3. الاحتمالات

الكفاءات المستهدفة

- إجراء محاكاة تجربة عشوائية بسيطة وذلك بملاحظة تطور تواترات القيم المختلفة الناتجة.
- قانون الاحتمال المتعلق بتجربة عشوائية لها عدد منته من الإمكانيات.
- الربط بين الوسط الحسابي والأمل الرياضي والتباين التطبيقي والتباين النظري لسلسلة إحصائية.

تصميم الدرس

تعريف

I. محاكاة تجربة عشوائية– تذبذب العينات
II. قانون احتمال لتجربة عشوائية
III. الأمل الرياضياتي والتباين لقانون احتمال
IV. ملخص
V. توظيف المعارف (تمارين + حلول وإرشادات)
VI. التقويم الذاتي (اختيار من متعدد + صحيح أم خاطئ)
VII. استعد للبكالوريا

تعريف:

إن الاحتمالات اليوم هي واحدة من أهم فروع الرياضيات، وتطبيقاتها بالإضافة إلى علم الإحصاء متواجدة في جلِّ ميادين الحياة.

فهل تعلم كيف بدأ علم الاحتمالات؟

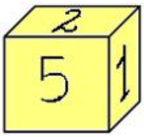
يجمع الباحثون في تاريخ العلوم وتاريخ الرياضيات على الخصوص أن الاحتمالات ظهرت من خلال محاولات حلول مشكلات متعلقة بالألعاب المبنية على الحظ ذات النتائج العشوائية (*les jeux de hasard*)، وكلمة (*hasard*) أصلها عربية وقد اشتقت من كلمة الزهر، الذي يعني أيضا الحظ، ويعتقد أنّ حجر النرد الذي يسمى أيضا "زهرة النرد" كان يحمل رسما لزهرة على أحد وجوهه الستة.

والمشكل الشائع عبر تاريخ الرياضيات هو: لاعبان دفع كل منهما 11 أوقية (عملة من الذهب الخالص)، وراحا يلعبان لعبة من 60 نقطة كل شوط بِـ 10 نقط، ولكن الجولة انقطعت في الوقت الذي سجل فيه أحد اللاعبين 50 نقطة وسجل الآخر 30 نقطة. لكي يكون توزيع 22 أوقية بينهما عادلا، ما هو المبلغ الذي يرجع إلى كل واحد منهما؟

حل *Luca Pacioli* الراهب الرياضياتي الإيطالي الجنسية (1445– 1517) المشكلة بأن ارجع إلى كل منهما مبلغا متناسبا مع النقط المحصل عليها عند انقطاع اللعبة، لكنّ هذا الحل البسيط يفتقر إلى استدلال، وقد انتُقِد من قبل مواطنه *Niccolo Tartaglia* (1499 – 1500)، الذي لاحظ أنّه: " لو أنّ لحظة انقطاع اللعبة كان أحد اللاعبين (أ) قد سجل 10 نقط والآخر 0 ، فإنّ التوزيع المتناسب مع النقط المحصل عليها يمنح الـ 22 أوقية إلى اللاعب (أ) ويحرم اللاعب الآخر في الوقت الذي لديه حظوظا معتبر للربح"... "**يتبع في بداية الإرسال الثالث**"

I. محاكاة تجربة عشوائية- تذبذب العينات:

نشاط



1. نرمي حجر نرد متوازن مرقم من 1 إلى 6 رمية واحدة ونسجل رقم الوجه العلوي.
   - ما هي القيم التي يمكن الحصول عليها ؟
2. نرمي حجر النرد هذا مرتين متتابعتين ونسجل في كل مرّة مجموع الرقمين المحصل عليهما.
   - ما هي مجموعة القيم الممكنة ؟
3. نرمي حجر النرد هذا ثلاث رميات متتابعة ونسجل في كل مرّة مجموع الأرقام المحصل عليها.
   - ما هي مجموعة القيم الممكنة ؟
4. نرمي حجر النّرد هذا عددا من المرات ونجمع الأرقام المحصل عليها، ما هو أصغر عدد المرات الممكن بحيث يكون إمكانية الحصول على مجموع يساوي 32 واردا ؟

حل

1. بما أنّ حجر النّرد متوازن فإنّ إمكانية ظهور أي وجه هي نفسها، وبالتالي فإنّ القيم التي يمكن الحصول عليها هي: 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

2. عند رمي حجر النّرد هذا مرتين متتابعتين وتسجيل في كل مرّة مجموع الرقمين المحصل عليهما، فإنّ مجموعة القيم الممكنة هي:

$S=\{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$

ملاحظة

نبدأ بتعيين أصغر مجموع وهو 2 (أي عند الحصول على 1 في كل من الرميتين) وأكبر مجموع وهو 12 (أي عند الحصول على 6 في كل من الرميتين)، كما نلاحظ أنّ كل القيم الطبيعية بين 2 و 12 يمكن الحصول عليها.

3. بالاستفادة من الملاحظة السابقة، وعند رمي حجر النّرد هذا ثلاث مرّات متتابعة وتسجيل في كل مرّة مجموع الأرقام المحصل عليها، فإنّ مجموعة القيم الممكنة هي:

$$S=\{3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\,;13\,;14\,;15\,;16\,;17\,;18\}$$

4. لاحظ أنّه عند رمي حجر النّرد هذا 5 مرات وجمع الأرقام المحصل عليها فإنّ أكبر مجموع يمكن الحصول عليه هو 30 (أي عند الحصول على 6 في كل رمية)، وعليه يكون أصغر عدد المرات الممكن بحيث يكون إمكانية الحصول على مجموع يساوي 32 واردا هو 6 مرّات.

محاكاة تجربة عشوائية- تذبذب العينات

• تجربة عشوائية

القول عن تجربة إنّها عشوائية يعني عدم تمكننا أن نجزم بصفة قطعية نتيجتها قبل إنجازها.

أمثلة

- عند رمي قطعة نقود متوازنة وملاحظة الناتج فإننا لا نستطيع أن نجزم أن كانت ستسقط على الوجه أو الشعار.
- عند سحب قريصة من كيس يحوي خمس قريصات غير متمايزة في اللمس مرقمة من 1 إلى 5 وملاحظة الرقم الناتج فإننا لا نستطيع أن نجزم ما هو الرقم الذي سنسحبه.

ملاحظة

التجارب التي لا تحتوي على ملاحظات حول حظوظ ظهور نتيجة ما، لنتائجها نفس حظوظ الظهور.

• عيِّنة (تجربة)

نسمي عيِّنة (لتجربة) مقاسها n، كل سلسلة مشكّلة من النتائج المتحصل عليها عند تكرار هذه التجربة n مرة وفي نفس الظروف.

ملاحظات

- في التعبير العام، عيِّنة منتوج ما هي كمية قليلة منه، عادة ما هي للتعريف بالمنتوج.
- مقاس العيِّنة هو عدد العناصر التي تظهر في هذه العيِّنة.

أمثلة

- عند رمي قطعة نقود متوازنة مرّة واحدة فإنّ كلا من $[P\,;\,F\,;\,P\,;\,P\,;\,P]$ و $[F\,;\,F\,;\,F\,;\,P\,;\,P]$ هي عيّنة مقاسها 5.
- عند سحب قريصة من كيس يحوي خمس قريصات غير متمايزة في اللمس مرقمة من 1 إلى 5 وإرجاع القريصة المسحوبة قبل سحب الموالية، وملاحظة الرقم الناتج فإنّ كلا من $[2\,;\,2\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,4\,;\,4\,;\,4\,;\,5\,;\,5]$ و $[1\,;\,2\,;\,3\,;\,3\,;\,3\,;\,3\,;\,3\,;\,3\,;\,3\,;\,5]$ هي عيّنة مقاسها 10.
- عند سحب قريصتين دفعة واحدة من كيس يحوي خمس قريصات غير متمايزة في اللمس مرقمة من 1 إلى 5 وحساب مجموع رقميهما فإنّ كلا من $[3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9]$ و $[7\,;\,7\,;\,7\,;\,7\,;\,9\,;\,9\,;\,9]$ هي عيّنة مقاسها 7.

- **المحاكاة (محاكاة تجربة عشوائية)**

نقول أننا قمنا بمحاكاة تجربة عشوائية، عندما نختار نموذجا لها وسندا ماديا نحققها باستعماله.

أمثلة

➢ يمكن محاكاة رمي قطعة نقود متوازنة مرّة واحدة بسحب كرة من كيس يحتوي كرتين مختلفتين في اللون (الأبيض والأحمر مثلا) متماثلتين في اللمس بحيث نرفق أحد اللونين بالوجه (الأبيض مثلا) والآخر بالشعار (الأحمر)، فعند سحب الكرة البيضاء نسجل وجه، وعند سحب الكرة الحمراء نسجل شعار، وعندئذ تدل النتيجة: [أحمر، أحمر، أبيض، أحمر، أبيض] على العينة .[F ; P ; F ; P ; P]

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	2	5	1	6	6	6	2	3	4
2	2	1	2	4	5	6	5	4	5	6
3	2	2	2	1	1	3	4	5	2	3
4	2	5	1	3	4	6	1	2	2	1
5	4	1	2	4	6	5	3	3	6	5
6	4	1	4	4	5	6	4	6	5	4
7	6	6	1	4	6	1	4	5	2	1
8	3	1	5	1	5	6	3	4	4	5
9	4	6	2	1	3	6	3	4	5	4
10	6	1	2	3	3	1	5	2	4	6
11	5	2	3	4	3	1	5	4	6	4
12	6	1	4	5	6	2	5	5	3	6
13	6	6	5	1	3	1	3	4	3	3
14	2	4	5	3	4	5	1	1	6	5
15	2	1	4	5	2	6	4	2	4	3
16	6	1	1	6	4	3	2	5	4	6
17	1	3	4	5	4	5	2	4	4	1

➢ باستعمال الصيغة $=ENT(6\times ALEA()+1)$ يمكن محاكاة رمي حجر نرد متوازن مرّة واحدة ، مرقّم من 1 إلى 6، في ورقة حساب مجدول إكسل، ونحصل على إحدى النتائج 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 عشوائيا كلّما ضغطت على اللمسة F9 .

المحاكاة باستعمال المجدول إكسل

التجربة الأولى (محاكاة رمي حجر نرد باستعمال مجدول إكسل)

في هذا المثال سننجز في ورقة حساب إكسل محاكاة رمي حجر نرد متوازن، مرقّم من 1 إلى 6، مرّة واحدة، وتسجيل رقم الوجه الظاهر، ونلاحظ كيف تتذبذب بعض العينات المرتبطة بهذه التجربة.

- تذكر أنّ الصيغة $=ENT(6\times ALEA()+1)$ تعطي إحدى القيم 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 عشوائيا كلّما ضغطنا على اللمسة F9 .

- احجز في الخلية A1 الصيغة $=ENT(6\times ALEA()+1)$ ثم عمِّم بالسحب محتواها إلى الخلية J2 تحصل على عيِّنة مقاسها 20، وعمِّم بالسحب محتواها إلى الخلية J10 تحصل على عيِّنة مقاسها 100، وعمِّم بالسحب محتواها إلى الخلية J100 تحصل على عيِّنة مقاسها 1000 وهي العينات التي سننجز عليها التجربة (كما يمكنك التصرف في مقاس العيِّنة) أنظر الشكل المرفق أدناه.

لاحظ أنّه كلّما ضغطت على اللمسة F9 فإنّ قيم الخلايا (وهي النتائج بالنسبة إلى رمي حجر النرد) تتغير عشوائيا ولكنّها تبقي من المجموعة {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}، الأمر الذي يضمن صلاحية المحاكاة.

- والآن سندرس في كل عيِّنة تواتر النتائج، بهدف ملاحظة حظوظ ظهور كل نتيجة، ومدى تذبذب العيِّنة المدروسة، ولأجل ذلك:

- احجز في الخلايا من N1 إلى S1 قيم النتائج الممكنة وهي 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 وفي الخلية N2 الصيغة =NB.SI($A$1:$J$2;N1)/20 والتي تعني تواتر القيمة 1 بالنسبة إلى العيِّنة التي مقاسها 20 (الصيغة =NB.SI($A$1:$J$2;N1) تعني تكرار قيمة الخلية N1 في الجدول A1:J2)
ثمّ عمِّم بالسحب محتوى الخلية N2 إلى الخلية S2 تحصل على تواتر القيم الأخرى، ويمكن التحقق من أنّ مجموع التواترات الناتجة هو 1.

