1. الدّوال كثيرات الحدود

الكفاءات المستهدفة

- إستعمال التمثيل البياني لدالة لحل معادلات .
- إستعمال التمثيل البياني لدالة لحل متراجحات.
- مناقشة معادلة بيانيا.
- تعيين نقطة الإنعطاف.

تصميم الدرس

I. الدالة التآلفية $x \mapsto \mathrm{ax} + \mathrm{b}$ حيث $b \in \mathbb{R}$ ، $a \in \mathbb{R}^*$

II. الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية $x \mapsto \mathrm{ax}^2 + \mathrm{b}x + c$

حيث $c \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ ، $a \in \mathbb{R}^*$

III. الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة: $x \to \mathrm{ax}^3 + \mathrm{b}x^2 + cx + d$

حيث $d \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ ، $a \in \mathbb{R}^*$

IV. ملخص

V. توظيف المعارف (تمارين + حلول وإرشادات)

VI. تقويم ذاتي (اختيار من متعدد + صحيح أم خاطئ)

VII. إستعد للبكالوريا (مسائل محلولة مع سلّم التنقيط)

I. الدالة التآلفية:

نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=3x-2$.

لندرس $f(x)$ من أجل قيم كبيرة للعدد $|x|$.

1) بإستعمال مجدول أنجز ورقتي الحساب الموالية:

	A	B
1	x	$f(x)$
2	10	
3	100	
4	1000	
5	10000	
6	100000	
7	1000000	
8	10000000	
9	100000000	299999998
10	1000000000	
11	1E+10	3E+10
12		
13		
14		

الجدول (1)

	A	B
1	x	$f(x)$
2	-10	
3	-100	
4	-1000	
5	-10000	
6	-100000	
7	-1000000	
8	-10000000	
9	-100000000	-300000002
10	-1000000000	
11	-1E+10	3E+10
12		
13		
14		

الجدول (2)

ماذا تلاحظ بالنسبة لقيم x و $f(x)$ في كلا الجدولين؟

2) أرسم المنحنى (Δ) الممثل للدالة f في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

حل

1) إنجاز ورقتي الحساب بإستعمال مجدول

	A	B
1	x	$f(x)$
2	10	28
3	100	298
4	1000	2998
5	10000	29998
6	100000	299998
7	1000000	2999998
8	10000000	29999998
9	100000000	299999998
10	1000000000	2999999998
11	1E+10	3E+10
12		
13		
14		

الجدول (1)

	A	B
1	x	$f(x)$
2	-10	-32
3	-100	-302
4	-1000	-3002
5	-10000	-30002
6	-100000	-300002
7	-1000000	-3000000
8	-10000000	-30000002
9	-100000000	-300000002
10	-1000000000	-3000000002
11	-1E+10	3E+10
12		
13		
14		

الجدول (2)

- بالنسبة إلى الجدول (1)

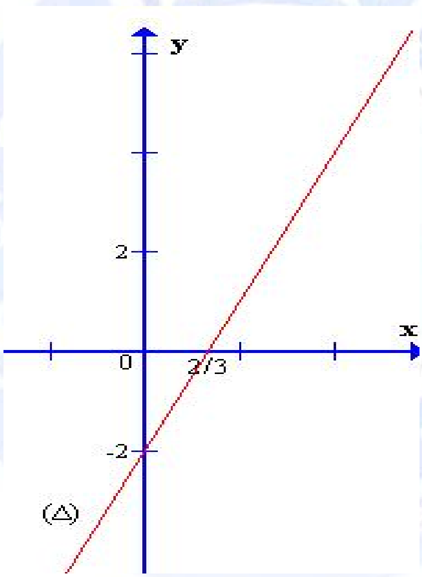
عند إستعمال برنامج إكسال تلاحظ أن $f(x)$ تأخذ قيم كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يأخذ x قيم كبيرة بالقدر الكافي .نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$ ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

• بالنسبة إلى الجدول (1)

لاحظ أن $f(x)$ يأخذ قيم صغيرة سالبة بالقدر الذي نريد بشرط أن يأخذ x قيم صغيرة سالبة بالقدر الكافي.

نعبر عن هذه الحالة أن نهاية f هي $-\infty$ لما يؤول x إلى $-\infty$ و نكتب $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2) رسم المنحنى (Δ) الممثل للدالة f



دراسة مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $f(x) = 3x - 2$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- **النهايات:** لدينا حسب النشاط الأول :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

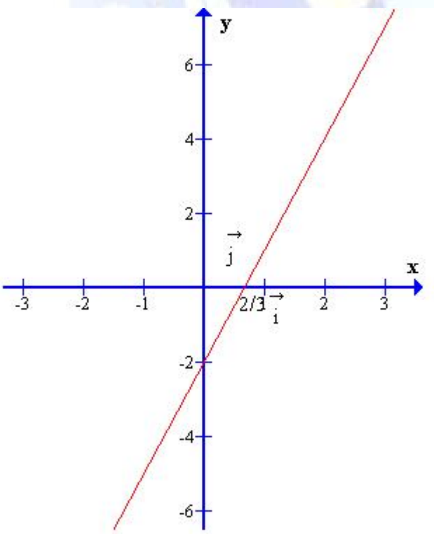
– **المشتقة :** الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من أجل $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=3$.

– **إشارة المشتقة :** من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

– **جدول التغيرات :**

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

– **التمثيل البياني :**



نعيّن التقاطع مع المحورين

* $f(x)=0$ يعني $3x-2=0$ أي $x=\frac{2}{3}$ ومنه يتقاطع (C_f) مع محور الفواصل $(x'x)$ في النقطة اللتي فاصلتها $\frac{2}{3}$.

* $f(0)=-2$ و منه يتقاطع (C_f) مع محور التراتيب $(y'y)$ في النقطة التي ترتيبها -2 .

تعريف

نسمي دالة تآلفية كل دالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f : x \mapsto ax+b$

نتائج :

– التمثيل البياني للدالة $f: x \to ax+b$ هو المستقيم الذي معادلته $y = ax+b$. لتمثيله يكفي رسم نقطتين منه .

– نلاحظ من النشاط الأول أن :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(3x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(3x)$.

نقبل بصفة عامة أن :

$$\lim_{x\to-\infty}(ax+b) = \lim_{x\to-\infty}(ax) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}(ax+b) = \lim_{x\to+\infty}(ax)$$

– نستنتج هكذا أنه :

* إذا كان $a > 0$ فإن $\lim_{x\to-\infty}(ax+b) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(ax+b) = +\infty$

* إذا كان $a < 0$ فإن $\lim_{x\to-\infty}(ax+b) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(ax+b) = -\infty$

مثال

$$\lim_{x\to-\infty}(3x+1) = \lim_{x\to-\infty}(3x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}(3x+1) = \lim_{x\to+\infty}(3x) = +\infty$$

تطبيقات

تطبيق 1

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x) = -2x+4$.

1– عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2− أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3− أرسم في معلم متعامد المنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

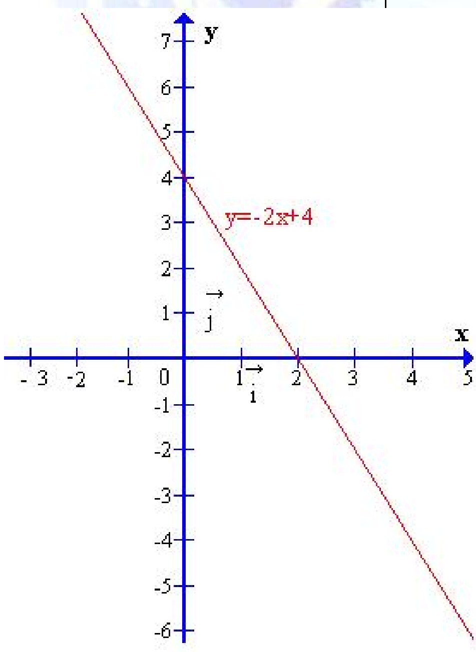
حل

1− $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty$

2− من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = -2$.

نلاحظ أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) < 0$ و منه الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$



3− المنحنى الممثل للدالة

هو المستقيم ذو المعا

$y=-2x+4$ وتكفينا نقط

لرسمه.

فمثلا $f(0) = 4$ و $f(2) = 0$

تطبيق 2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=2x-1$.

1− عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2− أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3− أرسم في معلم متعامد المنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

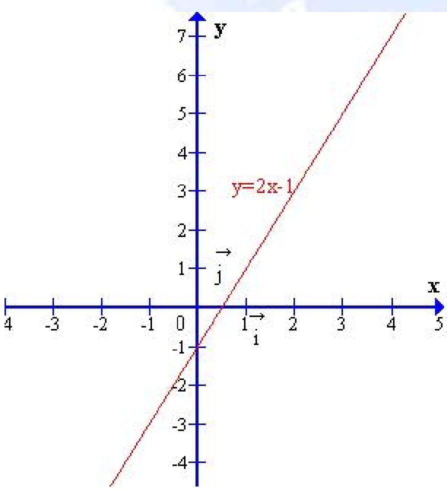
حل

1− $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$

2− من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=2$. نلاحظ أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

3− المنحنى الممثل للدالة f هو المستقيم ذو المعادلة $y=2x-1$ و تكفينا نقطتان لرسمه . فمثلا $f(0)=-1$ و $f(1)=+1$.



II. الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية:

نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=2x^2-4x-6$

1) مثل على شاشة حسابية بيانية المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2) عين فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل.

3) بإستعمال مجدول أنجز ورقتي الحساب الموالية:

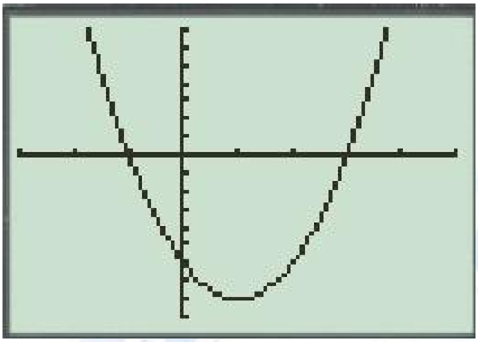
	A	B
1	x	$f(x)$
2	-10	234
3	-100	20394
4	-1000	2003994
5	-10000	200039994
6	-100000	2E+10
7	-1000000	2E+12
8	-10000000	2E+14
9	-100000000	2E+16
10	-1000000000	2E+18
11	-1E+10	2E+20
12		
13		
14		

	A	B
1	x	$f(x)$
2	10	154
3	100	19594
4	1000	1995994
5	10000	199959994
6	100000	2E+10
7	1000000	2E+12
8	10000000	2E+14
9	100000000	2E+16
10	1000000000	2E+18
11	1E+10	2E+20
12		
13		
14		

4) كما في النشاط الأول ماذا تلاحظ ؟ عبر عن هذه الحالة بكتابات مناسبة.

حل

1) تمثيل على شاشة حسابية بيانية المنحنى (C_f) الممثل للدالة f حيث $f(x)=2x^2-4x-6$:



2) فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x)=0$ فنجد: $x=-1$ أو $x=+3$

3) يمكنك إستعمال برنامج إكسال.

	A	B
1	x	$f(x)$
2	10	154
3	100	19594
4	1000	1995994
5	10000	199959994
6	100000	2E+10
7	1000000	2E+12
8	10000000	2E+14
9	100000000	2E+16
10	1000000000	2E+18
11	1E+10	2E+20
12		
13		
14		

	A	B
1	x	$f(x)$
2	−10	234
3	−100	20394
4	−1000	2003994
5	−10000	200039994
6	−100000	2E+10
7	−1000000	2E+12
8	−10000000	2E+14
9	−100000000	2E+16
10	−1000000000	2E+18
11	-1E+10	2E+20
12		
13		
14		

4) نلاحظ أن $f(x)$ تأخذ قيم كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يأخذ x قيم كبيرة.

نعبر عن هذه الحالة بالكتابة $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

كما نلاحظ أن $f(x)$ تأخذ قيم صغيرة سالبة بالقدر الذي نريد بشرط أن يأخذ x قيم صغيرة سالبة.

