline{F\cup B}$ لحادثة كون التلميذ لا يمارس أيا من الرياضتين، فيكون

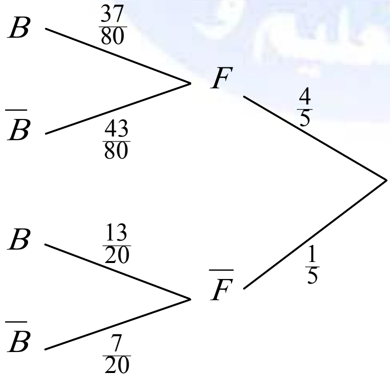
$$P\left(\overline{F\cup B}\right)=1-P\left(F\cup B\right)$$

ومنه $P\left(\overline{F\cup B}\right)=1-\left(\frac{13}{100}+\frac{37}{100}+\frac{43}{100}\right)=\frac{7}{100}$

ملاحظة

يمكن الاستعانة بشجرة الامكانيات المثقل بالاحتمالات، حيث $\overline{F}$ و $\overline{B}$ يرمزان للحادثتين "التلميذ لا يمارس كرة القدم" و "التلميذ لا يمارس كرة السلة" على الترتيب.

يمكن حساب $P\left(\overline{F\cup B}\right)$ كما يأتي:

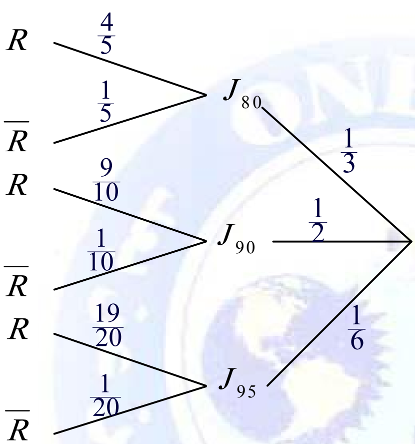


$$P\left(\overline{F \cup B}\right) = P\left(\overline{F} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(\overline{B})$$

ومنه $P\left(\overline{F \cup B}\right) = \frac{1}{5} \times \frac{7}{20} = \frac{7}{100}$

9. $P(J_{80}) = \frac{1}{3}$ و $P(J_{90}) = \frac{1}{2}$ و $P(J_{95}) = \frac{1}{6}$ (بتطبيق خاصية عدد الحالات المواتية على عدد الحالات الممكنة).

1. تمثيل الوضعية بشجرة الامكانيات



2. حساب $P(R)$.

لدينا

$$P(R) = P(J_{80}) \times P_{J_{80}}(R) + P(J_{90}) \times P_{J_{90}}(R) + P(J_{95}) \times P_{J_{95}}(R)$$

أي $P(R) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{6} \times \frac{19}{20}$

ومنه $P(R) = \frac{7}{8}$

10. نعتبر الحوادث A : "المصباح من المصنع A " و B : " المصباح من المصنع B " و D : "المصباح غير صالح".

1. $P_A(D) = \frac{3}{100}$ من المعطيات.

2. $P(A\cap D)=P(A)\times P_A(D)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{100}=\frac{9}{500}$

3. $P(B\cap \overline{D})=P(B)\times P_B(\overline{D})=\frac{2}{5}\times\frac{99}{100}=\frac{99}{250}$

4. لدينا $P(D)=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)$

ومنه $P(D)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{100}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{100}=\frac{11}{250}$

كإرشاد: يمكن استعمال شجرة الإمكانيات

11. عدد الحالات الممكنة هو 10×10 أي 100.

1. نفرض D_4 حادثة الحصول على رقمين فرقهما 4 .

إنّ $D_4=\{(1;5);(2;4);\cdots;(10;6)\}$ وعدد عناصرها هو 10

ومنه $P(D_4)=\frac{1}{10}$

2. حساب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما 10 وفرقهما 4.

نفرض S_{10} حادثة الحصول على رقمين مجموعهما 10 .