- احجز في الخلية N3 الصيغة =NB.SI($A$1:$J$10;N1)/100 والتي تعني تواتر القيمة 1 بالنسبة إلى العيِّنة التي مقاسها 100، ثمّ عمِّم بالسحب محتواها إلى الخلية S3 تحصل على تواتر القيم الأخرى، ويمكن التحقق من أنّ مجموع التواترات الناتجة هو 1.

- احجز في الخلية N4 الصيغة =NB.SI($A$1:$J$100;N1)/1000 والتي تعني تواتر القيمة 1 بالنسبة إلى العيِّنة التي مقاسها 1000، ثمّ

عمِّم بالسحب محتواها إلى الخلية S4 تحصل على تواتر القيم الأخرى، ويمكن التحقق من أنّ مجموع التواترات الناتجة هو 1.

- والآن بإمكانك إدراج التمثيل البياني للتواترات بدلالة النتائج الممكنة باستعمال أيقونة إدراج تمثيل بياني(Insertion ثمّ Nuage de points)، وذلك بعد تحديد الجدول M1:S4 للحصول على التمثيلات البيانية لتواترات العينات الثلاثة في نفس الشكل.

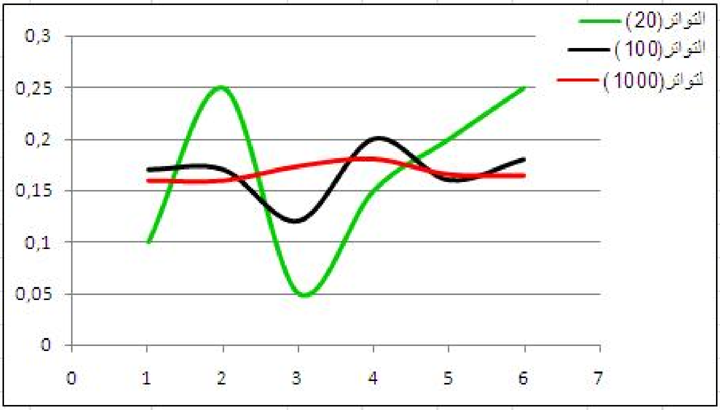
نلاحظ عموما أنّه كلّما كبر مقاس العيِّنة كلّما قلَّ الفرق بين تواترات النتائج، نقول عندئذ أنّ العيّنة تميل إلى الاستقرار، أو أنّ تذبذبها بسيط.

ميل التواترات نحو الاستقرار

بالضغط على اللمسة F9 مرات متتابعة لاحظ تغيّر النتائج وثبوت الملاحظ المتعلقة بميل التواترات نحو الاستقرار كلما كبر مقاس العيّنة.

يمكنك التصرّف في مقاس العينة، وملاحظة أنّه كلّما كبر، كلّما زاد تجمّع تونرات النتائج حول التواتر النظري لنتيجة رمي حجر نرد متوازن مرة واحد والذي هو $1,667 \simeq \frac{1}{6}$.

K	L	M	N	O	P	Q	R	S
		النتائج الممكن	1	2	3	4	5	6
	العينة 20	التواتر(20)	0,1	0,25	0,05	0,15	0,2	0,25
	العينة 100	التواتر(100)	0,17	0,17	0,12	0,2	0,16	0,18
	العينة 1000	التواتر(1000)	0,159	0,159	0,173	0,18	0,165	0,164



التجربة الثانية (محاكاة رمي قطعة نقود باستعمال مجدول إكسل)

في هذا المثال سننجز في ورقة حساب إكسل محاكاة رمي قطعة نقود متوازنة، من قبل 10 أشخاص ومتابعة تواترات الوجه، وملاحظة كيف تتذبذب بعض العينات المرتبطة بهذه التجربة.

التجربة العشوائية: عشر أشخاص يرمي كل منهم قطعة نقود متوازنة في الحالة الأولى 10 مرات متتابعة، وفي الحالة الثانية 100 مرّة، وفي الحالة الثالثة 1000 مرّة، ويسجلون تواتر ظهور الوجه.

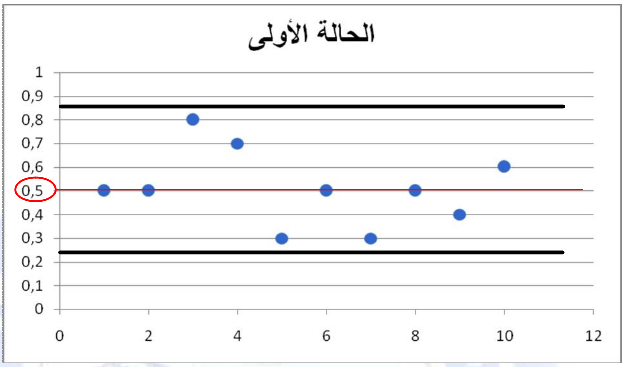
- احجز في الخلية A1 الصيغة $=ENT(2\times ALEA())$ ثم عمِّم بالسحب محتواها إلى الخلية J1000 .

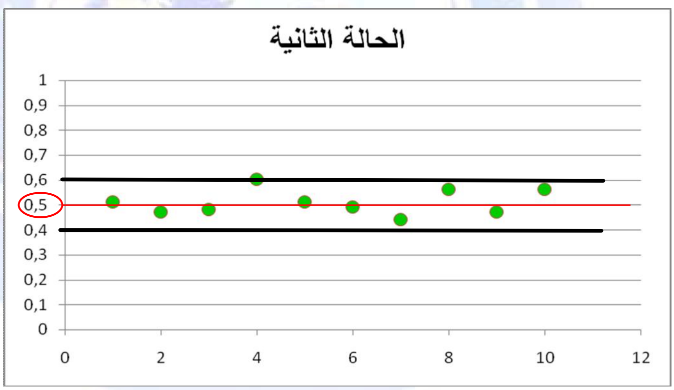
الصيغة $=ENT(2\times ALEA())$ تعطي القيمتين 0 أو 1 عشوائيا، نرفق وجه قطعة النقود بالقيمة 1.

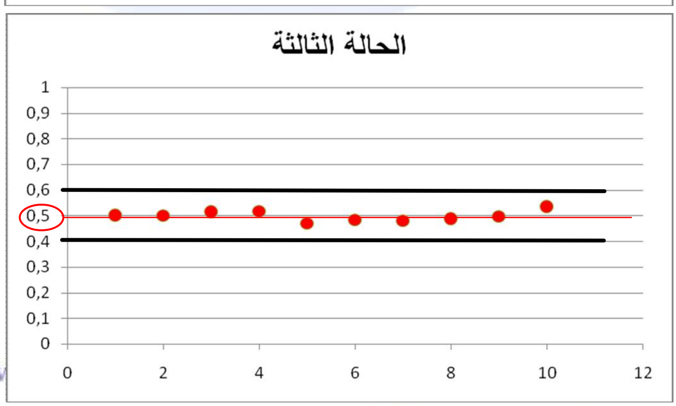
- احجز في الخلية M2 الصيغة =NB.SI(A1:A10;1)/10 والتي تعني تواتر القيمة 1 بالنسبة إلى العيِّنة التي مقاسها 10(عدد رميات الشخص الأول في الحالة الأولى).
- ثم عمِّم بالسحب محتواها إلى الخلية V2 تحصل على نتائج التجربة في الحالة الأولى.
- في الحالة الثانية احجز في الخلية M3 الصيغة =NB.SI(A1:A100;1)/100، ثم عمِّم بالسحب محتواها إلى الخلية V3.
- في الحالة الثالثة احجز في الخلية M4 الصيغة =NB.SI(A1:A1000;1)/1000، ثم عمِّم بالسحب محتواها إلى الخلية V4.
- تحصل على ورقة حساب شبيهة بالمرفقة أدناه:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1		الأشخاص	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1		الحالة الأولى	0,5	0,5	0,8	0,7	0,3	0,5	0,3	0,5	0,4	0,6
3	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0		الحالة الثانية	0,51	0,47	0,48	0,6	0,51	0,49	0,44	0,56	0,47	0,56
4	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1		الحالة الثالثة	0,499	0,501	0,514	0,518	0,471	0,485	0,482	0,487	0,498	0,534
5	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1												
6	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1												
7	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0												
8	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0												
9	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1												
10	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0												
11	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1												
12	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0												
13	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0												
14	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1												
15	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1												
16	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1												
17	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1												

• والآن بإمكانك إدراج التمثيلات البيانية للتواترات بالنسبة إلى الأشخاص العشرة في كل حالة باستعمال أيقونة إدراج تمثيل بياني، والحصول على الأشكال المرفقة أدناه:







ملاحظة

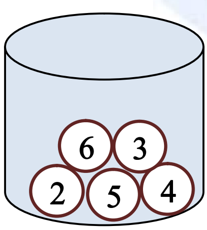
- للتوضيح فإنّ الأشكال معروضة بتصرّف مثل: فصلها، وبعض الإضافات، ... الخ.
- لاحظ كيف أنّ الفرق بين تواترات النتائج يقل كلّما كبر مقاس العيِّنة، ويزداد تمركزها حول التواتر النظري والذي هو في هذه التجربة 0,5، ونقول عندئذ أنّ العيّنة مستقرّة، أو أنّ تذبذبها بسيط.
- بالضغط على اللمسة F9 مرات متتابعة لاحظ تغيّر النتائج وثبوت الملاحظ المتعلقة باستقرار العيّنة كلما كبر مقاسها.

II. قانون احتمال لتجربة عشوائية:

نشاط

كيس يحتوي 5 كرات غير متمايزة في اللمس ومرقمة من 2 إلى 6.

1. نسحب كرتين في آن واحد ونسجل مجموع رقميهما.



أ) هل يمكن الحصول على 4 ؟ على 6؟

ب) ما هي كل النتائج المختلفة التي يمكن الحصول عليها ؟

ج) ما هو عدد الطرائق الممكنة للحصول على 8؟

.2

أ) أُحسب عدد الطرائق الكلية الممكنة لسحب كرتين في آن واحد.

ب) علما أنّ احتمال الحصول على 8 هو نسبة عدد طرائق الحصول على 8 إلى عدد الطرائق الكلية.

أُحسب احتمال الحصول على 8.

ج) لحساب احتمالات كل النتائج الممكنة أُنقل الجدول أدناه وأكمله، حيث: x_i : نتيجة المجموع الممكن الحصول عليها

$P(x_i)$: احتمال النتيجة x_i الموافقة

			8				x_i
							p_i

حل

1. عندما نسحب كرتين في آن واحد فإنّ النتيجة تكون على شكل ثنائية مؤلفة من عددين دون ترتيب وبلا تكرار مثل $(3\,;\,2)$ والمجموع في هذا المثال هو 5، وعليه:

أ) لا يمكن الحصول على 4: لأن العدد 4 لا يكتب كمجموع رقمين من الأرقام التي تحملها الكرات التي داخل الكيس، ونحصل على أصغر مجموع بسحب الكرتين اللتين تحملان الرقمين 2 و 3 وهو 5.

يمكن الحصول على 6 بسحب الكرتين اللتين تحملان الرقمين 2 و 4.

ب) النتائج المختلفة التي يمكن الحصول عليها هي:

$$11\,;\,10\,;\,9\,;\,8\,;\,7\,;\,6\,;\,5$$

ج) بما أنّ $5 + 3 = 6 + 2 = 8$ فإنّه يمكن الحصول على 8 بطريقتين إحداهما بسحب الكرتين اللتين تحملان الرقمين 2 و 6، والأخرى بسحب الكرتين اللتين تحملان الرقمين 3 و 5.

2. أ) لحساب عدد الطرائق الكلية الممكنة لسحب كرتين في آن واحد من الكيس يمكن إتباع طرائق العد البسيطة مثل باستعمال الشجرة والحصول على:

$2 \xrightarrow{+} 3 = 5$

$2 \to 4 = 6$

$2 \to 5 = 7$

$2 \to 6 = 8$

$3 \xrightarrow{+} 4 = 7$

$3 \to 5 = 8$

$3 \to 6 = 9$

$4 \xrightarrow{+} 5 = 9$

$4 \to 6 = 10$

$5 \xrightarrow{+} 6 = 11$

ومنه عدد الطرائق الكلية يساوي 10.