نعبر عن هذه الحالة بالكتابة $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

دراسة مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=2x^2-4x-6$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- **النهايات:** لدينا حسب النشاط الثاني:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

- **المشتقة :** الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من أجل $\mathbb{R}$، $f'(x)=4x-4=4(x-1)$.

إشارة المشتقة:

من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x-1)$.

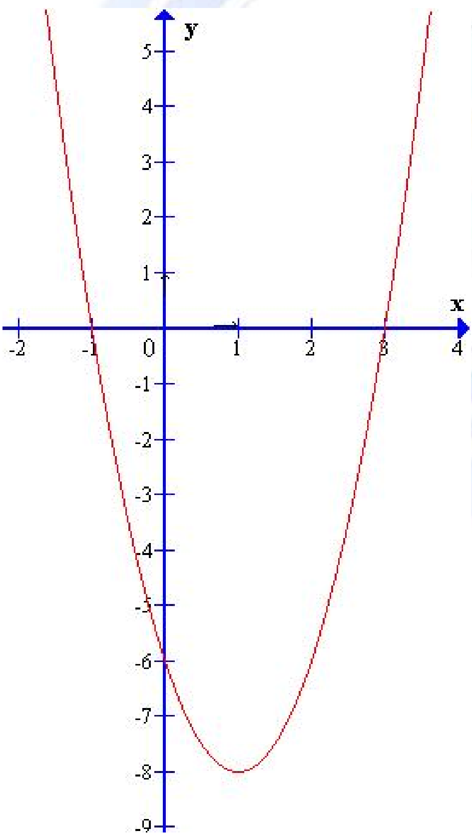
$x-1\le 0$ يعني $x\le 1$ و منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$.

$x-1\ge 0$ يعني $x\ge 1$ و منه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

– **جدول التغيرات:** لدينا $f(1)=-8$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	-8	$\nearrow +\infty$

– **التمثيل البياني:**



عند الرسم يمكن الاستعانة بنقط مساعدة .

$2x^2-4x-6=0$ يعني

$x=-1$ أو $x=3$ ومنه

يتقاطع (C_f) مع محور الفواصل $(x'x)$ في النقطتين اللتين فاصلتاهما (-1) و 2 .

* $f(0)=-6$. يتقاطع (C_f) مع $(y'y)$ في النقطة التي ترتيبها -6 .

نتائج

-يسمي التمثيل البياني للدالة

$f: x \to ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ قطعا

مكافئا .

-نلاحظ من النشاط الثاني أن:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x^2)$.

نقبل بصفة عامة أن :

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} (ax^2 + bx + c) = \lim\limits_{x \to -\infty} (ax^2) \\ \text{و} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} (ax^2 + bx + c) = \lim\limits_{x \to +\infty} (ax^2) \end{array}}$$

نستنتج هكذا أنه:

* إذا كان $a > 0$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} (ax^2 + bx + c) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax^2 + bx + c) = +\infty$

* إذا كان $a < 0$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} (ax^2 + bx + c) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax^2 + bx + c) = -\infty$

مثال

$\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^2) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^2) = -\infty$

تطبيق

نعتبر الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ على بـــ: $f(x)=-x^2-x+2$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2- أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3- عين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.

4- أكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 .

5- أرسم في معلم متعامد المنحنى (C_f) و المماس (Δ) .

حل

1- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(-x^2)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x^2)=+\infty$

2- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=-2x-1$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
إشارة $-2x-1$		$+$	0	$-$	

إن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

3− لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع $(x'x)$ نقوم بحل المعادلة:

$-x^2-x+2=0$

$\Delta=9$ ، $x'=-2$ و $x''=1$. يتقاطع إذن (C_f) مع $(x'x)$ في نقطتين فاصلتهما 2− و 1 .

لدينا $f(0)=2$ ومنه يتقاطع (C_f) مع $(y'y)$ في النقطة التي ترتيبها 2 .

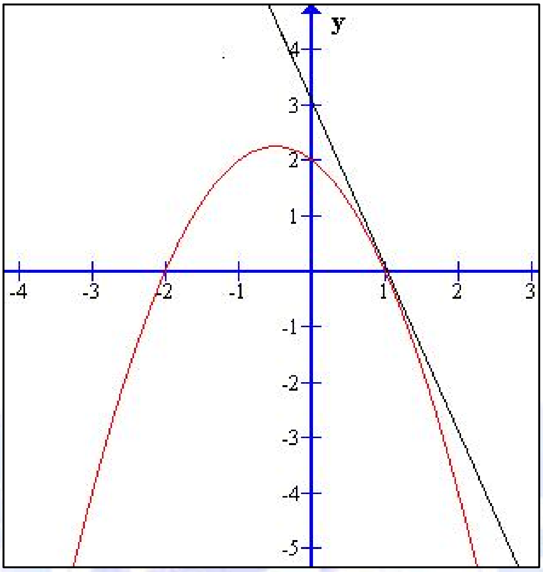
4− معادلة (Δ) هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

لدينا $f(1)=0$ و $f'(1)=-3$

و بالتالي معادلة للمماس (Δ) هي : $y=-3x+3$.

5− لرسم المنحنى (C_f) ننشئ بعض النقط المساعدة و من أجل ذلك نملأ الجدول التالي:

x	3−	2−	1−	0	1	2
$f(x)$	4−	0	2	2	0	4−


y
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3

III.الدول كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة:

نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x^3+x-2$.

ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بإستعمال مجدول أنجز ورقتي الحساب الموالية:

	A	B
1	x	$f(x)$
2	10	1008
3	100	1000098
4	1000	1000000998
5	10000	1E+12
6	100000	1E+16
7	1000000	1E+18
8	10000000	1E+21
9	100000000	1E+24
10	1000000000	1E+27
11	1E+10	1E+30
12		
13		
14		

	A	B
1	x	$f(x)$
2	-10	-1012
3	-100	-1000102
4	-1000	-1000001002
5	-10000	-1E+12
6	-100000	-1E+16
7	-1000000	-1E+18
8	-10000000	-1E+21
9	-100000000	-1E+24
10	-1000000000	-1E+27
11	-1E+10	-1E+30
12		
13		
14		

2) كما في النشاطين السابقين ماذا تلاحظ ؟ عبر عن ذلك بكتابات مناسبة.

3) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x)=(x-1)(x^2+x+2)$

– إستنتج فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

5) نسمي (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

– بين أن معادلة للمماس (Δ) هي : $y=x-2$.

– مثّل على شاشة حسابية بيانية كلا من (C_f) و (Δ) .

– أدرس حسب قيم العدد x ، إشارة الفارق $[f(x)-(x-2)]$.

– استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (Δ) .

حل

1) يمكنك إستعمال برنامج إكسال.

2) في الجدول الأول نلاحظ أن $f(x)$ تأخذ قيم كبيرة عندما x قيم كبيرة و نعبر عن هذه الحالة بـــ: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

و في الجدول الثاني نلاحظ أن $f(x)$ تأخذ قيم صغيرة سالبة عندما يأخذ x بدوره قيم صغيرة سالبة و نعبر عن هذه الحالة بـــ: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

3) إتجاه تغير الدالة f :

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x^3+x-2$ قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ بإعتبارها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة ولدينا: مهما يكن x عدد حقيقي، $f'(x)=3x^2+1$. وكما هو ظاهر أن $f'(x)$ موجب تماما في $\mathbb{R}$.

وعليه فإن الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty\,,+\infty[$.

- جدول تغيرات f .

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

4) تحقيق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x)=(x-1)(x^2+x+2)$

للتأكد من هذه العبارة يكفي أننا ننشر في عبارة $f(x)=(x-1)(x^2+x+2)$

نقارنها مع العبارة الأولى $f(x)=(x^3+x-2)$ لدينا :

$$\begin{aligned} f(x)=(x-1)(x^2+x+2) &= x^3+x^2-2x-x^2-x-2 \\ &= x^3+3x-2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

* فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل .

نحل المعادلة $f(x)=0$ أي $(x-1)(x^2+x+2)$

أي $x=1$ أو $x^2+x+2=0$

* المعادلة $x^2+x+2=0$ لا تقبل أي حل في $\mathbb{R}$ و عليه لدينا نقطة وحيدة هي $(1,0)$.

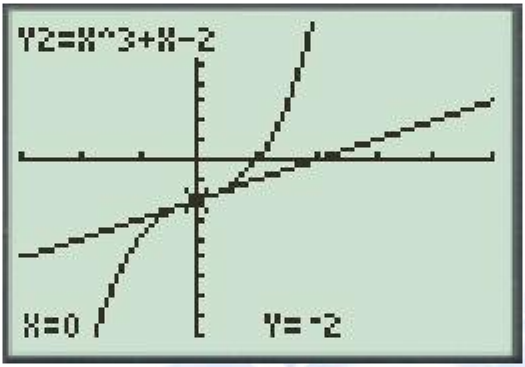
5) معادلة المماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

نعلم أن معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=a$ هي : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. لدينا $a=0$.

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$. وبحساب $f'(0)=1$ ؛ $f(0)=-2$

نتحصل على $(\Delta):\ y=x-2$.

* تمثيل على شاشة حاسبة بيانية لـــ (C_f) و (Δ) .



6) دراسة إشارة الفرق : $[f(x)-(x-2)]$.

$[f(x)-(x-2)]=x^3$ إشارة هذا الفرق هو إشارة x و عليه لدينا :

إذا كان $x>0$ فإن $[f(x)-(x-2)]>0$.

إذا كان $x<0$ فإن $[f(x)-(x-2)]<0$.

إذا كان $x=0$ فإن $f(x)=x-2$.

و منه نستنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (Δ) :

من أجل $x>0$ يقع (C_f) فوق المستقيم (Δ).

من أجل $x<0$ يقع (C_f) تحت المستقيم (Δ).

$(C_f)\cap(\Delta)=\{I(0\,;-2)\}$ وتسمى النقطة I نقطة إنعطاف المنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

دراسة مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x^3+x-2$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- **النهايات :** لدينا حسب النشاط الثالث

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- **المشتقة :** الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 3x^2 + 1$.

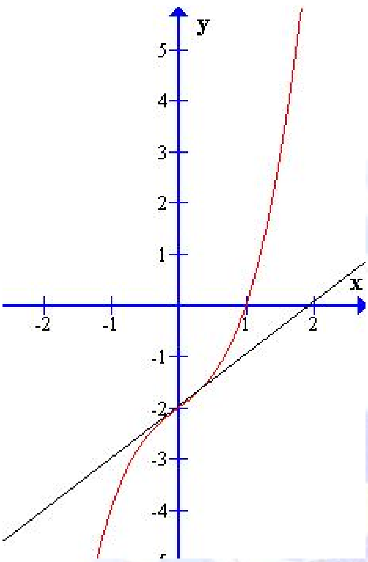
- **إشارة المشتقة :** من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) > 0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- **جدول التغيرات.**

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f''(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

– **التمثيل البياني**: عند الرسم يمكن الاستعانة بنقط مساعدة .

• نقطة الانعطاف: $f''(x)=6x$ و تنعدم من أجل $x=0$ و تتغير إشارتها عند هذه القيمة و بالتالي فان $I(0\,;-2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى.



معادلة المماس عند $(0\,;-2)$.

$(\Delta): y=x-2$

• تقاطع (C_f) مع محور الفواصل:

نحل المعادلة $f(x)=0$ أي

$x^3+x-2=0$ و نلاحظ أن $x=1$ حل ظاهر وبالتالي لدينا $x^3+x-2=0$

يكافئ : $(x-1)(x^2+x+2)=0$

ومنه $x=1$ لأن المعادلة

$x^2+x+2=0$ لا تقبل حلاً في $\mathbb{R}$ و بالتالي لدينا نقطة تقاطع واحدة هي $(0\,;1)$.

• تقاطع المنحنى مع محور التراتيب:

$f(0)=-2$ لدينا النقطة $(0\,;-2)$.

نتائج

– التمثيل البياني للدالة $f: x \to ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ يقبل نقطة إنعطاف فاصلتها x_0 ، بحيث أن x_0 هي القيمة التي تنعدم عندها المشتقة الثانية f'' للدالة f مغيرة إشارتها .