إنّ $S_{10}=\{(1;9);(2;8);\cdots;(9;1)\}$ وعدد عناصرها هو 9

فتكون حادثة الحصول على رقمين مجموعهما 10 وفرقهما هي 4

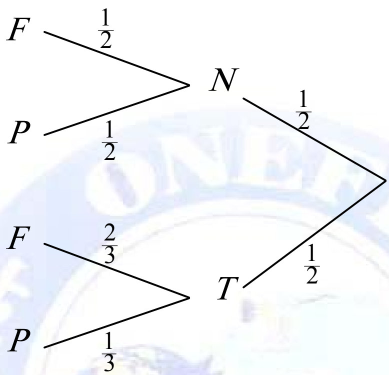
$S_{10}\cap D_4=\{(3;7);(7;3)\}$

ومنه $P(S_{10}\cap D_4)=\frac{1}{50}$

3. احتمال الحصول على رقمين مجموعهما 10 علما أنّ فرقهما 4.

$$P_{D_4}(S_{10})=\frac{P(S_{10}\cap D_4)}{P(D_4)}=\frac{1}{50}\div\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$$

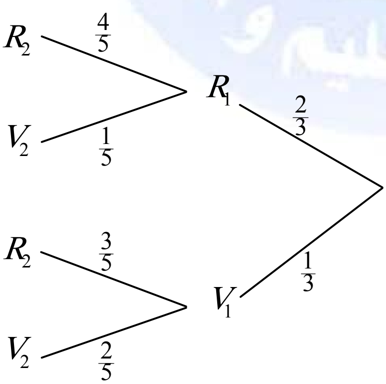
12. نرمز بـ N للقطعة العادية، و T للقطعة المغشوشة، و F لحادثة الحصول على وجه، و P لحادثة الحصول على شعار، ونشكل شجرة الامكانيات:



لدينا: $P(F)=P(N)\times P_N(F)+P(T)\times P_T(F)$

ومنه $P(F)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{12}$

13. نرمز بـ R_1 (R_2) لحادثة سحب الكرية الأولى (الثانية) حمراء، و V_1 (V_2) لحادثة سحب الكرية الأولى (الثانية) خضراء، علما أنّ السحب الأول من الصندوق الأول، والسحب الثاني من الصندوق الثاني، ونشكل شجرة الامكانيات.



عند سحب كرية حمراء من

الصندوق A يصبح الصندوق B يحتوي على 4 كرات حمراء كرية واحدة خضراء.

وكذلك عند سحب كرية خضراء من الصندوق A يصبح الصندوق B يحتوي على 3 كرات حمراء كريتين خضراوين.

2. احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون

$$P(R_1;R_2) + P(V_1;V_2) = \frac{2}{3}\times\frac{4}{5} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{5} = \frac{2}{3}.$$

3. المطلوب هو حساب $P_{V_2}(R_1)$

لدينا $P_{V_2}(R_1) = \dfrac{P(V_2 \cap R_1)}{P(V_2)}$

و $P(V_2) = P(R_1)\times P_{R_1}(V_2) + P(V_1)\times P_{V_1}(V_2)$

ومنه $P(V_2) = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$

كذلك $P(R_1 \cap V_2) = P(R_1)\times P_{R_1}(V_2) = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{15}$

بالتالي $P_{V_2}(R_1) = \dfrac{2}{15} \div \dfrac{4}{15} = \dfrac{1}{2}$

14. 1.

- توجد 5 كريات تحمل أرقاما فردية، ومنه $P(A) = \dfrac{5}{10}\times\dfrac{4}{9} = \dfrac{2}{9}$
- بما أنّه توجد 5 كريات بيضاء، و3 كريات حمراء، و2 كريات خضراء، فإنّ: $P(B) = \dfrac{5}{10}\times\dfrac{4}{9} + \dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{9} = \dfrac{14}{45}$

- بما أنّ السحب بدون إرجاع، فلا يمكن سحب كريتين تحملان رقميين فرديين ومن نفس اللون سوى من الكريات ذات اللون الأبيض، وتوجد 3 كريات بيضاء وتحمل ارقاما فردية، ومنه $P(C)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$
- إنّ $C=A\cap B$ ومنه يكفي مقارنة $P(A)\times P(B)$ و $P(C)$

ولما كان $P(C)\neq P(A)\times P(B)$ فإنّ الحادثتين A و B غير مستقلتين.

2. بما أنّ B هو حادثة الكريتان من نفس اللون،و D حادثة الكريتان من لونين مختلفين، فإنّ $P(D)=1-P(B)$

ومنه $P(D)=1-\frac{14}{45}=\frac{31}{45}$

- حساب $P(E)$:

إذا رمزنا إلى الألوان بالرموز B أبيض و R أحمر، و V أخضر، يمكننا الحصول على $BR\,;\,BV\,;\,RV$ أو $RB\,;\,VB\,;\,VR$ ، وبما أنّ الكريات التي تحمل الأرقام الفردية منها 3 كريات بيضاء، وكرية حمراء، وكرية خضراء، فإنّ:

$$P(E)=2\left(\frac{3}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{9}\right)=\frac{7}{45}$$