ب) بما أنّ عدد الطرائق الكلية 10، وعدد طرائق الحصول على 8 هو 2، فإنّ احتمال الحصول على 8 يساوي $\frac{1}{5}$.

ج) حساب احتمالات كل النتائج الممكنة

x_i	5	6	7	8	9	10	11
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

ملاحظات

- إنّ $\sum P(x_i) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 1$
- يُعرف الجدول السابق ب**قانون احتمال** التجربة العشوائية.

قانون احتمال لتجربة عشوائية

x_i	x_1	$\cdots$	x_n
f_i	f_1	$\cdots$	f_n

$\Downarrow$

x_i	x_1	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	$\cdots$	p_n

عند القيام بتجربة عشوائية ذات n نتيجة $\Omega = \{ x_1 \; ; \; x_2 \; ; \cdots \; ; \; x_n \}$، وتكرار التجربة للحصول على عينة ذات مقاس كبير جدا، فإنّ التواترات النظرية للنتائج تؤول إلى احتمالات حدوثها: $p_1 \; ; \; p_2 \; ; \cdots \; ; \; p_n$ مع $0 \leq p_i \leq 1$

و $\sum_i P_i = 1$

$\Omega = \{ x_1 \; ; \; x_2 \; ; \cdots \; ; \; x_n \}$ مجموعة قيم.

نعرّف قانون احتمال على المجموعة Ω بإرفاق كل قيمة x_i من Ω بعدد موجب p_i حيث $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

ونُمثل قانون الاحتمال بالجدول المرفق

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

تعريف

مثال

كيس يحتوي 6 كرات غير متمايزة في اللمس منها 4 خضراء نرمز لنونها بالرمز V والباقي حمراء نرمز لنونها بالرمز R.

نسحب من الكيس كرتين عشوائيا ونعتبر X عدد الكرات الخضراء المحصل عليها.

يُسمَّي X متغيرا عشوائيا.
عندئذ يُسمَّي قانون الاحتمال للتجربة العشوائية بقانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.
ونكتب $p(X = x_i) = p_i$

أمثلة :

نريد تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X في ثلاث حالات هي:

* السحب المتزامن (في آن واحد)

* السحب على التوالي دون إرجاع

* السحب على التوالي مع الإرجاع

الحالة الأولى : السحب المتزامن (في آن واحد)

- عندما نسحب الكرتين في آن واحد فإنّ النتيجة مكوّنة من ثنائية من الشّكل $(V;R)$.
- إنّ القيم x_i للمتغير العشوائي X هي: $0 \;;\; 1 \;;\; 2$
- في هذه الحالة الترتيب غير مهم (أي النتيجة $(V;R)$ هي نفسها النتيجة $(R;V)$) والتكرار غير مسموح، وعليه فعدد الطرائق الكلية الممكنة لسحب كرتين في آن واحد هو 15.

- احتمال سحب كرتين حمراوين نرمز له بـ $p(X=0)$ ($X=0$ أي عدد الكرات الخضراء في السحب صفر).

ولدينا طريقة واحدة لسحب كرتين حمراوين، وبالتالي فإنّ

$$p(X=0)=p(\mathrm{R};\mathrm{R})=\frac{1}{15}$$

كما نجد:

$$p(X=1)=p(\mathrm{V};\mathrm{R})=\frac{8}{15}$$ و

$$p(X=2)=p(\mathrm{V};\mathrm{V})=\frac{6}{15}$$

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

الحالة الثانية: السحب على التوالي دون إرجاع

- في هذه الحالة الترتيب مهم (فمثلا النتيجة $(\mathrm{V};\mathrm{R})$ ليست نفسها النتيجة $(\mathrm{R};\mathrm{V})$ لأنّ في الأولى الكرة المسحوبة أولا خضراء، بينما في الثانية الكرة المسحوبة أولا حمراء) والتكرار غير مسموح، وعليه:
- عدد الطرائق الكلية الممكنة لسحب الكرتين: لسحب الكرة الأولى لدينا 6 اختيارات ولسحب الكرة الثانية لدينا 5 اختيارات، ومنه فعدد الطرائق الكلية هو 5×6 وهو 30.
- احتمال سحب كرتين حمراوين $p(X=0)$.

لسحب الكرة الأولى حمراء لدينا 2 اختيارات، ولسحب الكرة الثانية حمراء يبقى لدينا اختيار واحد، ومنه فعدد طرائق سحب كرتين حمراوين هو 1×2.

وبالتالي فإنّ: $p(X=0)=p(\mathrm{R};\mathrm{R})=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$

كما نجد :

$$p(X=1)=p((\mathrm{V};\mathrm{R}),(\mathrm{R};\mathrm{V}))=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

و $$p(X=2)=p((\mathrm{V};\mathrm{V}))=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$$

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{2}{30}$	$\frac{16}{30}$	$\frac{12}{30}$

الحالة الثالثة : السحب على التوالي مع الإرجاع

- في هذه الحالة الترتيب مهم والتكرار مسموح (لأنّ الكرة المسحوبة تعاد إلى الكيس قبل السحب الموالي وبالتالي يمكن سحبها مرّة أخرى)، وعليه:
- عدد الطرائق الكلية الممكنة لسحب الكرتين: لحسب الكرة الأولى لدينا 6 اختيارات ولسحب الكرة الثانية لدينا 6 اختيارات أيضا، ومنه فعدد الطرائق الكلية هو 6×6 وهو 36.
- احتمال سحب كرتين حمراوين $p(X=0)$.

لحسب الكرة الأولى حمراء لدينا 2 اختيارات، ولسحب الكرة الثانية حمراء لدينا 2 اختيارات أيضا، ومنه فعدد طرائق سحب كرتين حمراوين هو 4.

وبالتالي فإنّ:

$$p(X=0)=p(\mathrm{R};\mathrm{R})=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

كما نجد:

$$p(X=1)=p((\text{V};\text{R}),(\text{R};\text{V}))=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

و $$p(X=2)=p((\text{V};\text{V}))=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

تطبيق1

صندوق يحوي 5 كريات غير متمايزة في اللمس مرقمة من 1 إلى 5، نسحب منه على التوالي 3 كريات بالإرجاع (أي نعيد الكرية المسحوبة قبل سحب الموالية لها في كل تجربة) ونسجل بالترتيب من اليسار إلى اليمين الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة، فنحصل عندئذ على عدد مؤلف من ثلاثة أرقام من بين الأرقام 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

نرمز بـِ A للحادثة " الكرية الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4"

وبالرمز B للحادثة " العدد الناتج زوجي "

1. ما هو عدد كل الأعداد الممكنة ؟
   - ما احتمال الحادثة A؟ وما احتمال الحادثة B؟
2. نعيد التجربة هذه المرّة لكن دون إرجاع الكرية المسحوبة حتى نهاية التجربة. ما هو عدد كل الأعداد الممكنة ؟
   - ما احتمال الحادثة A؟ وما احتمال الحادثة B؟

حل

1. كل عدد محصل عليه مشكل من مئات وعشرات وآحاد، وبما أننا نعيد الكرية المسحوبة قبل سحب الموالية لها في كل تجربة، فهناك 5 إمكانيات لسحب الكرية التي تحمل رقم المئات، ومن أجل كل إمكانية هناك 5 إمكانيات لسحب الكرية التي تحمل رقم العشرات، (أي 25 إمكانية)، ومن أجل كل إمكانية من بين الـ 25 هناك 5 إمكانيات لسحب الكرية التي تحمل رقم الآحاد.

وبالتالي فعدد كل الأعداد الممكنة يساوي $5\times5\times5$ أي 125

احتمال حادثة هو نسبة عدد الحالات المناسبة لهذه الحادثة إلى عدد الحالات الممكنة.

- احتمال الحادثة A

حساب عدد الأعداد المواتية للحادثة A:

كل نتيجة من الحادثة A هي من الشكل $\boxed{\cdots}\,4\,\boxed{\cdots}$ ومنه هناك 5 إمكانيات لسحب الكرية التي تحمل رقم المآت، ومن أجل كل إمكانية هناك إمكانة وحيدة لسحب الكرية التي تحمل رقم العشرات (الكرية التي تحمل الرقم 4)، ومن أجل كل إمكانية من بين السابقة هناك 5 إمكانيات لسحب الكرية التي تحمل رقم الآحاد، فيكون عدد الأعداد المواتية للحادثة A يساوي $5\times1\times5$ أي 25

ومنه $p(\text{A})=\dfrac{25}{125}=\dfrac{1}{5}$

- احتمال الحادثة B

حساب عدد الأعداد المواتية للحادثة B:

كل نتيجة من الحادثة B هي عدد مؤلف من ثلاث أرقام رقم آحاده إما 2 أو 4، ومنه هناك 5 إمكانيات لسحب الكرية التي تحمل رقم المآت، ومن أجل كل إمكانية هناك 5 إمكانيات لسحب الكرية التي تحمل رقم العشرات، ومن أجل كل إمكانية من بين السابقة هناك 2 إمكانيات لسحب الكرية التي تحمل رقم الآحاد، فيكون عدد الأعداد المواتية للحادثة B يساوي $2 \times 5 \times 5$ أي 50

ومنه $p(\mathrm{B}) = \frac{50}{125} = \frac{2}{5}$

2. بما أننا هذه المرّة لا نرجع الكرية المسحوبة حتى نهاية التجربة، فهناك 5 إمكانيات لسحب الكرية التي تحمل رقم المآت، ومن أجل كل إمكانية هناك 4 إمكانيات لسحب الكرية التي تحمل رقم العشرات، (أي 20 إمكانية)، ومن أجل كل إمكانية من بين الـ 20 هناك 3 إمكانيات لسحب الكرية التي تحمل رقم الآحاد، فيكون عدد كل الأعداد الممكنة يساوي $3 \times 4 \times 5$ أي 60

- احتمال الحادثة A

عدد الأعداد المواتية للحادثة A يساوي $3 \times 1 \times 4$ أي 12

ومنه $p(\mathrm{A}) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

- احتمال الحادثة B

عدد الأعداد المواتية للحادثة B يساوي $2 \times 3 \times 4$ أي 24

ومنه $p(\mathrm{B}) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

تطبيق2

صندوق يحوي 5 كريات غير متمايزة في اللمس مرقمة من 1 إلى 5، نسحب منه على التوالي 3 كريات دون إرجاع الكرية المسحوبة حتى نهاية التجربة، وليكن المتغير العشوائي X أكبر قيمة في السحبات الثلاث.

1. بيّن أنّ مجموعة القيم الممكنة لـِ X هي $\{3 ; 4 ; 5\}$

2. عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X

حل

1. بما أن سحب الكريات الثلاث هو على التوالي ودون إرجاع، فإنّنا نحصل على أصغر قيمة للمتغير العشوائي X عند سحب الكريات التي تحل الأرقام 1 ; 2 ; 3، ومنه فإنّ أصغر قيمة للمتغير العشوائي X هي 3، وبالتالي فإنّ مجموعة القيم الممكنة لـِ X هي $\{3 ; 4 ; 5\}$.

2. قانون احتمال المتغير العشوائي X

- حساب $p(X=3)$.

يكون $X=3$ عندما نسحب كريات تحمل الأرقام 1 ; 2 ; 3.

ومنه عدد الطرائق المواتية يساوي $1\times2\times3$ أي 6.

وبالتالي فإنّ $p(X=3)=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$

- حساب $p(X=4)$.

يكون $X=4$ عندما نسحب الكرية التي تحمل الرقم 4 وقد تكون الأولى أو الثانية أو الثالثة، وكريتين تحملان رقمين من الأرقام 1 ; 2 ; 3.

ومنه عدد الطرائق المواتية يساوي $2\times3\times3$ أي 18.

وبالتالي فإنّ: $p(X=4)=\frac{18}{60}=\frac{3}{10}$

كما نجد: $p(X=5)=\frac{36}{60}=\frac{6}{10}$

x_i	3	4	5
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

III. الأمل الرياضياتي والتباين لقانون احتمال:

أنشطة

1. تذكر أنّ توزيع الاحتمالات أدناه هو لتجربة رمي حجر نرد متوازن مرّة واحدة (انظر نشاط الباب II صفحة 10).

x_i	5	6	7	8	9	10	11
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

وعلما أنّ التباين يحسب من العلاقة $V=\sum_{i=1}^{n} P_i(x_i-\mu)^2$ حيث :

x_i القيم، p_i التواترات الموافقة لها، μ الوسط الحسابي.