– نلاحظ من النشاط الثالث أن:

. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)$

نقبل بصفة عامة أن:

$$\lim_{x\to-\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=\lim_{x\to-\infty}(ax^3)$$

و $$\lim_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=\lim_{x\to+\infty}(ax^3)$$

– نستنتج هكذا أنه:

* إذا كان $a>0$ فإن :

$\lim_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=-\infty$

* إذا كان $a<0$ فإن :

$\lim_{x\to+\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}(ax^3+bx^2+cx+d)=+\infty$

مثال

$\lim_{x\to+\infty}(2x^3-x^2-3x+1)=\lim_{x\to+\infty}(2x^3)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}(2x^3-x^2-3x+1)=\lim_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(-3x^3+3x-4)=\lim_{x\to+\infty}(-3x^3)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}(-3x^3+3x-4)=\lim_{x\to-\infty}(-3x^3)=+\infty$

تمرين

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=-x^3-x^2+5x+2$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1– عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2– أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3− تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=(x-2)(-x^2-3x-1)$.

استنتج نقط تقاطع (C_f) مع $(x'x)$.

4− أرسم في معلم متعامد المنحنى (C_f).

حل

1− $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=-\infty$.

2− من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=-3x^2-2x+5$.

لدينا : $\Delta=64$ ، $x'=-\frac{5}{3}$ و $x''=1$ و منه :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{121}{27}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

3− نقوم بالنشر :

$$f(x)=(x-2)(-x^2-3x-1)=-x^3-3x^2-x+2x^2+6x+2=-x^3-x^2+5x+2$$

$f(x)=0$ يعني $(x-2)(-x^2-3x-1)=0$ أي $x=2$ أو $-x^2-3x-1=0$

مميز $-x^2-3x-1=0$ هو $\Delta=5$ و منه الحلان هما:

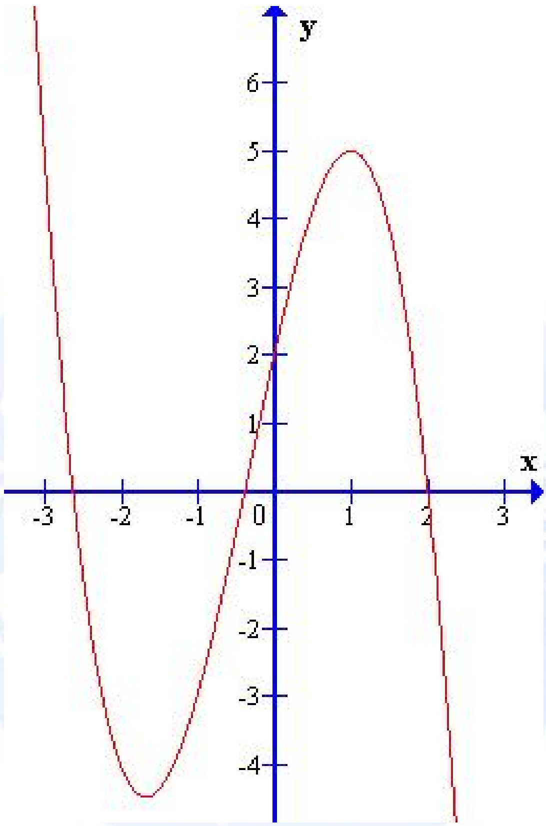
$$x'=\frac{3-\sqrt{5}}{-2} \quad و \quad x''=\frac{3+\sqrt{5}}{-2}$$

القيم المقربة لحلي المعادلة $-x^2-3x-1=0$ هما : $-0{,}38$ و $-2{,}62$.

يتقاطع إذن (C_f) مع $(x'x)$ في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب $-2{,}62$ ،

$-0{,}38$ و 2 .

4- لدينا كذلك $f(0)=2$ و منه يقطع (C_f) المحور $(y'y)$ في النقطة التي ترتيبها 2 .



نقطة الإنعطاف

نقطة إنعطاف لمنحنى دالة هي نقطة منه يخترقه فيها مماسه عندها.

المشتقة الثانية للدالة

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ قابلة الإشتقاق على I .
إذا كانت الدالة المشتقة f' المعرفة على I قابلة بدورها للإشتقاق على I فإنّنا نسمي مشتقة الدالة f' المشتقة الثانية للدالة f و نرمز إليها بالرمز f'' و لدينا : $f''=\left[\left(f'\right)\right]'$

مثال

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و المعرفة بـــ: $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x$.
قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f'(x)=x^2+x-2$.
الدالة $f':x\mapsto x^2+x-2$ قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا مهما يكن x من $\mathbb{R}$ فإن $f''(x)=2x+1$.

نتيجة

لتكن f دالة معرفة و قابلة الإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عنصر من I .

إذا كانت الدالة $x\rightarrow f'(x)$ قابلة الإشتقاق عند x_0 و إنعدمت $f''(x)$ مغيرة إشارتها عند القيمة x_0 فإن المنحنى الممثل للدالة f يقبل نقطة إنعطاف فاصلتها x_0 .

مثال

المنحنى الممثل للدالة f و المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x+1$ يقبل نقطة إنعطاف عند النقطة التي فاصلتها $x_0=\frac{-1}{2}$ لأن الدالة f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ مرتين و لدينا :

$f'(x)=x^2+x-2$ و $f''(x)=2x+1$

و إشارة f'' هي :

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{-1}{2}$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$

ملاحظة

في النتيجة الواردة سابقا فإن إنعدام f'' لا يكفي لضمان وجود نقطة إنعطاف و من الضروري أن يتحقق تغيير إشارة $f''(x)$ عند القيمة x_0 .

مثال

الدالة $x \xrightarrow{f} x^4$ قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ لدينا : $f''(x)=12x^2$ وتنعدم من أجل $x_0=0$ و لكن $f''(x)$ إشارة موجبة مهما يكن $x\in\mathbb{R}^+$ وبالتالي فإن النقطة $(0,0)$ لا تشكل نقطة إنعطاف للمنحنى الممثل للدالة f .

IV.ملخص:

يمكن تلخيص الدرس في النقاط الأساسية التالية

1- عالجنا في هذا الفصل دوال كثيرات الحدود وهي:

أ)الدالة التآلفية (دالة ثنائي حدود من الدرجة الأولى)

$x \mapsto \mathbf{ax}+\mathbf{b}$ حيث $b \in \mathbb{R}$ ، $a \in \mathbb{R}^*$

ب) الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثانية $x \mapsto \mathbf{ax}^2+\mathbf{b}x+c$

حيث $c \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ ، $a \in \mathbb{R}^*$

ج) الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة:

$x \to \mathbf{ax}^3+\mathbf{b}x^2+cx+d$

حيث $d \in \mathbb{R}$ ، $c \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ ، $a \in \mathbb{R}^*$

2- لحساب النهاية نعتمد على نهاية الحد الأكبر درجة لكثير الحدود.

3- لدراسة دالة كثير حدود نعتمد على المخطط التالي:

* نحسب نهايات الدالة المعطاة عند $-\infty$ وعند $+\infty$

** نحسب المشتقة

*** نحدد إشارة المشتقة

**** نشكيل جدول التغيرات

رسم المنحنى الممثل للدالة بتعيين نقاط مساعدة مثل نقاط تقاطع مع المحورين، نقطة الإنعطاف إذا وجدت، ومعادلة المماس عندها، النهايات الصغرى والكبرى.

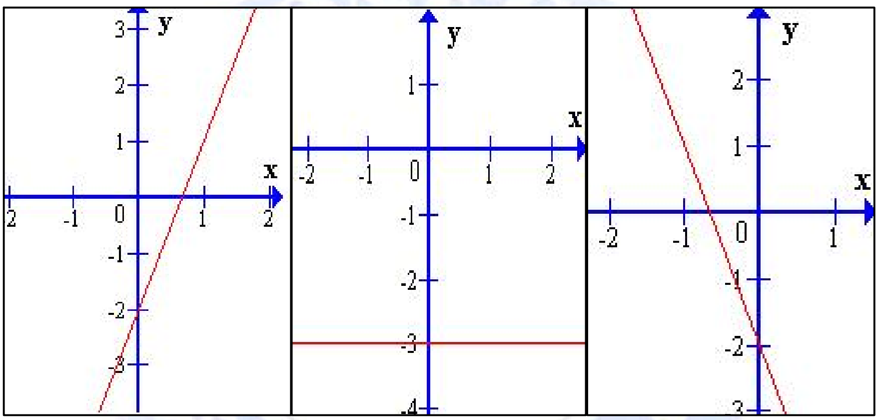
4- يقبل منحنى الدالة كثير الحدود من الدرجة الثالثة نقطة انعطاف فاصلتها تعدم المشتقة الثانية لهذه الدعلى وتغير إشارتها.

V. توظيف المعارف:

أ. تمارين

1. أرفق كل دالة بتمثيلها البياني:

$f : x \mapsto 3x-2$ ، $g : x \mapsto -3x-2$ و $h : x \mapsto -3$.



الشكل (1)   الشكل (2)   الشكل (3)

2. نعتبر الدالة f المعرفة على [-3 ; 5] بـــ: $f(x)=-x+1$.

أنجز جدول تغيراتها ثم مثلها بيانيا .

3. مثل بيانيا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=4x+1$.

4. أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بـــ: $f(x)=3x^2-6x+3$. ثم مثلها بيانيا في المستوي المنسوب إلى معلم $(O; I, J)$.

.5 f ، g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بــ: $f(x)=3x^2-7x-20$ و $g(x)=x^2-2x+5$.

(C_f) و (C_g) هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g على الترتيب في معلم .

1- أ . حل المعادلة $f(x)=g(x)$.

ب . عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g).

2- أ . أدرس إشارة $f(x)-g(x)$ حسب قيم x .

ب . استنتج الوضعية النسبية للمنحنين (C_f) و (C_g).

يمكن مشاهدة النتائج بيانيا برسم المنحنين (C_f) و (C_g) على شاشة الحاسبة البيانية.

.6 بإستعمال جدول تغيرات الدالة f عين مجموعة تعريفهــا والنهايــات عند حدود مجموعة التعريف؛ عين اتجاه تغيرها، مثلها بيانيا.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

.7 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $f(x)=x^3-3x-3$

1- أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2- احسب f' مشتقة الدالة f .

3- شكل جدول تغيرات الدالة f .

4− نسمي (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

عين معادلة المماس T للمنحنى عند النقطة التي فاصلتها 0.

5− ارسم T و (C) على المجال $[-2\,;2,5]$.

8. بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=-x^3+3x$.

C المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1−بين أن الدالة f فردية .

2− عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى C مع حامل محور الفواصل .

3−أدرس تغيرات الدالة f .

4−أكتب معادلة للمماس Δ للمنحنى C عند النقطة التي فاصلتها $x_0=\sqrt{3}$.

5−أنشئ Δ ثم المنحنى C .

9. بكالوريا

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=-x^3+\frac{4}{3}x+1$.

يرمز C للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1− أحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(1)$ ، $f(-1)$.

2− أدرس نهايتي الدالة f عند حدي مجال التعريف .

3− أدرس اتجاه تغير الدالة f و أنجز جدول تغيراتها .

4− أكتب معادلة المماس Δ للمنحنى C عند النقطة التي فاصلتها $x=0$.

5− عين نقط تقاطع المنحنى C مع المستقيم الذي معادلته $y=1$.

أرسم Δ ثم C .

10. أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بـــ: $f(x)=x^2-5x+6$ ثم مثلها بيانيا في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

11. أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بـــ: $f(x)=-x^2+2x+3$ ثم مثلها بيانيا في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

12. أدرس تغيرات الدالة f ثم مثلها بيانيا في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) $f(x)=3x^3-6x+3$.

2) $f(x)=-x^3+2x^2$.

13. أدرس تغيرات الدالة f ثم أثبت أن النقطة I نقطة إنعطاف لـــ (C_f) منحني الدالة f و ارسم (C_f) .

$f(x)=x^3-x+1$ و $I(0;1)$.

14. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=3x^2-5x+2$. (C_f) منحنيها البياني.

1) أحسب النهايتين عند $-\infty$ و $+\infty$ للدالة f .

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f .

3) عين نقطتي تقاطع المنحنين (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم عند كل من هاتين النقطتين، أكتب معادلة لمماس المنحني (C_f) .