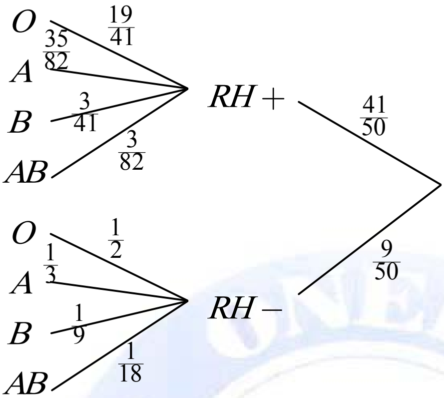
3. مطلوب حساب $P_D(A)$

إنّ $P_D(A)=\frac{P(D\cap A)}{P(D)}$ مع ملاحظة أنّ $D\cap A=E$

ومنه $P_D(A)=\frac{7}{45}\div\frac{31}{45}=\frac{7}{31}$

.15

1. إكمال شجرة الإمكانيات:



.2

أ. لدينا $P(B) = P(RH+) \times P_{RH+}(B) + P(RH-) \times P_{RH-}(B)$

ومنه $P(B) = \frac{41}{50} \times \frac{3}{41} + \frac{9}{50} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{25}$

ب. مطلوب حساب $P_B(RH-)$

لدينا $P_B(RH-) = \dfrac{P(RH- \cap B)}{P(B)}$

و $P(RH- \cap B) = P(RH-) \times P_{RH-}(B)$

ومنه $P(RH- \cap B) = \frac{9}{50} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{50}$

أي $P_B(RH-) = \frac{1}{50} \div \frac{2}{25} = \frac{1}{4}$

.16

يمكن مقارنة $P(V \cap D)$ و $P(V) \times P(D)$

لدينا $P(V) = \frac{1}{3}$ (لوجود 3 كريات خضراء).

و $P(D) = \frac{1}{3}$ (لوجود 3 كريات تحمل رقم 2).

و $P(V \cap D) = \frac{1}{9}$ (لوجود كرية واحدة خضراء وتحمل رقم 2).

ومنه $P(V \cap D) = P(V) \times P(D)$ والحادثتان V و D مستقلتان.

• بنفس الطريقة يمكن مقارنة $P(V \cap T)$ و $P(V) \times P(T)$

لدينا $P(V) = \frac{1}{3}$ و $P(T) = \frac{2}{9}$ و $P(V \cap T) = \frac{1}{9}$

ومنه $P(V \cap T) \neq P(V) \times P(T)$ والحادثتان V و T غير مستقلتين.

17. يمكن الاستفادة من الجدول المرفق:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

لدينا $P(M_2) = \frac{1}{2}$ و $P(M_3) = \frac{1}{3}$

و $P(M_3 \cap M_2) = \frac{1}{6}$

ومنه $P(M_3 \cap M_2) = P(M_3) \times P(M_2)$

والحادثتان M_2 و M_3 مستقلتان.

• بطريقة مماثلة

لدينا $P(M_2) = \frac{1}{2}$ و $P(M_4) = \frac{1}{4}$ و $P(M_4 \cap M_2) = \frac{1}{4}$

ومنه $P(M_4 \cap M_2) \neq P(M_4) \times P(M_2)$ والحادثتان M_2 و M_4 غير مستقلتين.

VI. تقويم ذاتي:.

أ. اختيار من متعدد

في كل من الحالات الآتية أربعة اقتراحات، واحد منها فقط صحيح عيّنه.

1) ليكن A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث:

$P(A) = 0,5$ و $P(B) = 0,6$ و $P(A \cap B) = 0,3$

أ) $P_A(B) = 0,2$.

ب) $P_A(B) = 0,6$.

جـ) $P_A(B) = 0,25$.

د) $P_A(B) = 0,5$.

2) ليكن A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث:

$P(A) = 0,5$ و $P(B) = 0,6$ و $P(A \cap B) = 0,3$

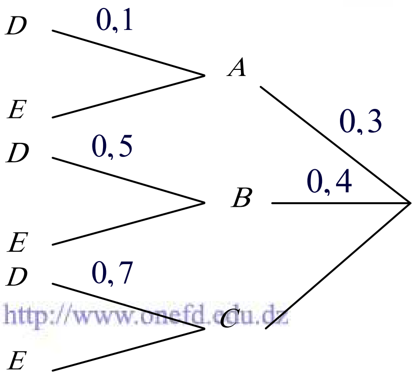
أ) $P_B(A) \neq P(A)$.