اُحسب الوسط الحسابي μ والتباين V للتوزيع الناتج.

2. حجر نرد أوجهه تحمل الأرقام $0 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3$. يرميه لاعب رميتين متتابعتين ويسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي في كل رمية.

X ; Y لاعبان، يريد اللاعب X أن يكون ربحه هو مجموع الرقمين المحصل عليهما (بالدينار)، ويريد اللاعب Y أن يكون ربحه هو جداء الرقمين المحصل عليهما (بالدينار).

1. عرّف قانوني الاحتمال لكل من $X ; Y$.

2. أحسب الأمل الرياضياتي والتباين لكل من $X ; Y$.

3. أي الطريقتين مربحة أكثر لصاحبها ؟

حل

1. لدينا توزيع الاحتمالات

x_i	5	6	7	8	9	10	11
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

- تذكر أنّ الوسط الحسابي هو مجموع الجداءات (جداء القيمة والتواتر الموافق لها)، ومنه الوسط الحسابي للتوزيع:

$$\mu = \sum_{i=1}^{7} P_i x_i = \frac{1}{10}\left[1\times5 + 1\times6 + 2\times7 + 2\times8 + 2\times9 + 1\times10 + 1\times11\right] = 8$$

- التباين للتوزيع الناتج

بما أن التباين يحسب من العلاقة $V = \sum_{i=1}^{7} P_i\left(x_i - \mu\right)^2$ و $\mu = 8$

x_i	5	6	7	8	9	10	11
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$x_i - \mu$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(x_i - \mu\right)^2$	36	4	1	0	1	4	9

ومنه $V = \frac{1}{10}\left[1\times36 + 1\times4 + 2\times1 + 2\times0 + 2\times1 + 1\times4 + 1\times9\right] = 5,7$

2. بما أنّ اللاعب X يريد أن يكون ربحه هو مجموع الرقمين المحصل عليهما (بالدينار) فإنّ النتائج الممكنة وعدد الطرائق الكلية الممكنة بالنسبة إليه يمكن تقديمها بالجدول المقابل.

+	0	1	1	2	2	3
0	0	1	1	2	2	3
1	1	2	2	3	3	4
1	1	2	2	3	3	4
2	2	3	3	4	4	5
2	2	3	3	4	4	5
3	3	4	4	5	5	6

ومنه قانون احتمال X، مع ملاحظة أنّ إضافة السطرين $x_i - \mu$ و $(x_i - \mu)^2$ هو بهدف توضيح كيفية لحساب الأمل الرياضياتي والتباين. مع $\mu = 3$ اُنظر الحساب أدناه.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$
$x_i - \mu$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(x_i - \mu)^2$	9	4	1	0	1	4	9

بما أنّ اللاعب Y يريد أن يكون ربحه هو جداء الرقمين المحصل عليهما (بالدينار) فإنّ النتائج الممكنة وعدد الطرائق الكلية الممكنة بالنسبة إليه يمكن تقديمها بالجدول المقابل.

ومنه قانون احتمال Y، مع ملاحظة أنّ إضافة السطرين $x_i - \mu$ و $(x_i - \mu)^2$ هو بهدف توضيح كيفية لحساب الأمل الرياضياتي والتباين.

مع $\mu = 2,25$ اُنظر الحساب أدناه.

×	0	1	1	2	2	3
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	2	2	3
1	0	1	1	2	2	3
2	0	2	2	4	4	6
2	0	2	2	4	4	6
3	0	3	3	6	6	9

y_i	0	1	2	3	4	6	9
$P(Y = y_i)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$
$x_i - \mu$	*-2,25*	*-1,25*	*-0,25*	*0,75*	*1,75*	*3,75*	*6,75*
$(x_i - \mu)^2$	*5,06*	*1,56*	*0,06*	*0,56*	*3,06*	*14,06*	*45,56*

- حساب الأمل الرياضياتي والتباين لِـ X

الأمل الرياضياتي هو المعدل μ_x :

$$\mu_x = \frac{1}{36}\left[1\times 0 + 4\times 1 + 8\times 2 + 10\times 3 + 8\times 4 + 4\times 5 + 1\times 6\right] = \frac{108}{36} = 3$$

والتباين $V_x = \sum_{i=1}^{7} P_i\left(x_i - \mu_x\right)^2 = 1,83$

• حساب الأمل الرياضياتي والتباين لِـ Y

الأمل الرياضياتي لقانون احتمال هو المعدل μ_Y :

$$\mu_Y = \frac{1}{36}\left[0\times 11 + 1\times 4 + 2\times 8 + 3\times 4 + 4\times 4 + 6\times 4 + 9\times 1\right] = \frac{81}{36} = 2,25$$

والتباين $V_Y = \sum_{i=1}^{7} P_i\left(x_i - \mu_Y\right)^2 = 4,97$

3. تظهر نتائج الأمل الرياضياتي والتباين أنّ طريقة اللاعب X هي المربحة أكثر.

تعريف

• الأمل الرياضياتي لقانون احتمال هو المعدل μ حيث

$$\mu = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots.. + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$$

• التباين لقانون احتمال هو العدد V حيث $V = \sum_{i=1}^{n} P_i\left(x_i - \mu\right)^2$

• الانحراف المعياري هو العدد $\sigma = \sqrt{V}$

ملاحظات

• التباين V لقانون احتمال هو معدل $\left(x_i - \mu\right)^2$ "مربعات فروق القيم x_i والأمل الرياضياتي لقانون الاحتمال μ".

• كما في الإحصاء العدد V يقيس تشتت القيم x_i حول المعدل μ (أو $\bar{x}$)، وعموما كلّما كان العدد V كبيرا كلّما كانت القيم x_i أكثر تشتتا.

• يمكن حساب V بالدستور $V = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 - \mu^2$

خاصية

عند إضافة عدد ثابت a إلى كل القيم x_i يضاف a إلى الأمل الرياضياتي، أي:

القيم	x_i	$x_i + a$
الأمل الرياضياتي	μ	$\mu + a$

تطبيق

يدفع لاعبان A و B مبلغ 6 و 10 دينارا على الترتيب، لمنظم لعبة يسحب كرتين على التوالي وبالإرجاع من صندوق غير شفاف يحوي 4 كرات غير متمايزة في اللمس ومرقمة من 1 إلى 4، ويدفع لكل من اللاعبين ضعف مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين.

- احسب أمل الربح لكل لاعب.

حل

الجدول المقابل يشمل النتائج الممكنة لمجموع الرقمين اللذين تحملهما الكرتين المسحوبتين، وعدد كل الطرائق الممكنة لسحب الكرتين، حيث تعبر قيم السطر الأول عن النتائج الممكنة في السحب الأول (سح1)، وتعبر نتائج العمود الأول عن النتائج الممكنة في السحب الثاني (سح2).

سح2 \ سح1	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

ومنه مجموعة النتائج الممكنة لمجموع الرقمين الظاهرين هي $\{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$ وعدد الطرائق الممكنة 16.

نرمز بـِ X للمبلغ الذي يربحه اللاعب A، فتكون مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي: $\{-2 ; 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10\}$ ، ثمّ نعرّف قانون احتمال X.

لأجل ذلك نقدّم التوضيح الآتي بأخذ حالة $X = 2$:

يربح اللاعب 2 دنانير عندما يسحب منظم اللعبة كرتين تحملان رقمين مجموعهما 4 ، وهذه الحالة مواتية لسحب الكرتين اللتين تحملان الرقمين 1 و 3 أو الكرة التي تحمل الرقم 2 في كل من السحب الأول والثاني، فيكون عدد الطرائق المواتية لهذه الحادثة يساوي 3 ، ومنه $p(X = 2) = \frac{3}{16}$ ، وبطريقة مماثلة نجد:

x_i	-2	0	2	4	6	8	10
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

ومنه الأمل الرياضياتي لقانون احتمال X هو:

$$\mu = \sum_{i=1}^{7} P_i x_i$$

$$= \frac{1}{16} \times \left[1 \times (-2) + 2 \times 0 + 3 \times 2 + 4 \times 4 + 3 \times 6 + 2 \times 8 + 1 \times 10\right] = 4$$

وبالتالي أمل الربح بالنسبة إلى اللاعب A هو 4 دنانير.

طريقة ثانية (توظف خاصية الأمل الرياضياتي):

يمكن حساب الأمل الرياضياتي لقانون احتمال المبلغ الذي يدفعه صاحب اللعبة :

x_i	4	6	8	10	12	14	16
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

فنجده يساوي 10 .

وبتطبيق خاصية الأمل الرياضياتي لقانون احتمال نجد: $\mu = 10 - 6 = 4$

- بالنسبة إلى أمل الربح للاعب B

بما أنّ اللاعب B دفع 4 دنانير أكثر من اللاعب A، فإنّ قيم المبلغ الذي يمكن أن يربحه اللاعب B، تنتج بطرح 4 من قيم المجموعة $\{10 ; 8 ; 6 ; 4 ; 2 ; 0 ; -2\}$ (مجموعة المبالغ التي يمكن أن يربحها اللاعب A).

ومنه لحساب أمل الربح بالنسبة إلى اللاعب B يمكن محاكاة الطريقة السابقة، أو نطبق خاصية الأمل الرياضياتي، فنجد أمل ربحه

$$\mu' = \mu - 4 = 0$$

وبالتالي أمل الربح بالنسبة إلى اللاعب B هو 0 دينارا.

تطبيق عام

في امتحان شفهي للدخول إلى أحد المعاهد. وضع 20 سؤال داخل صندوق في أوراق مطوية متماثلة. 6 في مادة العلوم الطبيعية، 5 في

مادة الرياضيات، 4 في مادة الفيزياء، 3 في مادة الأدب العربي، وسؤالان في مادة الاجتماعيات.

I. طُلِب من المترشح الأول أن يسحب ورقة واحدة يجيب عما بداخلها ثم يتركها خارج الصندوق، ويسحب ورقة ثانية يجيب عن ما بداخلها، ثم يسحب ورقة ثالثة وأخيرة دون أن يعيد الثانية إلى الصندوق.

1. ما احتمال أن يمتحن المترشح في سؤالين في مادة الرياضيات وسؤال في مادة الفيزياء بهذا الترتيب ؟
2. ما احتمال أن يمتحن المترشح في سؤالين في مادة الرياضيات وسؤال في مادة الفيزياء ؟
3. ما احتمال أن يمتحن المترشح في سؤال على الأقل في مادة الأدب العربي ؟
4. ما احتمال أن يمتحن المترشح في مواد علمية ؟

II. المترشح الثاني طلب منه اتباع نفس طريقة المترشح الأول في سحب الأسئلة، لكن سمح له بإرجاع ورقة السؤال المسحوبة بعد طيّها إلى الصندوق كلما أجاب عن السؤال الذي تحمله.

ما احتمال أن يمتحن المترشح:

1. في مادة الاجتماعيات فقط ؟
2. في 3 أسئلة من نفس المادة ؟
3. في نفس السؤال مرتين مختلفتين ؟
4. في نفس السؤال ثلاث مرات ؟

حل

I. بما أن السحب دون إرجاع، فالترتيب غير مهم، والتكرار غير مسموح، ومنه فإنّ عدد كل الطرائق الممكنة هو $20\times19\times18$ ويساوي 6840.

1. عدد طرائق سحب سؤالين في مادة الرياضيات وسؤال في مادة الفيزياء بهذا الترتيب هو $5\times4\times4$ ويساوي 80.

وبالتالي احتمال أن يمتحن المترشح في سؤالين في مادة الرياضيات وسؤال في مادة الفيزياء بهذا الترتيب هو $\frac{80}{6840}$ ويساوي $\frac{2}{171}$.

2. عدد طرائق سحب سؤالين في مادة الرياضيات وسؤال في مادة الفيزياء هو $(5\times4\times4)\times3$ ويساوي 240 (ذلك لأنّ سؤال مادة الفيزياء يمكن أن يكون الأول أو الثاني أو الثالث).

وبالتالي احتمال أن يمتحن المترشح في سؤالين في مادة الرياضيات وسؤال في مادة الفيزياء هو $\frac{240}{6840}$ ويساوي $\frac{2}{57}$.