4) أنشئ المنحني (C_f) .

15. نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـــ:

$f(x) = x^2 - x - 1$ و $g(x) = 3 - x$.

(C_f) و (D) التمثيلين البيانيين للدالتين f و g في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2) أحسب f' مشتقة الدالة f و ادرس إشارتها .

3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) عين معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتهما $x_0 = 2$.

5) حل جبريا المعادلة $f(x) = g(x)$.

6) عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) و (D) .

7) ارسم T ، (D) و (C_f) في نفس المعلم .

16. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 4$.

(C_f) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس .

1) ادرس تغيرات الدالة f .

2) أثبت أن النقطة $S(1;-3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C) .

3) ارسم (C) .

17. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{13}{12}$.

1) احسب نهايتي الدالة f بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$.

2) أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها على $\mathbb{R}$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أثبت أن النقطة $I(\frac{1}{2};0)$ نقطة انعطاف للرسم البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5) استنتج حلول المعادلة : $f(x)=0$.

6) مثل بيانيا الدالة f .

18. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x^3-3x-1$.

1) ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ (اتجاه التغير و النهايات) .

2) عين معادلة المماس T للمنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0 .

3) حدد وضعية المماس T بالنسبة للمنحني (C) .

4) نعتبر القطع المكافئ P الذي معادلته $y=x^2-2x+1$.

أ- ادرس تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $g(x)=x^2-2x+1$.

ب- تحقق أن النقطة $A(2;1)$ نقطة مشتركة بين (C) و P .

5) أ- تحقق من أن : $x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$.

ب- ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى P .

6) ارسم المنحنيين (C) و P في نفس المعلم .

.19

1. نريد البحث عن دالة كثير الحدود من الدرجة الثالثة f ، علما أن منحنيها البياني (C_f) الممثل في معلم معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ يحقق الشروط التالية :

– (C_f) يشمل النقطةO و يقبل في هذه النقطة مماسا معامل توجيهه -2.

– المماس (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 موازي للمستقيم الذي معادلته $y=3x+1$.

– النقطة $A(-1;2)$ تنتمي إلى (C_f) .

نضع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، عين الدالة f .

فيما يلي نقبل أن : $f(x)=x^3+x^2-2x$.

2. عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل.

3. أعط معادلة المماس T للمنحني (C_f) عند O ، عين نقط تقاطعه مع (C_f).

4. جد نقط المنحني (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا لمحور الفواصل.

5. نريد البحث عن الفاصلة a لنقط المنحني (C_f) يكون عندها المماس يشمل النقطة O.

أ – بين أن a هي حل للمعادلة $f(a)=af'(a)$.

ب – عين النقط المطلوبة .

ب. حلول للتمارين

.1

f, g, h معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي

$f : x \mapsto 3x - 2$

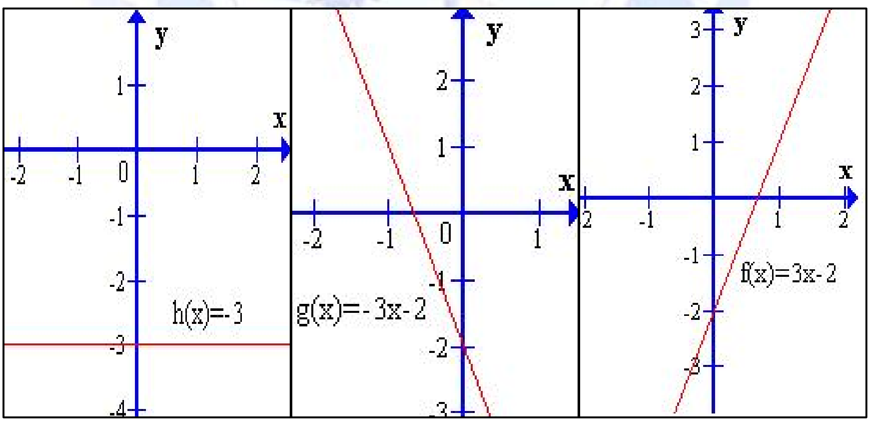
$g : x \mapsto -3x - 2$

. $h : x \mapsto -3$

لدينا $f(0) = -2$ و $f(x) = 0$ من أجل $x = \frac{2}{3}$. والمستقيم (Δ) الممثل للدالة f يشمل النقطتين $(0\,;-2)$ و $\left(\frac{2}{3}\,;0\right)$ ، فهو موافق للشكل (3)

المستقيم الممثل للدالة g يشمل النقطتين $(0\,;-2)$ و $\left(-\frac{2}{3}\,;0\right)$.

أما المستقيم ذو معادلة $y = -3$ يوازي محور التراتيب



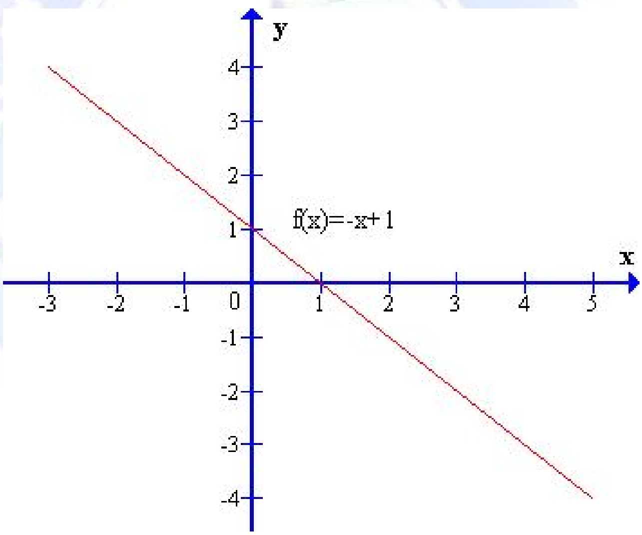
.2

الدالة المعرفة f على المجال [5 ; 3-] بـــ: $f(x)=-x+1$

قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x)=-1$

ومنه f متناقصة على المجال [5 ; 3-].

x	-3		5
$f(x)$	+4	$\searrow$	-4



.3

نعلم أن التمثيل البياني للدالة f المعرفة بـــ: $f(x)=4x+1$ هو مستقيم

ولإنشائه يكفي تعيين نقطتين وهما $(0\,;1)$ و $\left(\frac{-1}{4}\,;0\right)$.

4. المطلوب هو دراسة تغيرات الدالة f المعرفة بـــ: $f(x)=3x^2-6x+3$ ثم تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الدالة $x\xrightarrow{f}3x^2-6x+3$ قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}$ بإعتبارها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية و لدينا $f'(x)=6x-6$: أي $f'(x)=6(x-1)$.

• **النهايات:**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(3x^2)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(3x^2)=+\infty$$

• **إشارة المشتقة:**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

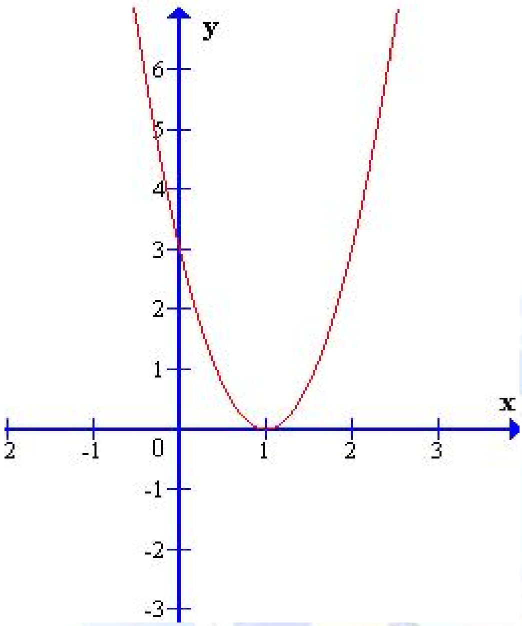
• **جدول التغيرات :**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

التمثيل البياني : نقط مساعدة.

تقاطع المنحنى مع محور الفواصل:لحل المعادلة $f(x)=0$. أي $3(x-1)^2=0$ لدينا النقطة $(1;0)$.

تقاطع مع محور التراتيب : $(0;3)$



.5

1− أ . حل المعادلة $f(x)=g(x)$.معناه $3x^2-7x-20=x^2-2x+5$

و نحصل على المعادلة $2x^2-5x-25=0$ التي تقبل حليين متمايزين هما $x'=\frac{-5}{2}$ و $x''=+5$.

ب. إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g) .

يتم تعيين هذه النقط بحل المعادلة $f(x)=g(x)$ التي تحدد فواصل هــذه النقط.

المعادلة $f(x)=g(x)$ متكافئة إلى $2x^2-5x-25=0$ التي تقبل حلين متمايزين هما $x'=\frac{-5}{2}$ و $x''=5$ و عليه لدينا نقطتين هما $\left(-\frac{5}{2};\ f(-\frac{5}{2})\right)$ ، $\left(5\ ;\ f(5)\right)$.

و بما أن $f(5)=g(5)$ و $f(-\frac{5}{2})=g(-\frac{5}{2})$ يستحسن حساب $g(5)$ و $f(-\frac{5}{2})$ لأن عبارة $g(x)$ أسهل من عبارة $f(x)$ و نتحصل على $g(5)=20$ و $g(-\frac{5}{2})$ و عليه فإن (C_f) و (C_g) لهما نقطتين مشتركتين هما $(5\,;20)$ و $(-\frac{5}{2};\frac{65}{4})$.

2-أ. دراسة إشارة $f(x)-g(x)$ حسب قيم x .

و نتيجة السؤال السابق : $f(x)-g(x)=2x^2-5x+20$.

لدينا

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+5$		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ب . نستنتج من السؤال 2-أ. وضعية (C_f) بالنسبة لـ: (C_g) .

- عندما يكون $x\in\left]-\infty\,;-\frac{5}{2}\right]$ فإن (C_f) تكون فوق (C_g) .
- عندما يكون $x\in\left[-\frac{5}{2};+5\right]$ تكون (C_g) فوق (C_f) .

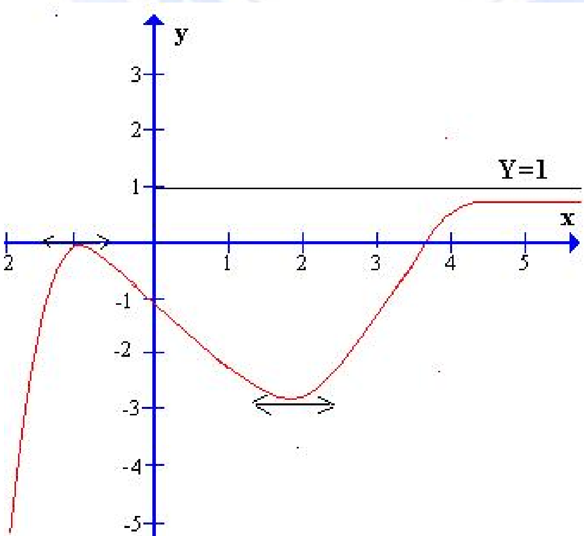
.6

من خلال جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

نستنتج ما يلي :

- مجموعة التعريف D_f للدالة f هو : $D_f =]-\infty ; +\infty[$.
- النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} (x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (x) = 1$.
- – الدالة f متزايدة تماما في المجال $]-\infty ; 1] \cup [2 ; +\infty[$.
  – الدالة f متناقصة تماما في المجال $[-1 ; 2]$.
- التمثيل البياني



.7

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=x^3-3x-3$.

1- النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$.

2- حساب f' .

الدالة f قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}$ بإعتبارها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة $f'(x)=3x^2-3$.