ب) $P(A \cup B) = 1,1$.

جـ) الحادثتان A و B مستقلتان.

د) الحادثتان A و B غير مستقلتين.

3) نعتبر وضعية ممثلة بشجرة الامكانيات المرفقة:



أ) $P(C) = 0,6$.

ب) $P_B(E) = 0,2$.

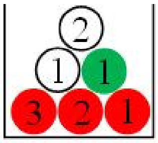
جـ) $P(E) = 0,9$.

د) $P(A \cap E) = 0,27$.

4) نسحب من الصندوق الممثل بالشكل المقابل كرية عشوائيا، ونعتبر الحوادث: R : "الكرية لونها أحمر"

U : "الكرية تحمل رقم 1"

D : "الكرية تحمل رقم 2"



أ) $P_R(D) = 0,5$.

ب) $P(D) = 0,5$.

ج) الحادثتان R و D مستقلتان.

د) الحادثتان R و U مستقلتان.

5) الجدول المرفق يلخص وضعية إحصائية لعينة شملت 500 شخص حول متابعة برنامج تلفزيوني.

	أكبر من 23 سنة	أصغر من 23 سنة
يتابع البرنامج	25	255
لا يتابع البرنامج	185	35

نأخذ شخصا عشوائيا من هذه العينة:

أ) احتمال أن يكون يتابع البرنامج، علما أنّه أصغر من 23 سنة هو $\frac{51}{58}$.

ب) احتمال أن يكون يتابع البرنامج، علما أنّه أكبر من 23 سنة هو $\frac{1}{20}$.

ج) احتمال أن يكون من متابعي البرنامج هو $0,5$.

د) احتمال أن يكون أصغر من 23 سنة هو $0,5$.

ب. صحيح أم خاطئ

في كل حالة مما يأتي خمسة نصوص، ميّز بين الصحيحة منها والخاطئة.

1) A ، B حادثتان مستقلتان، احتمال كل منهما غير معدوم.

أ) $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$.

ب) $P(A\cup B) = P(A)\times P(B)$.

جـ) $P_A(B) = P(A)$.

د) $P_A(B) = P(B)$.

هـ) $P(A\cup B) = P(A) + P(B)\times P(\overline{A})$.

2)

أ) عند رمي حجر نرد متجانس مرتين متتاليتين، فإنّ احتمال الحصول على رقم فردي في الرّمية الأولى ورقم زوجي في الرّمية الثانية هو $\frac{1}{4}$.

ب) عند رمي حجر نرد متجانس مرتين متتاليتين، فإنّ احتمال الحصول على رقم زوجي في الرّمية الثانية هو $\frac{1}{4}$.

جـ) عند رمي حجر نرد متجانس مرتين متتاليتين، فإنّ احتمال الحصول على رقم أصغر من 3 في الرّمية الثانية علما أننا حصلنا على رقم فردي في الرمية الأولى هو $\frac{1}{6}$.

د) عند رمي قطعة نقود مغشوشة (احتمال ظهور الوجه ضعف احتمال ظهور الشعار) مرتين متتاليتين، فإنّ احتمال ظهور الشعار في الرمية الثانية هو $\frac{1}{2}$.

هـ) عند رمي قطعة نقود مغشوشة (احتمال ظهور الوجه ضعف احتمال ظهور الشعار) مرتين متتاليتين، فإنّ احتمال ظهور الوجه في الرمية الأولى والشعار في الرمية الثانية هو $\frac{2}{9}$.

3) الجدول المرفق يلخص وضعية إحصائية لعينة شملت 500 شخص حول متابعة برنامج تلفزيوني.

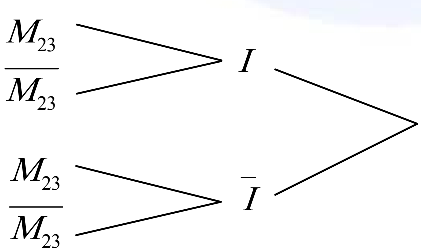
	أكبر من 23 سنة	أصغر من 23 سنة
يتابع البرنامج	25	255
لا يتابع البرنامج	185	35

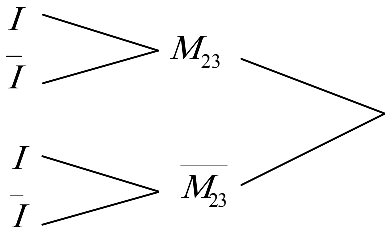
نأخذ شخصا عشوائيا من هذه العينة، ونعتبر الحوادث:

I : "الشخص يتابع البرنامج" و $\overline{I}$: "الشخص لا يتابع البرنامج"

M_{23} : "الشخص عمره أصغر من 23 سنة" و $\overline{M_{23}}$: " الشخص عمره أكبر من 23 سنة"

أ) يمكن تمثيل الوضعية بالشجرة المقابلة.