3. يمكن أن يسحب المترشح سؤالا، أو سؤالين، أو ثلاثة أسئلة في مادة الأدب العربي، وعدد طرائق سحب:

- سؤال في مادة الأدب العربي هو $(3\times17\times16)\times3$
- سؤالين في مادة الأدب العربي هو $(3\times2\times17)\times3$
- ثلاثة أسئلة في مادة الأدب العربي هو $(3\times2\times1)$

ومنه فعدد طرائق سحب سؤال على الأقل في مادة الأدب العربي هو $(3\times2\times1)+(3\times2\times17)\times3+(3\times17\times16)\times3$ ويساوي 2760.

وبالتالي احتمال أن يمتحن المترشح في سؤال على الأقل في مادة الأدب العربي هو $\frac{2760}{6840}$ ويساوي $\frac{23}{57}$.

4. عدد طرائق سحب الأسئلة الثلاثة في مواد علمية هو $(15\times14\times13)$ ويساوي 2730.

وبالتالي احتمال أن يمتحن المترشح في مواد علمية هو $\frac{2730}{6840}$ ويساوي $\frac{91}{228}$.

II. بما أن السحب على التوالي وبالإرجاع، فالترتيب مهم، والتكرار مسموح، ومنه فإنّ عدد كل الطرائق الممكنة هو $20\times20\times20$ ويساوي 8000.

1. عدد طرائق سحب الأسئلة الثلاثة في مادة الاجتماعيات هو $(2\times2\times2)$ ويساوي 8.

وبالتالي احتمال أن يمتحن المترشح في مادة الاجتماعيات هو $\frac{8}{8000}$ ويساوي $\frac{1}{1000}$.

2. لكي يمتحن المترشح في 3أسئلة من نفس المادة، يلزم أن تكون الأسئلة الثلاثة المسحوبة وإمّا في مادة العلوم الطبيعية، وإمّا في مادة الرياضيات، وإمّا في مادة الفيزياء، وإمّا في مادة الأدب العربي، وعدد طرائق سحب:

- الأسئلة في مادة العلوم الطبيعية هو $(6\times6\times6)$
- الأسئلة في مادة الرياضيات هو $(5\times5\times5)$
- الأسئلة في مادة الفيزياء هو $(4\times4\times4)$
- الأسئلة في مادة الأدب العربي هو $(3\times3\times3)$

ومنه عدد طرائق سحب 3 أسئلة من نفس المادة هو $6^3\times5^3\times4^3\times3^3$ ويساوي 424.

وبالتالي احتمال أن يمتحن المترشح في 3 أسئلة من نفس المادة هو $\frac{424}{8000}$ ويساوي $\frac{53}{1000}$.

3. يمتحن الطالب في نفس السؤال مرتين مختلفتين عندما يسحب نفس السؤال في الأولى والثانية، أو الأولى والثالثة، أو الثانية والثالثة، وللتوضيح نرمز بـ B للسؤال الذي يمتحن فيه المترشح مرتين مختلفتين، وبالرمز M للسؤال الثالث، لدينا الوضعيات الممكنة الآتية:

- B B M وعدد طرائق السحب هو $(20\times1\times19)$
- B D B وعدد طرائق السحب هو $(20\times19\times1)$
- D B B وعدد طرائق السحب هو $(20\times19\times1)$

ومنه عدد طرائق سحب نفس السؤال مرتين مختلفتين هو $3\times(20\times19\times1)$ ويساوي 1140.

وبالتالي احتمال أن يمتحن المترشح في نفس السؤال مرتين مختلفتين هو $\frac{1140}{8000}$ ويساوي $\frac{57}{400}$.

4. عدد طرائق سحب نفس السؤال ثلاث مرات هو $(20\times1\times1)$ويساوي 20.

وبالتالي احتمال أن يمتحن المترشح في نفس السؤال ثلاث مرات هو $\frac{20}{8000}$ ويساوي $\frac{1}{400}$.

IV. ملخص:

- **تجربة عشوائية**

القول عن تجربة إنّها عشوائية يعني عدم تمكننا أن نجزم بصفة قطعية نتيجتها قبل إنجازها.

- **عيِّنة (تجربة)**

نسمي عيِّنة (لتجربة) مقاسها n، كل سلسلة مشكّلة من النتائج المتحصل عليها عند تكرار هذه التجربة n مرة وفي نفس الظروف.

- **محاكاة تجربة عشوائية**

نقول أنّنا قمنا بمحاكاة تجربة عشوائية، عندما نختار نموذجا لها وسندا ماديا نحققها باستعماله.

- **تذبذب عيِّنة**

كلّما كبر مقاس العيِّنة كلّما قلَّ الفرق بين تواترات نتائج هذه العينة، نقول عندئذ أنّ العيّنة مستقرّة، أو أنّ تذبذبها بسيط.

- **قانون احتمال لتجربة عشوائية**

لتعريف قانون احتمال تجربة عشوائية نتبع ما يأتي:

- ✓ حساب كل النتائج المختلفة التي يمكن الحصول عليها.
- ✓ حساب عدد الطرائق الكلية الممكنة لإنجاز تجربة.
- ✓ حساب احتمال كل نتيجة.

في حالة تجربة لنتائجها نفس حظوظ الظهور، نطبق قاعدة نسبة عدد طرائق الحصول على النتيجة أو النتائج المواتية إلى عدد طرائق الحصول على النتائج الكلية.

- ✓ تنظيم النتائج المتحصل عليها في جدول، حيث x_i : قيم نتائج التجربة، و P_i : احتمال النتيجة x_i الموافقة.

x_i					
p_i					

- **المتغير عشوائي المرتبط بتجربة عشوائية.**

يمكن أن نرفق نتائج تجربة عشوائية بمتغيّر عادة ما يكون عدديا، ويأخذ أحد الرموز X أو Y أو Z ... ويُسمّى متغيرا عشوائيا، وعندئذ يُسمَّي قانون الاحتمال للتجربة العشوائية بقانون الاحتمال للمتغير العشوائي X أو Y أو Z ...

- **في تجارب سحب ما نميِّز بين ثلاث حالات**

1. **السحب المتزامن (في آن واحد)** وفي هذه الحالة الترتيب غير مهم والتكرار غير مسموح.

2. **السحب على التوالي دون إرجاع** وفي هذه الحالة الترتيب مهم والتكرار غير مسموح .

3. **السحب على التوالي مع الإرجاع** وفي هذه الحالة الترتيب مهم والتكرار مسموح.

- **الأمل الرياضياتي والتباين لقانون احتمال**

✓ الأمل الرياضياتي لقانون احتمال هو المعدل μ حيث

$$\mu = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$$

✓ التباين لقانون احتمال هو العدد V حيث $V = \sum_{i=1}^{n} P_i \left(x_i - \mu \right)^2$

✓ الانحراف المعياري هو العدد $\sigma = \sqrt{V}$

✓ يمكن حساب V بالدستور $V = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 - \mu^2$

✓ عند إضافة عدد ثابت a إلى كل القيم x_i يضاف a إلى الأمل الرياضياتي.

V. توظيف المعارف:

أ. تمارين

1. في كل حالة مما يأتي أكمل قانون الاحتمال واحسب الأمل الرياضياتي والتباين دون استعمال آلة حاسبة.

• الحالة الأولى

x_i	-5	0	2	7
p_i	0,3		0,2	0,3

• الحالة الثانية

x_i	10	30	40	80	100
p_i	0,5	0,2	0,15	0,1	

• الحالة الثالثة

x_i	-6	-2	0	1	2	10
p_i		0,2	0,4	0,1	0,1	0,05

2. نرمي حجر نرد متوازن يحمل الأرقام من 1 الى 6 ، ونسحب كرة من كيس به أربع كرات غير متمايزة في تحمل الأرقام من 1 الى 4 ، ونحسب جداء العددين الناتجين. عرّف قانون الاحتمال لرقم آحاد جداء الرقمين الناتجين واحسب أمله الرياضياتي.

3. يحتوي كيس على 10 قريصات غير متمايزة عند اللمس، ومرقمة من 0 الى 9 ، منها 3 بيضاء والباقي سوداء.

1. نسحب من الكيس قريصة واحدة، ما احتمال الحصول على:

أ) قريصة تحمل رقما فرديا ؟ ب) قريصة بيضاء ؟

2. نسحب الآن من الكيس قريصتين على التوالي دون إرجاع.

أ) ما احتمال الحصول على رقمين فرديين ؟

ب) ما احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون ؟

ج) نعتبر X عدد القريصات البيضاء المسحوبة، عرّف قانون احتمال X واحسب أمله الرياضياتي.

4. نرمي قطعة نقود ثلاث مرات متتابعة.

1. كوّن شجرة النتائج المناسبة.
2. ما هي مجموعة كل النتائج المختلفة الممكنة.
3. ما احتمال أن يظهر في الرمية الثالثة وجه ؟
4. نعتبر X عدد الوجوه المحصل عليها في الرميات الثلاث، عرّف قانون احتمال X واحسب أمله الرياضياتي.

5. نرمي حجر نرد متوازن أوجهه تحمل الأعداد من 1 إلى 6 مرتين متتابعتين، ما احتمال الحصول على:

1. العدد نفسه في الرميتين ؟
2. عددين مجموعهما 7 ؟
3. عددين جداؤهما فردي ؟
4. ليكن X عدد الأعداد الفردية الظاهرة في الرميتن، و Y باقي قسمة جداء العددين الظاهرين على 4.

عرّف قانون الاحتمال لكل من X و Y واحسب التباين لكل منهما.

6. نضع بين يدي طفل ثلاثة أقلام تلوين أخضر وأحمر وأصفر، ونطلب منه تلوين الأوجه الستة لعلبة مكعبة الشكل، على أن يلوّن كل وجه بلون واحد.

1. بكم طريقة يمكنه إنجاز المهمة ؟

2. ما احتمال الحصول على مكعب ملوّن باللّونبن الأحمر والأخضر ؟

7. في لعبة حظ يرمي اللاعب حجري نرد متوازنين كل منهما مرقّم من 1 إلى 6، فإذا كان مجموع الرقمين الظاهرين 7 ، يربح 60 DA فيما عدى ذلك لا يربح شيئا.

كم يجب على اللاعب أن يدفع في البداية حتى تكون اللعبة عادلة ؟ (أي أملها الرياضياتي معدوم)

8. يتكون قسم مختلط من 30 تلميذا من بينهم 18 تلميذة والباقي ذكور. يراد تشكيل لجنة لهذا القسم تضم رئيسا ونائبا وأمينا.

1. ما هو عدد الطرائق الممكنة لتشكيل هذه اللجنة ؟

2. ما احتمال تشكيل لجنة بحيث:

أ) يكون الأمين تلميذة ؟

ب) التلميذ "زيد" موجودا في اللجنة ؟

ج) يكون الرئيس تلميذا والأمين تلميذة ؟

د) الرئيس ونائبه من جنسين مختلفين ؟

3. نفرض أن الرئيس تلميذ والأمين تلميذة، وأن التلميذ "زيد" يرفض الإنضمام الى لجنة تضم التلميذة "أميرة".

- ما هو عدد الطرائق الممكنة لتشكيل اللجنة في هذه الظروف ؟

9. يحتوي كيس على 20 كرة مرقمة من 1 الى 20 غير متمايزة عند اللمس.

1. نسحب كرة من الكيس، ما هو احتمال الحصول علىكرة تحمل عددا:

أ) مضاعفا للعدد 4 ؟ ب) ليس من مضاعفات 5 ؟

2. نسحب في هذه المرة كرتين على التوالي دون ارجاع، ما هو احتمال الحصول على كرتين:

أ) تحملان عددين مضاعفين للعدد 4 ؟

ب) إحداهما تحمل عددا مضاعفا للعدد 3 والثانية تحمل عددا مضاعفا للعدد 4 ؟

3. نسحب الآن 3 كرات على التوالي دون ارجاع وليكن X عدد مضاعفات الرقم 4 في الكرات المسحوبة. عرِّف قانون احتمال X واحسب تباينه.

10. نرمي حجر نرد يحمل الأرقام من 1 الى 6 رمية واحدة، ونعرِّف متغيريا عشوائيا X كما يأتي:

- $X=-10$ عند ظهور الرّقم 1
- $X=10$ عند ظهور الرّقم 6
- $X=0$ في الحالات الأخرى.

1. إذا كان حجر النرد عاديا ومتوازنا، عرّف قانون الاحتمال متغيريا عشوائيا X .

2. نفرض الآن أنّ حجر النرد غير متوازن بحيث احتمال ظهور كلٍّ من الأوجه 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 هو 0,12.