3-تشكيل جدول تغيراتها.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1)=-1$
$f(1)=5$

4- معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

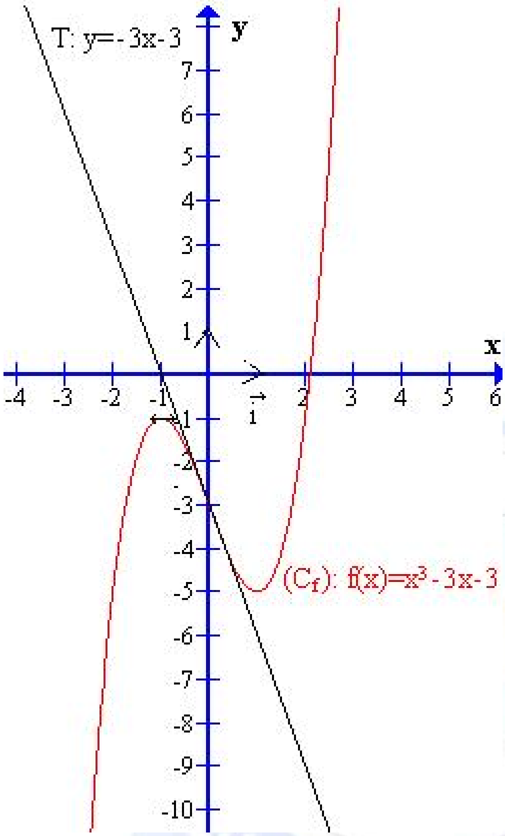
معادلة المماس (T) هي :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

$f'(0)=-3$ ، $f(0)=-3$ و لدينا :

$(T): y=-3x-3$.

5-رسم T و (C) على المجال $[-2;2,5]$.



.8

دالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=-x^3+3x$.

1- الدالة f فردية إذا تحقق ما يلي : $f(-x)+f(x)=0$ مهما يكن $x\in\mathbb{R}$ لنحسب $f(-x)+f(x)$.

$f(-x)=-(-x^3)+3(-x)$ أي : $f(-x)=x^3-3x$

$f(x)=-x^3+3x$

و لدينا فعلا : $f(-x)+f(x)=0$ أي : $f(-x)=-f(x)$.

2- إحداثيات نقط تقاطع المنحنى C مع حامل محور الفواصل.

لحل المعادلة : $f(x)=0$ لكي نتحصل على فواصل هذه النقاط $f(x)=0$ يعني: $x(-x^2+3)=0$ أي $x=0$ أو $3-x^2=0$ و نتحصل على $x=-\sqrt{3}$ أو $x=+\sqrt{3}$ وعليه فإن المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في ثلاث نقط هي : $(0;0)$, $(+\sqrt{3};0)$ و $(-\sqrt{3};0)$.

3-دارسة تغيرات الدالة f .

الدالة f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=3(1-x^2)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	

- f متزايدة على المجال $[-1;+1]$.
- f متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$.

4-معادلة للمماس Δ للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=\sqrt{3}$

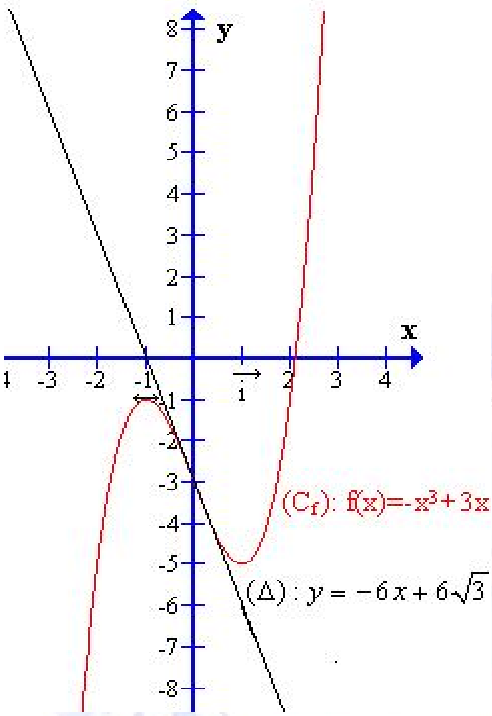
لدينا $(\Delta): f'(\sqrt{3})(x-\sqrt{3})+f(\sqrt{3})$

$$(\Delta): y=-6x+6\sqrt{3}$$

5- إنشاء المماس (Δ) ثم المنحنى (C) .

لدينا $(C): f(x)=-x^3+3x$

$$(\Delta): y=-6x+6\sqrt{3}$$



9.

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=-x^3+\frac{4}{3}x+1$.

1− حساب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(1)$ ، $f(-1)$.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)+1$ أي $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{24}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{12}$,

$f(1)=\frac{2}{3}$, $f(-1)=\frac{4}{3}$.

2− دراسة نهايتي الدالة f عند حدي مجال التعريف:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$.

3− دراسة اتجاه تغير الدالة f وإنجاز جدول تغيراتها.

الدالة f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f(x) = -x^3 + \frac{4}{3}x + 1$ أي

$f'(x) = 3(x^2 - \frac{4}{9})$.

إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه نستنتج أن : f متزايدة تماما في $\left]-\infty ; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3} ; +\infty\right[$.

f متناقصة في المجال $\left[-\frac{2}{3} ; +\frac{2}{3}\right]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\frac{2}{3})$	$\searrow$	$f(\frac{2}{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

4− معادلة المماس Δ للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

لدينا : $(\Delta) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

$(\Delta) : y = -\frac{4}{3}x + 1$.

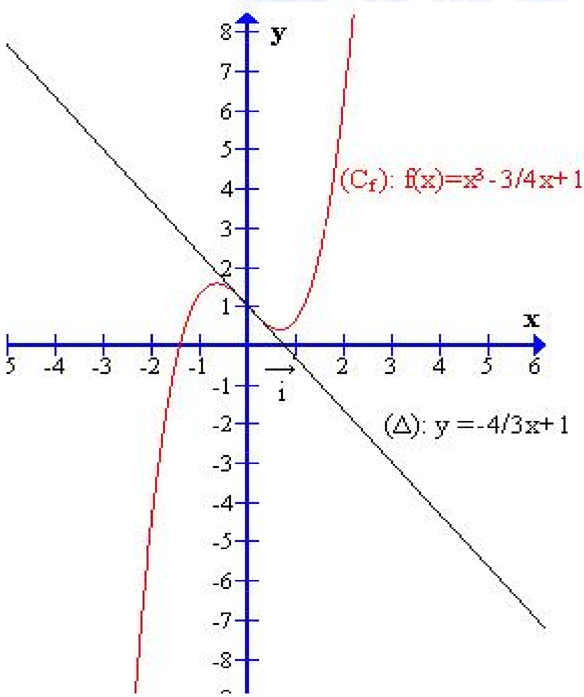
5− تعيين نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم الذي معادلته $y = 1$.

لحل المعادلة $f(x)=1$ أي $x^3-\frac{4}{3}x+1=+1$ معناه :

$x(x^2-\frac{4}{3}x)=0$ و نتحصل على النقاط التالية $(0\,;1)$; $(\frac{2\sqrt{3}}{3};1)$

و $(-\frac{2\sqrt{3}}{3};1)$.

* رسم المنحنى (C)و المماس (Δ) .



لدينا :

$(C):\ f(x)=x^3-\frac{4}{3}x+1$

$(\Delta):\ y=\frac{-4}{3}x+1$

.10

1) دراسة تغيرات الدالة $x \xrightarrow{f} x^2-5x+6$ و تمثيلها البياني.

* النهايات : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$

* المشتقة : الدالة f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ بإعتبارها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية و لدينا : $f'(x)=2x-5$.

* إشارة المشتقة:

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

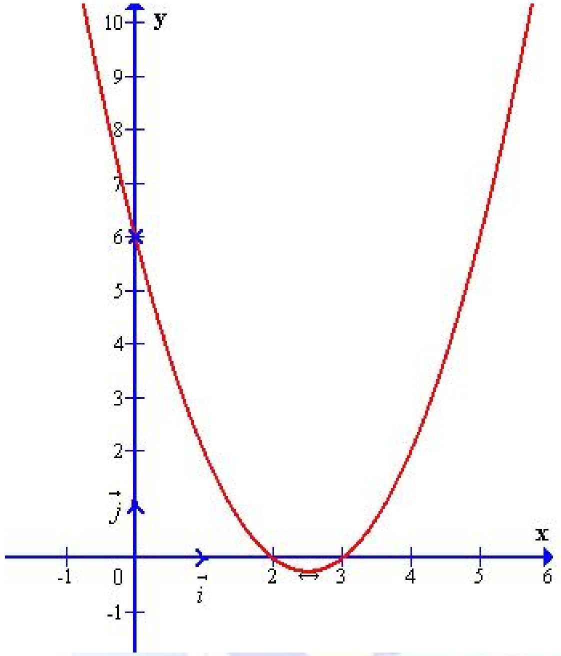
و منه فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$.

f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right]$.

* جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\frac{5}{2})$	↗	$+\infty$

$$\boxed{f(\frac{5}{2})=\frac{-1}{4}}$$



2) التمثيل البياني :

المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين $(2;0)$ و $(3;0)$ ومحور التراتيب في النقطة $(0;6)$.

نهاية صغرى $(\frac{5}{2};\frac{-1}{4})$.

.11

دراسة الدالة $x \xrightarrow{f} -x^2+2x+3$.

* تغيرات الدالة f .

* الدالة f معرفة و قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ بإعتبارها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية ولدينا: $f'(x)=-2x+2$ أي $f'(x)=-2(x-1)$

* إشارة $f'(x)$:

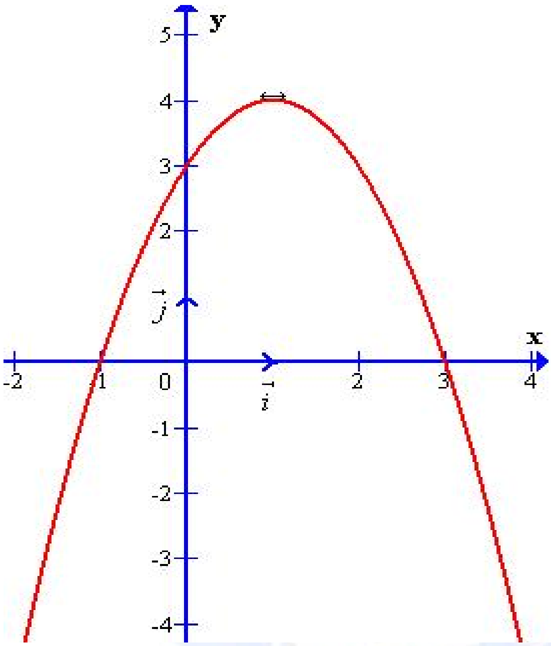
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

ومنه فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty\,;1]$.

f متناقصة تماما على المجال $[1\,;+\infty[$.

*النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$

* التمثيل البياني للدالة f :



المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطتين $(3\,;0)$ و $(-1\,;0)$ و محور التراتيب في النقطة $(0\,;3)$.

(C_f) يقبل نهاية كبرى $(1\,;4)$.

.12

1) دراسة تغيرات الدالة $x\xrightarrow{f}3x^3-6x+3$.

الدالة f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ بإعتبارها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة و لدينا : $f'(x)=9x^2-6$ أي $f'(x)=3(3x^2-2)$.

* إشارة $f'(x)$:

$f'(x)=0$ معناه : $3(3x^2-2)=0$ أي $x=+\frac{\sqrt{6}}{3}$ أو $x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

و لدينا :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		$+\frac{\sqrt{6}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و عليه نستنتج أن f متزايدة تماما في $\left]-\infty;-\frac{\sqrt{6}}{3}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{6}}{3};+\infty\right[$

ومتناقصة في المجال $\left[-\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$.

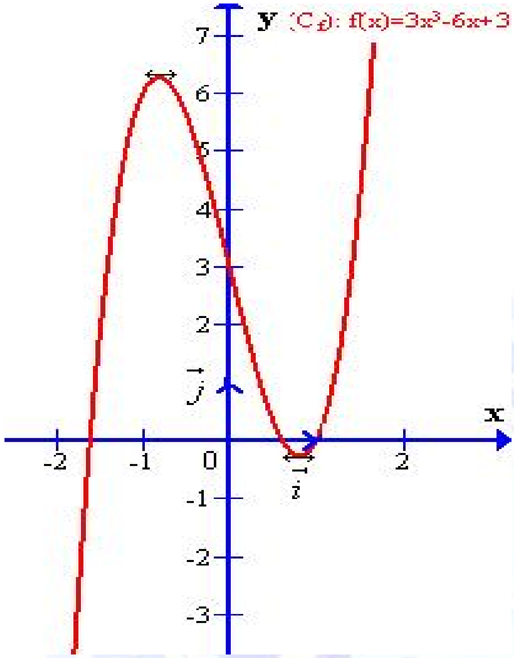
* النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^3)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^3)=-\infty$

* جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		$+\frac{\sqrt{6}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	$f(-\frac{\sqrt{6}}{3})$	$\searrow$	$f(\frac{\sqrt{6}}{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

*التمثيل البياني:

(C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة $(0;3)$ ومحور الفواصل في النقط $(-\frac{1-\sqrt{5}}{2};0)$ ، $(-\frac{1+\sqrt{5}}{2};0)$.