ب) يمكن تمثيل الوضعية بالشجرة المقابلة.

جـ) $P(I \cap M_{23}) = \frac{29}{50}$.

د) $P_I(M_{23}) = \frac{51}{56}$.

هـ) $P_{M_{23}}(I) = \frac{51}{58}$.

أ. أجوبة اختيار من متعدد

1) ب.
2) جـ.
3) د.
4) جـ.
5) أ.

ب. أجوبة صحيح أم خاطئ

الحالة	النصوص الصحيحة	النصوص الخاطئة
(1	أ. د. هـ.	ب. جـ.
(2	أ. جـ. هـ.	ب. د.
(3	أ. ب. د. هـ.	جـ.

VII. استعد للبكالوريا.:

1. تمرين مقترح من بكالوريا أجنبية بتصرف (دورة 2006) (06 نقاط)

أنجزت صحيفة أجنبية خلال سنة 2006 استبيانا على عينة من مواطنيها أعمارهم بين 18 و 34 سنة، حول المصدر الرئيس لإعلامهم فوجد أنّ:

- 35% من عينة الأشخاص الذين وُجِّه لهم السؤال، مصدر إعلامهم الرئيس هو التلفاز، منهم 40% يقرؤون الصحف المكتوبة أيضا.
- 25% من الأشخاص الذين وُجِّه لهم السؤال، مصدر إعلامهم الرئيس هو المذياع، منهم 60% يقرؤون الصحف المكتوبة أيضا.
- الأشخاص الباقون الذين وُجِّه لهم السؤال، مصدر إعلامهم الرئيس هو الأنترنات، منهم 75% يقرؤون الصحف المكتوبة أيضا.

نأخذ شخصا عشوائيا من العينة، ونعتبر:

T حادثة: "الشخص مصدر إعلامه الرئيس هو التلفاز"

R حادثة: "الشخص مصدر إعلامه الرئيس هو المذياع"

I حادثة: "الشخص مصدر إعلامه الرئيس هو الانترنات"

E حادثة: "الشخص يقرأ الصحف المكتوبة"

ومن أجل كل حادثة A، نرمز بـ $\overline{A}$ للحادثة المعاكسة، و $P(A)$ لاحتمالها.

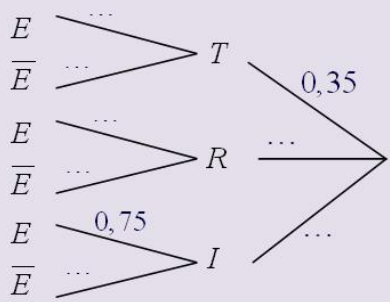
1. عيّن الاحتمال الشرطي $P_T(E)$، ثمّ احسب $P_R(\overline{E})$.
2. انقل شجرة الاحتمالات المرفق في نهاية نص الاختبار، وأكملها.

تابع للتمرين المقترح من بكالوريا أجنبية بتصرف (دورة 2006)

3. أ) عبِّر لغويا عن الحادثة $T\cap E$ ، ثمّ بيّن أنّ $P(T\cap E)=0{,}14$.

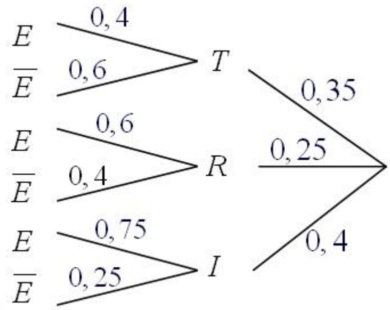
ب) احسب احتمال كل من الحادثتين $R\cap E$ و $I\cap E$ ، واستنتج أنّ $P(E)=0{,}59$.

4. احسب الاحتمال الشرطي $P_E(I)$ ، أعط النتيجة مدورة إلى 10^{-2}.