عرّف قانون احتمال X في هذه الحالة.

11. نعتبر قانون احتمال متغير عشوائي X معرف كما يأتي:

x_i	-1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	α

1. عيّن قيمة العدد الحقيقي α

2. احسب كلا من $P(X \geq 2)$ و $P(X \geq \frac{5}{2})$ و $P(X < 1)$

12. يحوي كيس 10 كريات غير متمايزة في اللمس، 5 منها تحمل الرّقم 10 والأخرى تحمل الرّقم 15.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين، وليكن المتغير العشوائي X العدد الذي يمثل مجموع الرقمين المحصل عليهما.

1. ما هو عدد الطرائق الكلية الممكنة.
2. عيّن مجموعة القيم الممكنة للعدد X.
3. عرّف قانون احتمال X.
4. احسب الامل الرياضياتي.
5. احسب التباين.
6. جِدْ $P(X \geq 25)$.

13. يضم كيس 7 قريصات متماثلة وغير متمايزة في اللمس. واحدة حمراء، إثنتان صفراوين، وأربع خضراء. تقتضي لعبة حظ سحب

قريصة واحدة من الصندوق:

- فإذا كانت حمراء يربح اللاعب 10 DA
- وإذا كانت صفراء يخسر اللاعب 5 DA

• أما إذا كانت خضراء يعيد اللاعب سحب قريصة أخرى دون إرجاع الاولى الى الكيس، فإذا كانت الثانية حمراء يربح اللاعب 8 DA وإلاّ فإنّه يخسر 4 DA.

نهتم بالرِّبح الجبري (ربح أم خسارة) في نهاية اللعبة. لتكن Ω مجموعة الأرباح الممكنة.

أ) انشئ الشجرة المناسبة.

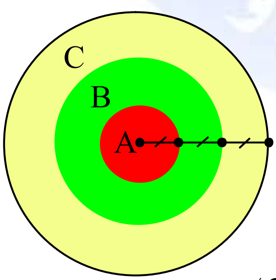
ب) احسب احتمال الحادثة G " اللاعب رابح "

ج) عرّف قانون احتمال المجموعة Ω وأحسب الامل الرياضياتي.

14. حجر نرد مزيَّف يحمل الأرقام من 1 الى 6 بحيث عند رميه مرّة واحدة فإنّ p_i احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم i حيث $1 \leq i \leq 6$ يحقق ما يأتي:

$p_1 = p_2 = p_3$ و $p_4 = p_5 = p_6 = 2p_1$ اوجد قانون الاحتمال المرفق بهذا الحجر.

15. رامي قوس يصيب الدارئة دوما، لكن إحتمال إصابة أية منطقة من المناطق A أو B أو C هو نسبة مساحتها إلى مساحة الدائرة ككل.



وليكن X العلامة التي يحصل عليها الرامي معرّفة كما يأتي:

• $X=10$ عند إصابته المنطقة A

- $X=5$ عند إصابته المنطقة B
- $X=1$ عند إصابته المنطقة C

1. تحقق من أن نسب مساحات المناطق A أو B أو C إلى مساحة الدارئة ككل هي $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{9}$ على الترتيب.
2. عرّف قانون احتمال X.
3. أحسب الأمل الرياضياتي والإنحراف المعياري.

16. في امتحان مادة الرياضيات المؤلف من ثلاثة أجزاء:

- جزء الدوال وفيه تمرينان: f_1 و f_2 .
- جزء الاحتمالات وفيه ثلاثة تمارين: P_1 و P_2 و P_3.
- جزء المتتاليات وفيه تمرينان: S_1 و S_2.

طُلب من التلميذ "زيد" أن يجب على تمرين من كل جزء على الخيار.

1. كوّن شجرة الخيارات الممكنة للتلميذ "زيد".
2. احسب احتمال أن:

أ) يختار f_1 و P_1 و S_1

ب) يختار f_1 و S_1

ج) لا يختار f_2 ولا P_3

3. التلميذ "زيد" يعرف أجوبة التمارين الأولى من كل جزء وهذه فقط.

أ) احسب احتمال أن يأخذ هذا التلميذ العلامة الكاملة.

ب) احسب احتمال أن لا يجيب هذا التلميذ على أي جزء.

17. نسيت أميرة شفرة هاتفها النقال، لكنها تذْكر أنّها مؤلفة من أربعة أرقام (مثل: 7 1 1 3) وأنها لم تستعمل إلاّ الأرقام 1 ; 3 ; 5 ; 7 .

1. ما هو عدد الشفرات الممكن تشكيلها باستعمال الأرقام 1 ; 3 ; 5 ; 7 ؟

2. تكتب أميرة شفرة عشوائيا، ما احتمال أن تفتح هاتفها ؟

3. تستعين أميرة بأخيها بعد أن تخبره بأنها استعملت أربعة أرقام دون ذكر هذه الأرقام، يحاول الأخ بكتابة أربعة أرقام عشوائيا، ما احتمال أن يفتح الهاتف ؟

18. صندوق يحتوي على 7 كرات بيضاء و3 كرات سوداء وكل الكرات متماثلة وغير متمايزة في اللمس.

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق ونسجل لونها، ثمّ نعيدها الى الصندوق ونسحب منه كرة أخرى ونسجل لونها أيضا، وننهي التجربة.

1. ما احتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

2. ما احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون ؟

3. نعرف لعبة حظ كما يأتي: تمنح لكل كرة بيضاء العلامة $+\alpha$ و لكل كرة سوداء العلامة $-\alpha$.

أ) عرف قانون الاحتمال للعلامة النهائية X .

ب) احسب الأمل الرياضياتي لقانون الاحتمال.

ج) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون الأمل الرياضياتي مساويا 1.

4. نضيف الى الصندوق $n-3$ كرة سوداء ونعيد عملية السحب المعرّفة أعلاه.

أ) ما إحتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

ب) ما هو عدد الكرات السوداء التي ينبغي إضافتها الى الصندوق حتى يكون احتمال سحب كرتين بيضاوين هو 0,25 ؟

ب. حلول للتمارين

1. تعلم أنّه في قانون الاحتمال لدينا $p_i \geq 0$ و $\sum p_i = 1$

الأمل الرياضياتي μ يحسب من الدستور $\mu = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$

التباين V يحسب من الدستور $V = \sum_{i=1}^{n} P_i (x_i - \mu)^2$

- الحالة الأولى: $p(X=0) = 1-(0,3+0,2+0,3) = 0,2$

الأمل الرياضياتي $\mu = 1$

التباين $V = 22$

- الحالة الثانية: $p(X=100) = 1-(0,5+0,2+0,15+0,1) = 0,05$

الأمل الرياضياتي $\mu = 30$

التباين $V = 710$

- الحالة الثالثة: $p(X=-6) = 1-(0,2+0,4+0,1+0,1+0,05) = 0,15$

الأمل الرياضياتي $\mu = -0,5$

التباين $V = 11,45$

2. يمثل الجدول المرفق عدد الطرائق الممكنة لإجراء التجربة، وكذا كل النتائج الممكنة، ومنه:

ر ح ن / س ح ك	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4

ر ح ن: رمي حجر النرد. **سح ك:** سحب كرية

مجموعة النتائج الممكنة $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9\}$

وعدد الطرائق الكلية الممكنة هو 24

ومنه قانون الاحتمال

x_i	0	1	2	3	4	5	6	8	9
p_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$

الأمل الرياضياتي $\mu = 4,17$

التباين $V = 6,39$

3. 1.بما أنّنا نسحب من الكيس قريصة واحدة، فعدد الطرائق الكلية الممكنة هو 10، ومنه:

أ) احتمال الحصول على قريصة تحمل رقما فرديا هو $\frac{1}{2}$ لأنّه توجد 5 قريصات تحمل رقما فرديا.

ب) احتمال الحصول على قريصة بيضاء هو $\frac{3}{10}$ لأنّه توجد 3 قريصات بيضاء.

2.في هذه الحالة نسحب من الكيس قريصتين على التوالي دون إرجاع، فيكون عدد الطرائق الكلية الممكنة هو 10×9 ويساوي 90 ومنه:

أ) احتمال الحصول على رقمين فرديين هو $\frac{5 \times 4}{90}$ ويساوي $\frac{2}{9}$.

ب) احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون هو $\dfrac{3\times2 \ + \ 7\times6}{90}$

ويساوي $\dfrac{8}{15}$.

ذلك لأنّ القريصتين المسحوبتين إما أن تكونا بيضاوين، وعدد طرائق سحبها هو 3×2، وإما أن تكونا سوداوين، وعدد طرائق سحبها هو 7×6 فيكون عدد طرائق سحب قريصتين من نفس اللون هو $3\times2+7\times6$.

ج) بما أنّ X هو عدد القريصات البيضاء المسحوبة فإنّ:

- مجموعة القيم الممكنة لـِ X هي $\Omega = \{ 0 ; 1 ; 2 \}$

- في حالة $X=0$ أي حالة حسب قريصتين سوداوين.

لدينا: $p(X=0) = \dfrac{7\times6}{90} = \dfrac{7}{15}$

- في حالة $X=1$ أي حالة حسب قريصة واحدة بيضاء وقد تكون الأولى أو الثانية، ومنه $p(X=1) = \dfrac{2\times(3\times7)}{90} = \dfrac{7}{15}$

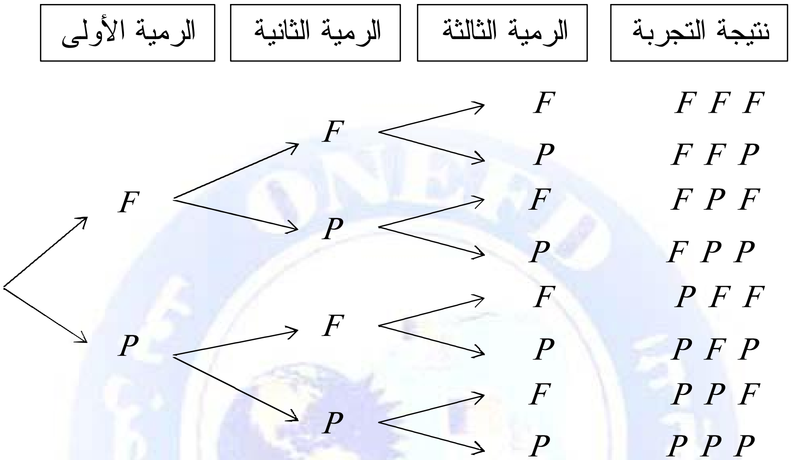
- في حالة $X=2$ أي حالة حسب قريصتين بيضاوين، ومنه $p(X=0) = \dfrac{3\times2}{90} = \dfrac{1}{15}$

ومنه نجد قانون احتمال X

x_i	0	1	2
p_i	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{7}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

الأمل الرياضياتي $\mu = 0,6$

4. 1. شجرة النتائج:



2. مجموعة كل النتائج المختلفة الممكنة هي:

$\Omega = \{FFF; FFP; FPF; FPP; PPP; PPF; PFP; PFF\}$

3. احتمال أن يظهر وجه في الرمية الثالثة هو $\frac{4}{8}$، ويساوي $0,5$

4. قانون احتمال X

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

الأمل الرياضياتي $\mu = 1,5$

5. عدد الطرائق الكلية الممكنة يساوي 36.

1. احتمال الحصول على العدد نفسه في الرميتين هو $\frac{6}{36}$ ويساوي $\frac{1}{6}$.

2. لدينا $7=1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1$ أي هناك 6 طرائق للحصول على عددين مجموعهما 7.

ومنه احتمال الحصول على عددين مجموعهما 7 هو $\frac{6}{36}$ ويساوي $\frac{1}{6}$.

3. نحصل على عددين جداؤهما فردي عندما يكون ناتج الرميتين عددين فرديين، وعدد الطرائق الممكنة هو 9، ومنه احتمال الحصول على عددين جداؤهما فردي هو $\frac{9}{36}$ ويساوي $\frac{1}{4}$.