2) دراسة تغيرات الدالة $x \xrightarrow{f} -x^3+2x^2$.

الدالة f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ بإعتبارها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة و لدينا : $f'(x)=-x(3x-4)$.

* إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وعليه نستنتج أن f متزايدة على المجال $\left[0\,;\,\frac{4}{3}\right]$

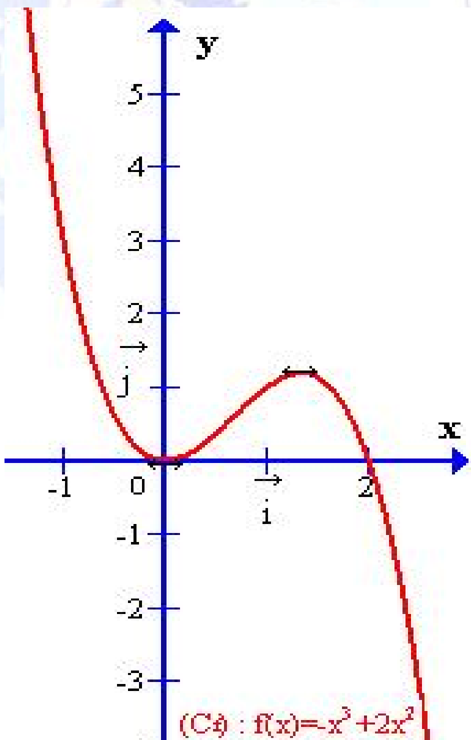
ومتناقصة في المجال $\left]-\infty\,;\,0\right] \cup \left[\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$.

* جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$f(\frac{4}{3})$	↘	$-\infty$

*النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$

*التمثيل البياني للدالة f :



.13

*دراسة تغيرات الدالة $f : x \mapsto x^3 - x + 1$.

الدالة f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ بإعتبارها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة و لدينا : $f'(x) = 3x^2 - 1$.

* إشارة المشتقة :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و عليه نستنتج أن f متزايدة تماما في $\left]-\infty ; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3} ; +\infty\right[$

ومتناقصة في المجال $\left[\frac{-\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

* النقطة $I(0;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

النقطة $I(0;1)$ تنتمي إلى (C_f) لأن $f(0) = 1$.

الدالة المشتقة f' و المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f'(x) = 3x^2 - 1$ هي قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f''(x) = 6x$ و تنعدم مغيرة إشارتها عند القيمة 0 .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

و عليه فإن النقطة $I(0\,;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

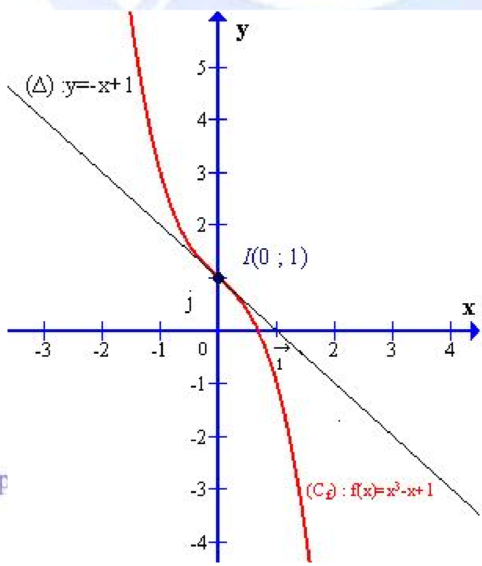
* رسم (C_f):

*) جدول تغيرات الدالة :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\frac{\sqrt{3}}{3})$	$\searrow$	$f(\frac{\sqrt{3}}{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $I(0\,;1)$ هي $(\Delta): y=-x+1$.

- إبراز النقطة $I(0\,;1)$.
- رسم المماس (Δ)
- ثم رسم (C_f) .



.14

1) حساب النهايتين للدالة $x \xrightarrow{f} 3x^2-5x+2$ عند $-\infty$ و $+\infty$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2)=+\infty$

2) تغيرات الدالة f .

الدالة f معرفة و قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية و لدينا : $f'(x)=6x-5$.

* إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

وعليه نستنتج أن f متزايدة في المجال $\left[\frac{5}{6};+\infty\right[$

ومتناقصة في المجال $\left]-\infty;\frac{5}{6}\right]$.

3) تعيين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل .

لتحديد هذه النقط نحل المعادلة $f(x)=0$ أي : $3x^2-5x+2=0$ معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلين متمايزين هما : $x'=1$ و $x''=\frac{2}{3}$ و عليه لدينا نقطتين $(1;0)$ و $(\frac{2}{3};0)$.

* معادلة المماس معادلة للمنحني عند النقطة $(1;0)$.

لدينا : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي : $y=x-1$.

نسمي هذا المماس (Δ) .

* معادلة المماس معادلة للمنحني عند النقطة $(\frac{2}{3};0)$.

ونسمي هذا المماس (Δ') . لدينا : $y=f'(\frac{2}{3})(x-\frac{2}{3})+f(\frac{2}{3})$

أي : $(\Delta'):y=-x+\frac{2}{3}$.

4) رسم المنحنى (C_f):

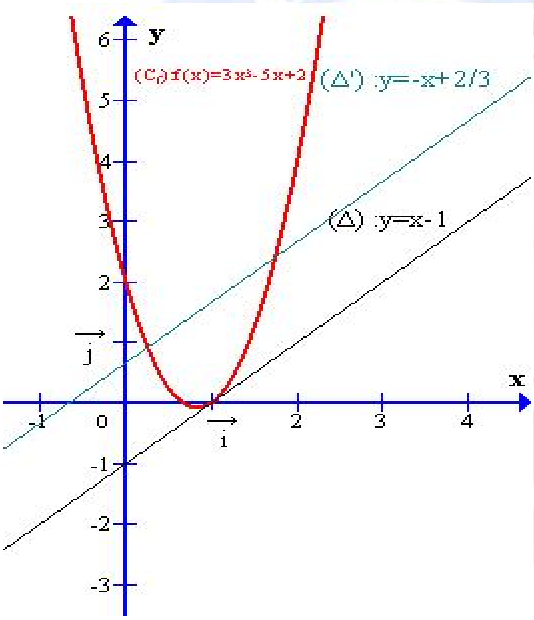
يستحسن إبراز النقاط التالية:

- تقاطع (C_f) مع محاور المعلم.

مع محور الفواصل : $(1;0)$; $(\frac{2}{3};0)$.

مع محور التراتيب: $(0;2)$.

* النهاية الصغرى: $\left(\frac{5}{6};\ f(\frac{5}{6})\right)$.



* رسم كلا من (Δ) و (Δ') .

$(\Delta'):y=-x+\frac{2}{3}$ ، $(\Delta):\ y=x-1$.

.15

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـــ:

$g(x)=3-x$ و $f(x)=x^2-x-1$.

1) حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$$

2) حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ لكونها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية و لدينا : $f'(x)=2x-1$.

* إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3) جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4) معادلة المماس T للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 2.

لدينا : $(T): y= f'(2)(x-2)+f(2)$

$(T): y=3x-5$

5) حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ جبريا.

$f(x)=g(x)$ يكافئ : $x^2-x-1=3-x$ أي : $x^2-4=0$.

لدينا الحلول : $x=2$ أو $x=-2$.

6) تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) و (D).

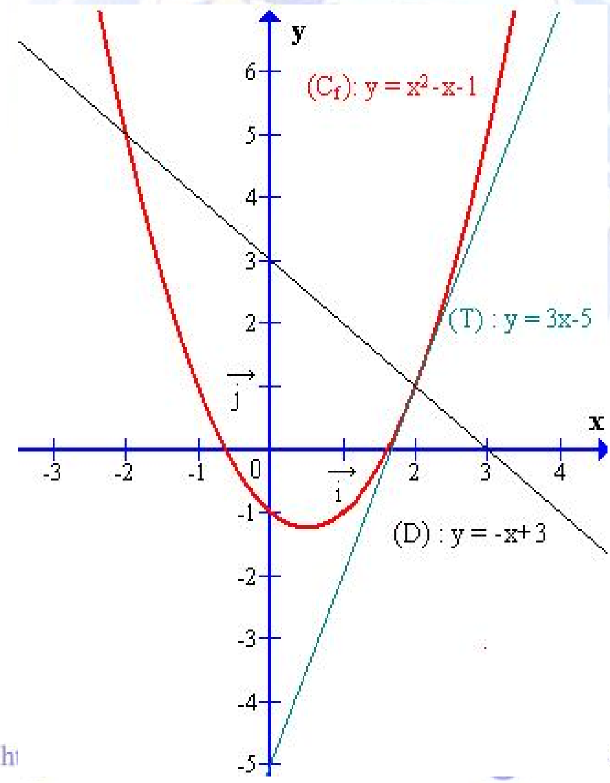
نتحصل على فواصل هذه النقاط بحل المعادلة $f(x)=g(x)$.

و حسب السؤال السابق لدينا : $x=2$ أو $x=-2$ و عليه فإن :

$(C_f)\cap(D)=\{(-2;5);(2;1)\}$.

7) رسم المنحنى (C_f) و المماس (T) و المستقيم (D) .

(C_f) $y=f(x)=x^2-x-1$ ، $(T): y=3x-5$ ، $(D): y=-x+3$



16.

1) دراسة تغيرات الدالة f حيث $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 4$

الدالة f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ لكونها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة و لدينا : $f'(x) = 3x^2 - 6x - 5$ تتعدم الدالة $f'(x)$ من أجل القيمتين $x' = \dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}$ و $x'' = \dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}$.

*إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		$\frac{3-2\sqrt{6}}{3}$		$\frac{3+2\sqrt{6}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

وعليه فإن الدالة f متزايدة في $\left]-\infty; \dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}\right] \cup \left[\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}; +\infty\right[$

ومتناقصة في المجال $\left[\dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}; \dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}\right]$.

2) إثبات أن النقطة $S(1;-3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C).

لإثبات أن النقطة $S(1;-3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C) يجب أن نبين أن $f''(x)$ تتعدم مغيرة إشارتها عند القيمة 1 و $S(1;-3)$ نقطة من (C_f).

* لنحسب $f(1) = -3$ و عليه فإن $S(1;-3)$ عنصر من (C_f) لنحسب $f''(x)$.

الدالة $x \xrightarrow{f'} 3x^2 - 6x + 5$ قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$

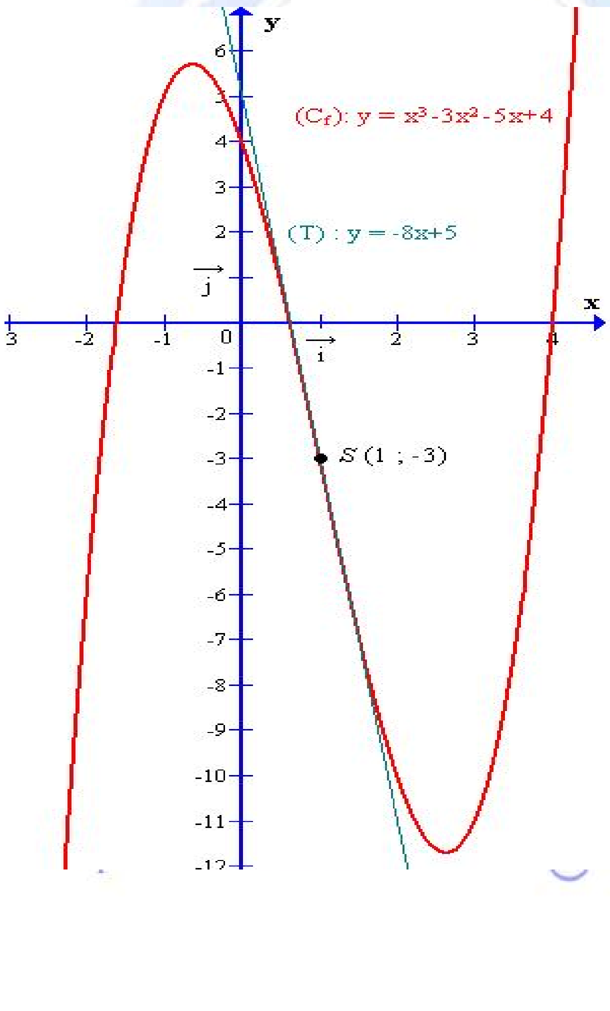
ولدينا : $f''(x)=6(x-1)$ وكما هو ظاهر فإن $f''(x)$ تتعدم مغيرة إشارتها عند القيمة 1 وعليه فإن النقطة $S(1;-3)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

3) **رسم** (C_f) .