حل	السلّم
1. تعيين الاحتمال الشرطي $P_T(E)$. بما أنّ 40% من الأشخاص الذين مصدر إعلامهم الرئيس هو التلفاز يقرؤون الصحف المكتوبة، فإنّ $P_T(E)=0{,}4$	0,75
• حساب $P_R(\overline{E})$. لدينا $P_R(\overline{E})=1-P_R(E)$ و $P_R(E)=0{,}6$ ومنه $P_R(\overline{E})=0{,}4$	0,75
2. إكمال شجرة الاحتمالات. نعيّن ونحسب احتمالات الفروع المتبقية بالطريقة نفسها الواردة في الجواب (1) فنجد:	

1,5
(لكل فرع
0,25)



3. أ) $T\cap E$ هي حادثة كون الشخص مصدر إعلامه الرئيس هو التلفاز ويقرأ الصحف المكتوبة أيضا.

ولدينا $P(T\cap E) = P(T)\times P_T(E)$

0,5

ومنه $P(T\cap E) = 0,35\times 0,4$ أي $P(T\cap E) = 0,14$.

• ب) حساب احتمال كل من الحادثتين $R\cap E$ و $I\cap E$

لدينا $P(R\cap E) = P(R)\times P_R(E)$

ومنه $P(R\cap E) = 0,15$.

ولدينا $P(I\cap E) = P(I)\times P_I(E)$

0,5

ومنه $P(I\cap E) = 0,3$.

• استنتاج أنّ $P(E) = 0,59$.

0,25

لدينا $P(E) = P(T\cap E) + P(R\cap E) + P(I\cap E)$

ومنه $P(E) = 0,14+0,15+0,3$ أي $P(E) = 0,59$

4. حساب الاحتمال الشرطي $P_E(I)$

0,75

لدينا $P_E(I) = \dfrac{P(E\cap I)}{P(E)}$ ومنه $P_E(I) = \dfrac{0,3}{0,59}$

أي $P_E(I) = 0,51$

2. تمرين من بكالوريا أمريكا الشمالية (جوان 2010) بتصرف (03 نقاط)

كيس يحتوي كريّات غير متمايزة في الملمس.

20% منها تحمل الرّقم 1 وحمراء اللون.

والأخرى تحمل الرّقم 2 ، منها 10% حمراء والبقية خضراء.

1. نسحب كرية عشوائيا، ما احتمال أن تكون حمراء؟
2. نسحب كرية عشوائيا، إنّها حمراء.

بيّن أنّ احتمال أن تكون تحمل الرّقم 2 هو $\frac{2}{7}$.

3. نسحب عشوائيا 3 كريّات بإرجاع الكرية المسحوبة قبل سحب الموالية لها.

احسب احتمال الحصول على كريّة، على الأقل، حمراء تحمل الرّقم 1 في السحبات الثلاث.

حل	السلّم
1. احتمال سحب كرية حمراء نرمز للحوادث: R : "الكرية لونها أحمر" U: "الكرية تحمل رقم 1" D: "الكرية تحمل رقم 2" عندئذ $P(R)=P(U\cap R)+P(D\cap R)$ $P(R)=P(U\cap R)+P(D)\times P_D(R)$ ومنه $P(R)=\frac{20}{100}+\frac{80}{100}\times\frac{10}{100}$ وبالتالي $P(R)=\frac{7}{25}$	1

2. مطلوب أن نبيّن أنّ $P_R(D) = \frac{2}{7}$

0,25 لدينا $P_R(D) = \frac{P(R \cap D)}{P(R)}$

0,5 ومنه $P_R(D) = \frac{80}{100} \times \frac{10}{100} \div \frac{7}{25}$ أي $P_R(D) = \frac{2}{7}$

3. نفرض A حادثة الحصول على كريّة، على الأقل، حمراء تحمل الرّقم 1 في السحبات الثلاث.

- يمكن الحصول على كريّة حمراء تحمل الرّقم 1 وقد تكون الأولى أو الثانية أو الثالثة، والاحتمال هو $P_1 = 3 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$
- أو الحصول على كريتين حمراوين تحملان الرّقم 1 وهنالك ثلاث حالات، والاحتمال هو $P_2 = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{4}{5}$
- 1,25 أو الحصول على ثلاث كريات حمراء تحمل كل منها الرّقم 1 وهنالك حالة وحيدة، والاحتمال هو $P_3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3$

وبالتالي $P(A) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{61}{125}$

<u>يمكن الإجابة بالكيفية الآتية:</u>

نفرض B حادثة الحصول على كريّة تحمل الرّقم 2 في السحبات الثلاث، إنّ $P(B) = [P(D)]^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3$

ولدينا $P(A) = 1 - P(B)$ ومنه $P(A) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{61}{125}$