4. لدينا مجموعة القيم الممكنة لـِ X هي $\Omega_X=\{0\,;1\,;2\}$

مجموعة القيم الممكنة لـِ Y هي $\Omega_Y=\{0\,;1\,;2\,;3\}$

ومنه قانون احتمال X

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

الأمل الرياضياتي $\mu_X=1$

التباين $V_X=0,5$

• بالنسبة إلى Y يمكن الاستفادة من الجدولين الآتيين:

$\times$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

ومنه

باقي قسمة جداء العددين على 4						
	1	2	3	0	1	2
	2	0	2	0	2	0
	3	2	1	0	3	2
	0	0	0	0	0	0
	1	2	3	0	1	2
	2	0	2	0	2	0

ومنه قانون احتمال Y

y_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

الأمل الرياضياتي $\mu_Y = 1{,}12$

التباين $V_Y = 0{,}79$

6. 1. عدد الطرائق الممكنة لإنجاز المهمة:

الوجه الأول يمكن أن يلوّنه بِـ 3 طرائق (أخضر أو أحمر أو أصفر)

والوجه الثاني يمكن أن يلوّنه بِـ 3 طرائق، ... وهكذا حتى الوجه السادس.

ومنه عدد الطرائق الممكنة هو 3^6 ويساوي 729.

2. عدد الطرائق المواتية للحصول على مكعب ملوّن باللّونين الأحمر والأخضر، يساوي عدد الطرائق المواتية للحصول على مكعب ملوّن بلونين (أحمر وأخضر) منقوصا منه عدد الطرائق المواتية للحصول

على مكعب ملوّن باللّون الأحمر فقط أو الملوّن باللّون الأخضر فقط،
أي $2^6 - 2$ ويساوي 62 .

ومنه احتمال الحصول على مكعب ملوّن باللّونبن الأحمر والأخضر هو $\frac{62}{729}$ ويساوي 0,085 .

7. إرشاد لحل التمرين: يمكنك حساب الأمل الرياضياتي لقانون إحتمال القيم: 60 مقابل القيمة 7 و 0 مقابل بقية قيم مجموع الرقيمن الظاهرين، ثم تطبيق خاصية الأمل الرياضياتي.

8. 1. في هذه الحالة الترتيب مهم والتكرار غير ممكن، وبالتالي عدد الطرائق الممكنة لاختيار الرئيس هو 30، وفي كل منها عدد الطرائق الممكنة لاختيار النائب هو 29، وفي كل منها عدد الطرائق الممكنة لاختيار الأمين هو 28.

ومنه عدد الطرائق الممكنة لتشكيل هذه اللجنة $28 \times 29 \times 30$ ويساوي 24360 .

2.

أ) أمينة اللجنة يمكن اختيارها بـِ 18 طريقة، ومنه عدد طرائق تشكيل لجنة يكون الأمين فيها تلميذة هو $28 \times 29 \times 18$ ويساوي 14616.

وبالتالي احتمال تشكيل لجنة أمينتها تلميذة هو $\frac{14616}{24360}$ ويساوي 0,6 .

بـ) يمكن للتلميذ "زيد" أن يشغل أحد المناصب الثلاثة، ومنه عدد طرائق تشكيل لجنة يوجد فيها التلميذ "زيد" هو $28 \times 29 \times 3$ ويساوي 2436 .

وبالتالي احتمال تشكيل لجنة فيها التلميذ "زيد" هو $\frac{2436}{24360}$ ويساوي 0,1 .

ج) عدد طرائق تشكيل لجنة يرأسها تلميذ وأمينتها تلميذة هو $28 \times 18 \times 12$ ويساوي 6048.

وبالتالي احتمال تشكيل لجنة يرأسها تلميذ وأمينتها تلميذة هو $\frac{6048}{24360}$ ويساوي $\frac{36}{145}$.

د) إما أن يكون الرئيس تلميذة وبالتالي النائب تلميذ، وعدد الطرائق الممكنة هو $28 \times 12 \times 18$ ويساوي 6048، وإما أن يكون الرئيس تلميذا وبالتالي النائب تلميذة، وعدد الطرائق الممكنة هو $28 \times 18 \times 12$ ويساوي 6048.

وبالتالي احتمال تشكيل لجنة فيها الرئيس ونائبه من جنسين مختلفين هو $\frac{12096}{24360}$ ويساوي $\frac{72}{145}$.

3. بفرض أنّ الرئيس تلميذ والأمين تلميذة، وأن التلميذ "زيد" يرفض الإنضمام الى لجنة تضم التلميذة "أميرة"، لدينا حالتان:

- الأولى:

أ) اللجنة تضم التلميذة "أميرة" في منصب أمينة، وعندئذ الرئيس يختار بـِ 11 طريقة لأنّ "زيد" يرفض المشاركة، والنائب يختار بـِ 27 طريقة، ومنه عدد الطرائق هو $27 \times 11 \times 1$ ويساوي 297.

ب) اللجنة تضم التلميذة "أميرة" في منصب نائبة، وعندئذ الرئيس يختار بـِ 11 طريقة لأنّ "زيد" يرفض المشاركة، والأمينة تختار بـِ 17 طريقة، ومنه عدد الطرائق هو $17 \times 11 \times 1$ ويساوي 187.

- الثانية:

اللجنة لا تضم التلميذة "أميرة"، فعندئذ الرئيس يختار بـِ 12 طريقة لأنّ "زيد" يمكنه المشاركة، والأمينة تختار بـِ 17 طريقة، والنائب يختار بـِ 27 طريقة، ومنه عدد الطرائق هو $27 \times 17 \times 12$ ويساوي 5508.

عدد الطرائق الممكنة لتشكيل اللجنة في الظروف الواردة في الجزء (3.) هو $5508 + 187 + 297$ ويساوي 5992.

9. 1. عند سحب كرة من الكيس عدد الطرائق الممكنة هو 20.

أ) احتمال الحصول على كرة تحمل عددا مضاعفا للعدد 4 هو $\frac{5}{20}$ ويساوي $0,25$.

ب) احتمال الحصول على كرة تحمل عددا ليس من مضاعفات 5 هو $\frac{16}{20}$ ويساوي $0,8$.

2. عند سحب كرتين على التوالي دون ارجاع فإنّ عدد الطرائق الكلية الممكنة هو 19×20 ويساوي 380.

أ) احتمال الحصول على كرتين تحملان عددين مضاعفين للعدد 4 هو $\frac{5 \times 4}{380}$ ويساوي $\frac{1}{19}$.

ب) احتمال الحصول على كرتين إحداهما تحمل عددا مضاعفا للعدد 3 والثانية تحمل عددا مضاعفا للعدد 4 هو $\frac{6 \times 5}{380}$ ويساوي $\frac{3}{38}$.

3. عند سحب 3 كرات على التوالي دون ارجاع، فإنّ عدد الطرائق الكلية الممكنة هو $18 \times 19 \times 20$ ويساوي 6840.

مجموعة القيم الممكنة لـِ X هي $\Omega_X = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

ومنه قانون احتمال X

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{91}{228}$	$\frac{35}{76}$	$\frac{5}{38}$	$\frac{1}{114}$

• توضيح كيفية حساب عدد الطرائق الممكنة بالنسبة إلى حالة $X=2$ من بين الكرات الثلاث المسحوبة كرتين تحملان عددين مضاعفين للعدد 4، وتسحبان بـِ 4×5 طريقة، والكرة الثالثة تسحب بـِ 15 طريقة، ويمكنها أن تكون الأولى أو الثانية أو الثالثة، ومنه عدد الطرائق الممكنة في هذه الحالة هو $4\times5\times15\times3$ ويساوي 900.

الأمل الرياضياتي $\mu_X = 0,75$

التباين $V_X = 0,46$

10. 1. لما كان حجر النرد متوازن فإنّ احتمال ظهور أي وجه هو $\frac{1}{6}$ ومنه فإنّ قانون احتمال X هو

x_i	-10	0	10
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. في هذه الحالة حجر النرد غير متوازن، واحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم 6 لا يساوي احتمال ظهور بقية الوجوه، فهو يحسب كما يأتي: $p(6)=1-5\times0,12 = 0,4$

ومنه قانون احتمال X

x_i	-10	0	10
p_i	0,12	0,48	0,4

11. إرشاد لحل التمرين

1. تذكر أن $\sum p_i = 1$

2. إنّ $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

و $P(X \geq \frac{5}{2}) = P(X=3) + P(X=4)$

و $P(X < 1) = P(X=-1)$

12. 1. بما أن سحب الكريتين هو في آن واحد، فإنّ الترتيب غير مهم، والتكرار غير ممكن، ومنه عدد الطرائق الكلية الممكنة هو $\frac{10 \times 9}{2}$ ويساوي 45.

2. مجموعة القيم الممكنة للعدد X هي $\Omega_X = \{20 ; 25 ; 30\}$

3. قانون احتمال X

x_i	20	25	30
p_i	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

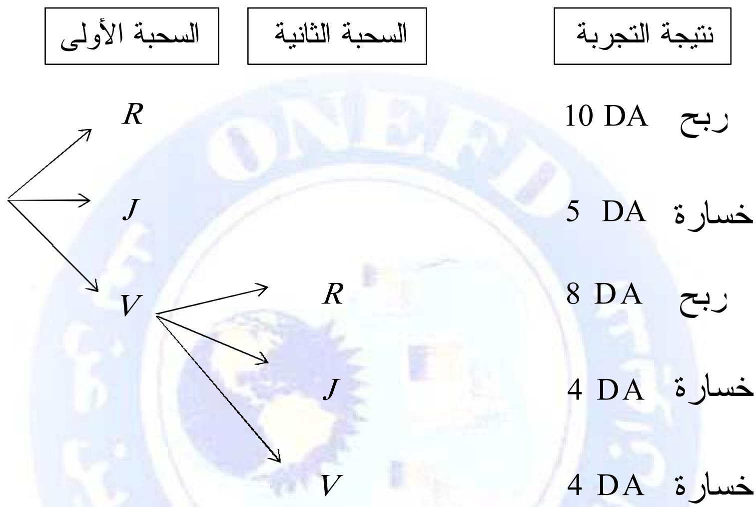
4. الامل الرياضياتي $\mu = 25$

5. احسب التباين $V = 11{,}111$

6. $P(X \geq 25) = P(X=25) + P(X=30)$

$$= \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

13. 1. أ) الشجرة المناسبة (نرمز لألوان القريصات بِـ R للأحمر و J للأصفر و V للأخضر).



ب) عدد الطرائق الكلية الممكنة لإجراء اللعبة هو $6\times4+3$ ويساوي 27.
(أي 3 عندما نسحب قريصة حمراء أو صفراء، و 6×4 عندما نسحب قريصة خضراء أولا)

يربح اللاعب في حالة سحبه قريصة حمراء أو قريصة خضراء متبوعة بقريصة حمراء، ومنه فعدد طرائق السحب بحيث يكون اللاعب رابحا هو $1\times4+1$ ويساوي 5.

واحتمال الحادثة G " اللاعب رابح " هو $\frac{5}{27}$

ج) قانون احتمال المجموعة Ω حيث $\Omega=\{-4\,;-5\,;8\,;10\}$

x_i	-4	-5	8	10
p_i	$\frac{20}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{27}$

4. الامل الرياضياتي $\mu = -1,78$

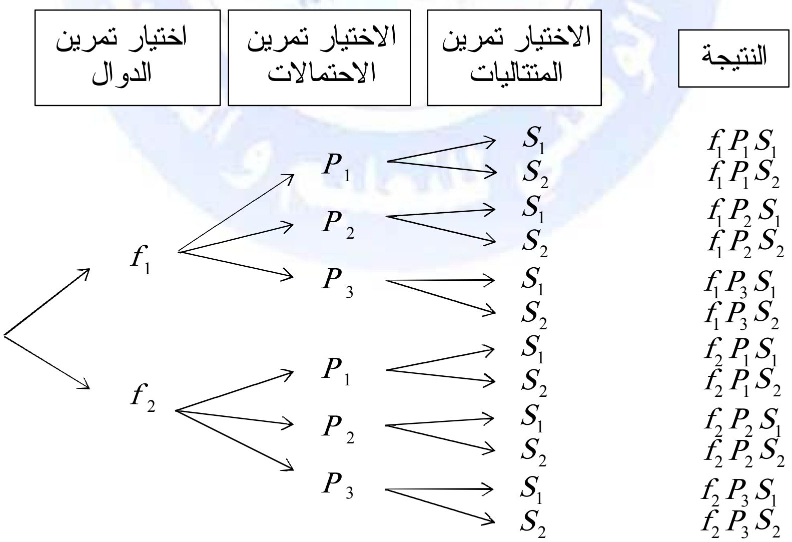
14. إرشاد لحل التمرين

يمكن الاستفادة من أنّ $\sum p_i = 1$

15. إرشاد لحل التمرين

بفرض مساحة الحيّز A هي πr^2 فتكون مساحة الحيز B هي $3\pi r^2$ ومساحة الحيز C هي $5\pi r^2$، ومساحة الدائرة هي $9\pi r^2$.