$(C_f):\ f(x)=x^3-3x^2-5x+4$.

يستحسن إبراز النقطة $S(1;-3)$ ورسم المماس (T) للمنحنى عند النقطة (S) .

$(T):-8x+5$.



.17

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{13}{12}$$

1) حساب النهايات.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{3}x^3)=+\infty \;;\; \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{3}x^3)=-\infty$$

2) حساب المشتقة $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها على $\mathbb{R}$.

الدالة f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ لكونها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة و لدينا : $f'(x)=x^2-x-2$.

$f'(x)=0$ يعني $x=-1$ و $x=2$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) إثبات أن النقطة $I(\frac{1}{2};0)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

* النقطة $I(\frac{1}{2};0)$ تنتمي إلى (C_f) إذا كان : $f(\frac{1}{2})=0$.

لنحسب $f(\frac{1}{2})$ ، $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}-\frac{1}{2}(\frac{1}{4})-2(\frac{1}{2})+\frac{13}{12}$

$$f(\frac{1}{2})=0$$

و عليه فإن النقطة $I(\frac{1}{2};0)$ تنتمي إلى (C_f)

و من جهة أخرى فإن $f''(x)=2x-1$ تنعدم مغيرة إشارتها عند القيمة $x_0=\frac{1}{2}$ و عليه فإن النقطة $I(\frac{1}{2};0)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

5) استنتاج حلول المعادلة : $f(x)=0$.

بما أن $f(x)=0$ فإن $f(x)$ يكتب على الشكل التالي :

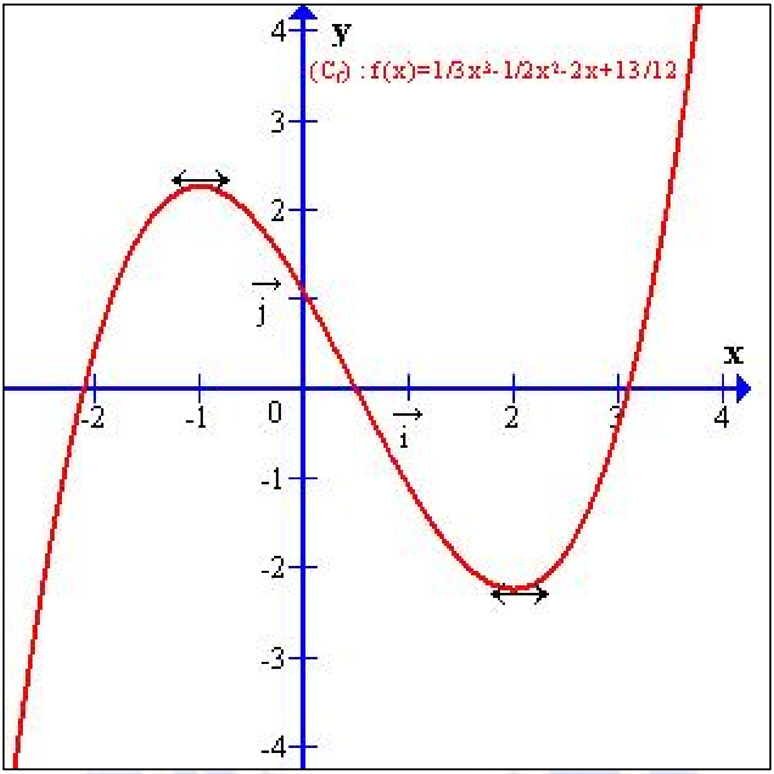
$f(x)=(x-\frac{1}{2})(ax^2+bx+c)$ وبعد المطابقة نتحصل على :

$f(x)=(x-\frac{1}{2})(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{13}{6})$.

$f(x)=0$ معناه $x=\frac{1}{2}$ أو $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{13}{6}=0$ هذه المعادلة تقبل الحلول التالية : $x'=1-3\sqrt{3}$ و $x''=1+3\sqrt{3}$.

6) مثل بيانيا الدالة (C_f) .

$$(C_f):\quad f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{13}{12}$$



.18

1) تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x^3-3x-1$.

(اتجاه التغير و النهايات).

الدالة f معرفة و قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$f'(x)=3x^2-3$ أي $f'(x)=3(x^2-1)$.

* إشارة $f'(x)=3(x^2-1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و عليه فإن الدالة f متزايدة على المجالين $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $[-1;1]$.

* النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty \; ; \; \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$$

2) معادلة المماس T للمنحني (C) الممثل للدالة f عند $x_0=0$.

$(T):\ \ y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $(T):\ \ y=-3x-1$.

3) وضعية المماس T بالنسبة إلى (C_f) .

وضعية المماس T بالنسبة إلى المنحنى (C_f) يحدد بدراسة إشارة الفارق $[f(x)-(-3x-1)]$ أي $\left[x^3-3x-1-(-3x-1)\right]=x^3$.

و عليه فإن : (T) تكون فوق (C_f) عندما يكون : $x\leq 0$.

(T) تكون تحت (C_f) عندما يكون : $x\geq 0$.

4) أ- دراسة تغيرات الدالة $x\xrightarrow{g}x^2-2x+1$.

الدالة g معرفة و قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $g'(x)=2(x-1)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

وعليه فإن g تكون متزايدة على المجال $]1;+\infty[$

g تكون متناقصة على المجال $]-\infty;-1]$.

ب– تحقيق أن النقطة $A(2;1)$ نقطة مشتركة بين (C) و (P) .

المنحنى الممثل للدالة g المعرفة بـــ: $g(x)=(x-1)^2$.

لتحقيق هذا ينبغي أن نتأكد أن $f(2)=g(2)=1$.

$f(2)=8-6-1$ أي $f(2)=1$ و $g(2)=1$.

و هو المطلوب و عليه فإن $A\in(C_f)\cap(P)$.

5) أ– تحقق من أن : $x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$.

ننشر الجداء : $(x-2)(x^2+x+1)=x^3-x^2-x-2x^2-2x-2$

$$=x^3-x^2-x-2$$

و هو المطلوب.

ب– دراسة وضعية P بالنسبة إلى (C_f).

ندرس إشارة الفرق :

$\left[x^3-3x-1-(x^3-2x+1)\right]$ أي $\left[x^3-x^2-x-2\right]$

و حسب نتيجة السؤال أ لدينا $x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$.

و إشارة هذا الفارق هي إشارة $(x-2)$ لأن (x^2+x+1) موجب مهما يكن x عنصر من $\mathbb{R}$.

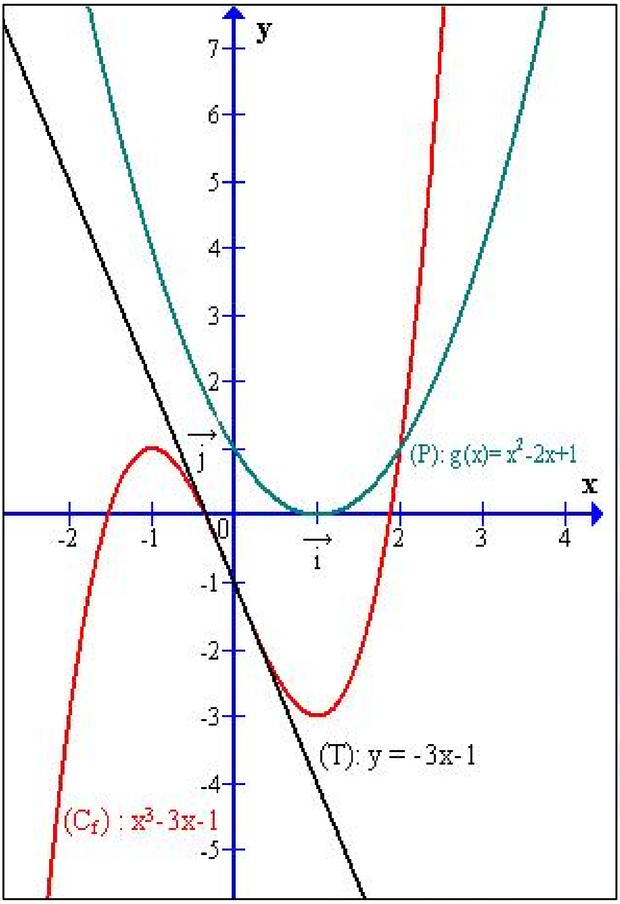
و عليه :

(P) تكون فوق (C_f) عندما يكون : $x\in]-\infty;2]$.

(P) تكون تحت (C_f) عندما يكون: $x\in[2;+\infty[$.

6) رسم المنحنيين (C_f) و P في نفس المعلم.

$(C_f): f(x) = x^3 - 3x - 1$ ، $(P): g(x) = x^2 - 2x + 1$.



.19

المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ بحيث (C_f) تحقق الشروط التالية :

− (C_f) يشمل النقطة $(0;0)$ ويقبل في هذه النقطة مماسا معامل توجيهه يساوي -2 .

نترجم هذا الشرط بـــ: $f(0)=0$ و $f'(0)=-2$.

$f(0)=0$ معناه : $d=0$ ، $f'(0)=-2$ معناه : $c=-2$.

– المماس (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 موازي للمستقيم الذي معادلته $y=3x+1$.

هذا معناه أن $f'(1)=3$ أي $3a+2b=5$.

– النقطة $A(-1;2)$ تنتمي إلى (C_f) .

هذا معناه أن $f'(0)=-2$ أي : $a=b$.

و نعلم أن $3a+2b=5$ أي $a=b=1$.

و أخيرا فإن عبارة $f(x)$ هي $f(x)=x^3+x^2-2x$.

2. تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل.

نحل المعادلة $f(x)=0$ أي $x(x^2+x-2)=0$ و لدينا الحلول:

$x=0$ أو $x=1$ أو $x=-2$.

و لدينا النقاط التالية : $(0;0)$; $(1;0)$ و $(-2;0)$.

3. معادلة المماس T للمنحني (C_f) عند O .

نعلم أنّ $f'(0)=-2$

أو بالحساب لدينا $f'(x)=3x^2+2x-2$

وبالتعويض نجد: $f'(0)=-2$

و $f(0)=0$

ومنه $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$

وأخيرا نجد: $(T): y=-2x$

4. إيجاد فواصل نقط المنحني (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا لمحور الفواصل .

هذا معناه أن : $f'(x_0)=0$ أي $3x^2+2x_0-2=0$.

$f(x)=x^3+x^2+2x$ أو $f(x)=x^3+x^2+2x$.

5. أ– معادلة المماس هي:

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ هذا المماس يشمل النقطة $(0\,;0)$ أي:

$0=f'(a)(-a)+f(a)$ أي $f(a)=af'(a)$.

ب – تعيين النقط المطلوبة .

المعادلة $f(a)=af'(a)$ تكافئ : $2a^2+a=0$

أي : $a(2a+1)=0$

و بما أن : $a=0$ فإن $a=\dfrac{-1}{2}$.

ومنه النقطة هي $\left(\dfrac{-1}{2}\,;\,f(\dfrac{-1}{2})\right)$.

VI.تقويم ذاتي:

أ. اختيار من متعدد

1) إختر الجمل الصحيحة من بين الإقتراحات

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث يعطى جدول تغيراتها كالآتي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

أ− الدالة المشتقة للدالة f تنعدم دون أن تغير من إشارتها على $\mathbb{R}$

ب− الدالة f تقبل نقطة إنعطاف .