16. 1. شجرة الخيارات الممكنة للتلميذ "زيد".



2. احتمال أن:

أ) يختار f_1 و P_1 و S_1 هو $\frac{1}{12}$.

ب) يختار f_1 و S_1 هو $\frac{3}{12}$ ويساوي $0,25$.

ج) لا يختار f_2 ولا P_3 هو $\frac{4}{12}$ ويساوي $\frac{1}{3}$.

3. بما أنّ التلميذ "زيد" يعرف أجوبة التمارين الأولى f_1 و P_1 و S_1 من كل جزء وهذه فقط، ومنه:

أ) احتمال أن يأخذ العلامة الكاملة هو احتمال إجابته عن الأسئلة f_1 و P_1 و S_1 وهو $\frac{1}{12}$.

ب) احتمال أن لا يجيب هذا التلميذ على أي جزء هو $\frac{1}{6}$.

17. 1. عدد الشفرات الممكن تشكيلها باستعمال الأرقام $1\,;3\,;5\,;7$ هو $4\times4\times4\times4$ ويساوي 256 (لأنّ تكرار الرقم مسموح).

2. احتمال أن تفتح أميرة هاتفها عندما تكتب شفرة عشوائيا هو $\frac{1}{256}$.

3. بما أنّ أخ أميرة لا يعرف الأرقام الأربعة المستعملة في الشفرة فإنّه سيحاول باستعمل الأرقام العشرة $0\,;1\,;\cdots\,;9$، واحتمال أن يفتح الهاتف عندما يكتب شفرة عشوائيا هو $\frac{1}{10\,000}$.

18. بما أنّ السحب هو على التوالي وبالإرجاع فإنّ عدد الطرائق الكلية الممكنة للسحب هو 100.

1. احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو $\frac{49}{100}$.

2. احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون هو $\frac{58}{100}$.

3. بمنح لكل كرة بيضاء العلامة $+\alpha$ و لكل كرة سوداء العلامة $-\alpha$.

أ) قانون الاحتمال للعلامة النهائية X هو:

x_i	-2α	0	$+2\alpha$
p_i	$\frac{9}{100}$	$\frac{42}{100}$	$\frac{49}{100}$

ب) الأمل الرياضياتي لقانون الاحتمال

$$\mu = -2\alpha \times \frac{9}{100} + 2\alpha \times \frac{49}{100} = \frac{4}{5}\alpha .$$

ج) يكون الأمل الرياضياتي مساويا 1 من أجل $\alpha = \frac{5}{4}$.

4. أصبح في الصندوق n كرة سوداء و 7 كرات بيضاء، ومنه:

أ) إحتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو $\frac{49}{(n+7)(n+7)}$

ب) بحل المعادلة $\frac{49}{(n+7)(n+7)} = 0,25$ نجد $n = 7$ ، ومنه ينبغي إضافتها 7 كرة سوداء إلى الصندوق حتى يكون احتمال سحب كرتين بيضاوين هو 0,25.

VI. تقويم ذاتي:

أ. اختيار من متعدد

في كل من الحالات الآتية أربعة اقتراحات، واحد منها فقط صحيح عيّنه.

1) ليكن قانون الاحتمال المعرّف بالجدول:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{5}{114}$	α	$\frac{11}{19}$	$\frac{1}{114}$

أ) $\alpha = \frac{7}{19}$.　　ب) $\alpha = \frac{1}{19}$.

جـ) $\alpha = \frac{1}{114}$.　　د) $\alpha = 0$.

2) بالنسبة إلى قانون الاحتمال المعرّف في الجزء (1) الأمل الرياضياتي هو:

أ) $\mu \simeq 0,55$.　　ب) $\mu \simeq 1,55$.

جـ) $\mu \simeq 1,24$.　　د) $\mu \simeq 1,19$.

3) كيس يحتوي على 5 كريات متماثلة وغير متمايزة في اللمس مرقمّة من 1 إلى 5 ، نسحب من الكيس كريتين على التوالي دون إرجاع الكرية الأولى، ونعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل تجربة مجموع رقمي الكريتين المسحوبتين. نجد الأمل الرياضياتي للمتغير X هو:

أ) $\mu = 5,21$.　　ب) $\mu = 5$.

جـ) $\mu = -6$.　　د) $\mu = 6$.

4) عند رمي قطعة نقود مغشوشة بحيث احتمال الحصول على الوجه هو $0,45$ فإنّ احتمال الحصول على الشعار هو:

أ) $0,45$ ب) $0,40$

جـ) $0,55$ د) $0,50$

5) يتكون قسم من 25 تلميذا 15 ذكور و 20 إناث، 80 % من الذكور يحبون أكل الشكولاطة، و 60 % من الإناث يحبون أكل الشكولاطة، نختار عشوائيا تلميذا من هذا القسم. إنّ احتمال أن يكون ممن يحبون أكل الشكولاطة هو:

أ) $\frac{12}{35}$. ب) $\frac{25}{35}$.

جـ) $\frac{24}{35}$. د) $\frac{7}{10}$.

ب. صحيح أم خاطئ

في كل حالة مما يأتي خمسة نصوص، ميّز بين الصحيحة منها والخاطئة.

1)

أ) عند رمي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات متتالية، فإنّ عدد الطرائق الكلية الممكنة هو 6.

ب) عند رمي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات متتالية، فإنّ احتمال الحصول على وجهين أكبر من احتمال الحصول على وجه.

جـ) عند رمي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات متتالية، فإنّ احتمال الحصول على وجهين هو $\frac{3}{8}$.

د) عند رمي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات متتالية، فإنّ الأمل الرياضياتي لعدد الوجوه الظاهرة هو $\mu = 1,5$.

ه) عند رمي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات متتالية، فإنّ التباين لعدد الوجوه الظاهرة هو 4 .

2)

أ) عند رمي حجر نرد متوازن يحمل الأرقام $1;1;1;2;2;3$ مرّة واحدة، فإنّ عدد الطرائق الممكنة للحصول على الرقم 1 هو 3.

ب) عند رمي حجر نرد متوازن يحمل الأرقام $1;1;1;2;2;3$ مرّة واحدة، فإنّ احتمال الحصول على الرقم 1 هو $\frac{1}{3}$.

جـ) عند رمي حجر نرد متوازن يحمل الأرقام $1;1;1;2;2;3$ مرّة واحدة، فإنّ قانون الاحتمال هو:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

د) عند رمي حجر نرد متوازن يحمل الأرقام $1;1;1;2;2;3$ مرّة واحدة، فإنّ الأمل الرياضياتي هو: $\mu \simeq 1,67$

ه) عند رمي حجر نرد متوازن يحمل الأرقام $1;1;1;2;2;3$ مرّة واحدة، فإنّ التباين معدوم.

3)

أ) عدد الطرائق الممكنة لسحب 3 كريات دفعة واحدة من كيس يحتوي 5 كريات حمراء و7 كريات بيضاء متماثلة وغير متمايزة في اللمس هو 220.

ب) عدد الطرائق الممكنة لسحب 3 كريات الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع من كيس يحتوي 5 كريات حمراء و7 كريات بيضاء متماثلة وغير متمايزة في اللمس هو 220.

ج) احتمال سحب 3 كريات بيضاء الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع من كيس يحتوي 5 كريات حمراء و7 كريات بيضاء متماثلة وغير متمايزة في اللمس هو $\frac{7}{44}$.

د) احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع من كيس يحتوي 5 كريات حمراء و7 كريات بيضاء متماثلة وغير متمايزة في اللمس هو $\frac{35}{132}$.

هـ) احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين الواحدة تلو الأخرى بإرجاع الكرية الأولى قبل سحب الثانية من كيس يحتوي 5 كريات حمراء و7 كريات بيضاء متماثلة وغير متمايزة في اللمس هو $\frac{35}{144}$.

أ. أجوبة اختيار من متعدد

1) أ. 2) ب. 3) د. 4) جـ. 5) جـ.

ب. أجوبة صحيح أم خاطئ

الحالة	النصوص الصحيحة	النصوص الخاطئة
1)	جـ. د.	أ. ب. هـ.
2)	أ. جـ. د.	ب. هـ.
3)	أ. جـ. د. هـ.	ب.

VII. استعد للبكالوريا:

1. تمرين مقترح (06 نقاط)

يحتوي كيس على ثماني كريات متماثلة وغير متمايزة في اللمس، أربع منها بيضاء وتحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 ، 2 وأربع حمراء وتحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2. نسحب عشوائيا ثلاث كريات من الكيس الواحدة تلو الأخرى ودون إرجاع.

1. احسب احتمال الحصول على:

أ) ثلاث كرات من نفس اللون.

ب) ثلاث كرات تحمل نفس الرقم.

ج) ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى.

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1.

أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X.

ب) أحسب الأمل الرياضي μ والانحراف المعياري σ.

أنظر الحل وسلّم التنقيط في الصفحة الموالية

<table>
<tr><th>السلّم</th><th>حل</th></tr>
<tr><td>0,75

0,75</td><td>1. عدد الطرائق الكلية الممكنة هو $6\times7\times8$ ويساوي 336.
أ) احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون هو
$\frac{2\times(4\times3\times2)}{336}$ ويساوي $\frac{1}{7}$.</td></tr>
<tr><td>0,75</td><td>ب) احتمال الحصول على ثلاث كرات تحمل نفس الرقم هو
$\frac{(3\times2\times1)+(4\times3\times2)}{336}$ ويساوي $\frac{5}{56}$.</td></tr>
<tr><td>0,75</td><td>ج) احتمال الحصول على ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى هو $\frac{6\times(1\times3\times4)}{336}$ ويساوي $\frac{3}{14}$.</td></tr>
<tr><td>4×0,25

1</td><td>2. أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X.
• $X=0$ أو $X=3$
عدد طرائق الممكنة هو $2\times3\times4$ ويساوي 24.
• $X=1$ أو $X=2$
عدد طرائق الممكنة هو $(3\times4\times4)\times3$ ويساوي 144.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

</td></tr>
<tr><td>2×0,5</td><td>ب) أحسب الأمل الرياضي $\mu=1,5$
الانحراف المعياري $\sigma\simeq0,73$.</td></tr>
</table>

حل	السلّم

2. تمرين مقترح (08 نقاط)

حجري نرد أحدهما له أربعة أوجه حمراء كل منها يحمل الرقم 1 والوجهين الآخرين لونهما أخضر كل منهما يحمل الرقم 2، والآخر له أربعة أوجه خضراء كل منها يحمل الرقم 3 والوجهين الآخرين لونهما أحمر كل منهما يحمل الرقم 4. نرمي الحجرين معا مرّة.

1. ما احتمال الحصول على:

أ) وجهين بنفس اللون ؟

ب) وجهين بلونين مختلفين ؟

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية مجموع الرقمين الظاهرين.

أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ب) أحسب الأمل الرياضي μ والانحراف المعياري σ .

أنظر الحل وسلّم التنقيط في الصفحة الموالية.

ملاحظة: الجدول المرفق يساعد كثيرا على الحل، نجد منه عدد الطرائق الكلية الممكنة، مجموع الرقمين الظاهرين، ... إلخ.

+	1	1	1	1	2	2
3	4	4	4	4	5	5
3	4	4	4	4	5	5
3	4	4	4	4	5	5
3	4	4	4	4	5	5
4	5	5	5	5	6	6
4	5	5	5	5	6	6

1. احتمال الحصول على:

أ) وجهين بنفس اللون هو $\frac{16}{36}$ ويساوي $\frac{4}{9}$. — 1

ب) وجهين بلونين مختلفين هو $\frac{20}{36}$ ويساوي $\frac{5}{9}$. — 1

2. أ) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

- $X=4$ أو $X=5$ عدد طرائق الممكنة هو 16.
- $X=6$ عدد طرائق الممكنة هو 4 .

1

x_i	4	5	6
p_i	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

1

ب) أحسب الأمل الرياضي $\mu = 4,67$

الانحراف المعياري $\sigma \simeq 0,44$.

1