ج− الدالة f موجبة على $\mathbb{R}$.

د− $f'(x)=0$.

ب. صحيح أم خاطئ

1) إليك أربعة نصوص، ميّز بين الصحيحة منها و الخاطئة.

أ) نقطة انعطاف منحنى دالة كثير حدود هي نقطة من المنحني.

ب) منحنى كل دالة كثير حدود يقبل نقطة انعطاف.

ج) كل دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة تكون فردية.

د) منحنى كل دالة كثير حدود من الدرجة الثانية يقبل نقطة انعطاف

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x^2-2x+1$.

إليك خمسة نصوص، ميّز بين الصحيحة منها والخاطئة.

أ) منحنى الدالة f يشمل النقطة ذات الإحداثيتين $(1;0)$

ب) معادلة مماس منحنى الدالة f عند 0 هي $y=x+2$.

ج) $(1;0)$ هما إحداثيتا نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f .

د) الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

هـ) المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$.

أ. أجوبة اختيار من متعدد

الإجابة الصحيحة هي ج) الدالة f موجبة على $\mathbb{R}$.

ب. أجوبة صحيح أم خاطئ

الحالة	النصوص الصحيحة	النصوص الخاطئة
1)	أ.	ب . ج . د
2)	أ. د	ب . ج . هـ

VII. إستعد للبكالوريا:

تمرين 1

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x^3-3x+2$.

C المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f و استنتج جدول تغيراتها .

2) برهن أن النقطة A من المنحني C التي فاصلتها $x=0$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى C .

3) أكتب معادلة المماس Δ للمنحنى C في النقطة A .

4) بين أن المستقيم d الذي معادلته $y=2$ يقطع المنحنى C في ثلاث نقط يطلب تعيين إحداثياتها.

5) أحسب $f(2)$ و $f(-2)$ ثم ارسم كلا من Δ و C .

حل

1) أ- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$.

ب- الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا

$f'(x)=3x^2-3x=3(x^2-1)$.

لدينا -1 و 1 هما جذران لثلاثي الحدود x^2-1 و منه جدول الإشارة :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

2) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)$.

f'' تنعدم عند 0 مغيرة إشارتها ، $f''(x)>0$ من أجل $x>0$ و $f''(x)<0$ من أجل $x<0$ و $f(0)=2$. إذن $A(0;2)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى C.

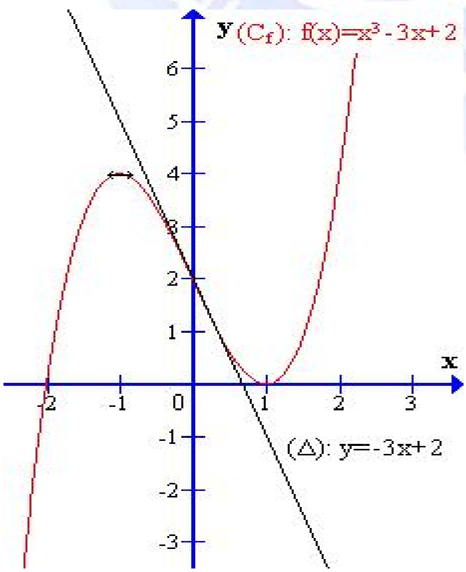
3) $f'(0)=-3$ إذن معادلة للمماس Δ هي : $y=-3x+2$.

4) نحل المعادلة $f(x)=2$ أي $x^3-3x+2=2$ و معناه $x(x^2-3)$ أي $x=0$ أو $x=-\sqrt{3}$.

إذن d يقطع C في نقط $A(0;2)$ ، $B(\sqrt{3};2)$ ، $C(-\sqrt{3};2)$.

5) $f(2)=4$ و $f(-2)=0$.

إنشاء كل من Δ و C .



تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x^3-3x^2$.

C المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايتين للدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

2) جد معادلة المماس Δ للمنحنى C في النقطة 0 .

3) بين أن للمنحنى C مماسين T و T' ميل كل منهما 9 يطلب إيجاد معادلتيهما .

4) أرسم المماسات Δ، T و T' ثم المنحنى C في نفس المعلم .

حل

1) حساب النهايات للدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$.

2) اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها .

الدالة f المعرفة على f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ بإعتبارها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة و لدينا إذا : $f'(x)=3x^2-6x$ أي :

$f'(x)=3x(x^2-2)$ و إشارة f' هي :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و عليه فإن : f متزايدة تماما في المجالين $]-\infty\,;0]\cup[2\,;+\infty[$.

f متناقصة تماما في المجال $[0;2]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

3) معادلة المماس Δ للمنحنى C في النقطة 0.

لدينا $(\Delta): y= f'(0)(x-0)+ f(0)$

$(\Delta): y=0$ هي حامل محور الفواصل.

4) المنحنى (C) يقبل مماسين T و T' ميلهما 9.

بما أن ميل كلا من T و T' يساوي 9 نحل المعادلة $f'(x)=9$

أي $3(x^2-2x-3)=0$ ونتحصل على الحلين :

$x'=-1$ و $x''=3$ ولدينا :

$$(T): y=9(x+1)+ f(-1)$$
$$(T'): y=9(x-3)+ f(3)$$

أي : $(T): y=9x+5$

ومنه $(T)': y=9x$

5) رسم المماسات (Δ)، (T) و (T')

معادلة (Δ) هي : $y=0$ حامل محور الفواصل.

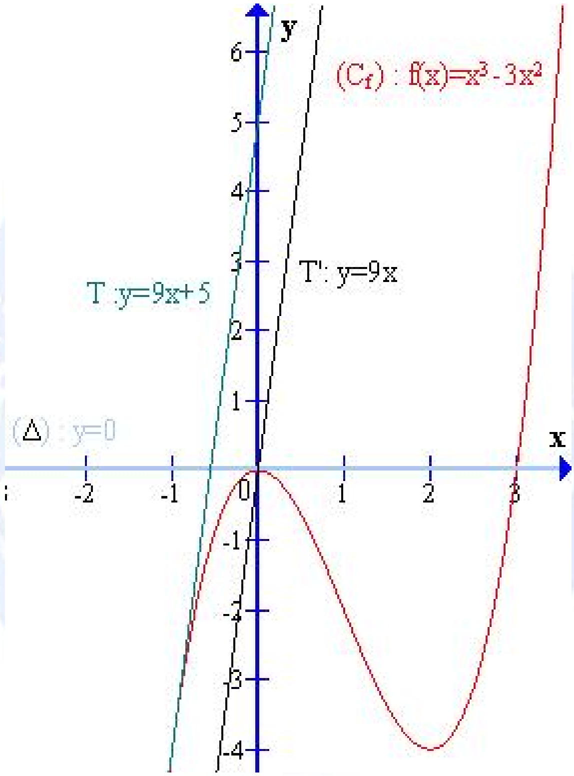
معادلة (T) هي : $y=9x+5$.

معادلة (T') هي : $y=9x$.

- رسم المنحنى (C) .

-إبراز نقط مميزة : $f(0)=0$ مبدأ المعلم نقطة من (C).

$f(x)=0$ تكافئ : $x^2(x-3)=0$ أي $(0;0)$ و $(3;0)$ نقطتين من (C)



تمرين 3 (9نقاط)

بكالوريا جوان 2008 شعبة آداب و فلسفة + لغات أجنبية

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^3 - 3x$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم معامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أحسب $f(-2)$ ، $f(-1)$.

2) أ- أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

ب- أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها.

ج-شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في ثلاث نقاط يطلب تعيين إحداثيي كل منها.

ج- اكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

* ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ). ماذا تستنتج؟

د- أرسم (C_f) و (Δ).

حل

1) حساب $f(-2)$ ، $f(-1)$.

$f(x) = x^3 - 3x$ ومنه $f(-2) = -8 + 6$ أي $f(-2) = -2$ ، $f(-1) = +2$.

2) أ- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3) = +\infty$.

ب- حساب $f'(x)$ ثم دراسة إشارتها.

الدالة f قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}$ بإعتبارها دالة كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة: $f'(x) = 3x^2 - 3$ أي $f'(x) = 3(x^2 - 1)$.

$f'(x) = 0$ يكافئ $x^2 - 1 = 0$ أي $x = 1$ أو $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+2$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ معناه $x(x^2 - 1) = 0$ و لدينا الحلول التالية : $x = 0$

أو $x = +\sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$.

ب− بما أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول هي $x=0$ ، $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$ فإن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في النقاط $(0;0)$، $(\sqrt{3}\ ;\ 0)$ و $(-\sqrt{3}\ ;\ 0)$.

ج) معادلة المماس (Δ) للمنحنى عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

$(\Delta): y= f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $(\Delta): y=-3x$.

* دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ) .

لدراسة هذه الوضعية ندرس إشارة الفارق $[\,f(x)-(3x)]$.

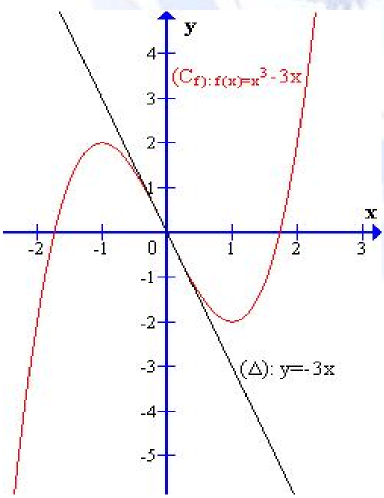
$[\,f(x)-(3x)]=x^3$ و هي إشارة العدد الحقيقي x .

لدينا : عندما يكون $x\in\,]-\infty\,;0[$ فإن (C_f) تكون تحت (Δ).

عندما يكون $x\in\,]0\,;+\infty[$ فإن (C_f) تكون فوق (Δ).

نستنتج أن $x_0=0$ هي فاصلة نقطة إنعطاف $(0;0)$.

د− رسم **المنحنى** (C_f) و (Δ) .



لدينا : $(C_f): y=x^3-3x$.

إبراز النقط التالية:

- النقطة $(0;0)$ هي إنعطاف للمنحنى (C_f)
- (C_f) يقطع محور الفواصل في النقط التالية $(\sqrt{3}\ ;\ 0)$ و $(-\sqrt{3}\ ;\ 0)$
- النقاط $(-1\ ;\ +2)$ و $(1\ ;\ -2)$.
- رسم المماس $(\Delta): y=-3x$

المنحنى يخرق (C) عند النقطة $(0;0)$.

تصميم الإجابة وسلم التنقيط : (9نقاط)

<table>
<tr><th>الإجابة مختصرة</th><th>العلامة</th></tr>
<tr><td>1) $f(-1)=+2$ ، $f(-2)=-2$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>
2) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$
ب) حساب $f'(x)$: $f'(x)=3(x^2-1)$.
إشارة $f'(x)$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>
ج) جدول تغيرات الدالة f .
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow$</td><td>$+2$</td><td>$\searrow$</td><td>-2</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>
</td><td>0,25
0,25
0.5
0.5
1</td></tr>
<tr><td>
3) أ) حلول المعادلة $f(x)=0$.
$f(x)=0$ يكافئ $x(x^2-1)=0$ أي : $x=0$ أو $x=+\sqrt{3}$
أو $x=-\sqrt{3}$
</td><td>1+0.5</td></tr>
</table>

ب) بما أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول فإن (C_f) يقطع محور الفواصل في النقاط $(0;0)$، $(\sqrt{3}\ ;\ 0)$ و $(-\sqrt{3}\ ;\ 0)$	1
ج) معادلة المماس (Δ) للمنحنى عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$. $(\Delta): y= f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $(\Delta): y=-3x$.	1
* وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (Δ). ندرس إشارة الفارق $\left[f(x)-(3x)\right]$ أي $\left[f(x)-(3x)\right]=x^3$ و منه نستنتج : − عندما يكون $x\leq 0$ فإن (C_f) تكون تحت (Δ). − عندما يكون $x\geq 0$ فإن (C_f) تكون فوق (Δ).	1.5
د) رسم المنحنى (C_f) و (Δ) .	1