3. اتجاه تغير دالة

الكفاءات المستهدفة

- تعيين اتجاه تغير دالة باستعمال إشارة الدالة المشتقة
- الربط بين جدول التغيرات والمنحنى الممثل للدالة

تصميم الدرس

دار الحكمة

I. تذكير حول المعادلات والمتراجحات
- إشارة $ax+b$ حيث $b\in\mathbb{R}$ ، $a\in\mathbb{R}^*$
- إشارة ax^2+bx+c حيث $c\in\mathbb{R}$ ، $b\in\mathbb{R}$ ، $a\in\mathbb{R}^*$
- تطبيقات

II. تذكير حول المشتقات
- الدوال المشتقة لدوال مألوفة
- العمليات على الدوال المشتقة
- معادلة المماس
- اتجاه تغير دالة باستعمال إشارة الدالة المشتقة
- تطبيقات

III. ملخص

IV. توظيف المعارف (تمارين + حلول وإرشادات)

V. تقويم ذاتي (اختيار من متعدد + صحيح أم خاطئ)

VI. استعد للبكالوريا (مسائل محلولة مع سلّم التنقيط)

دار الحكمة

عرف عن أبي جعفر المنصور عنايته بنشر العلوم المختلفة، ورعايته للعلماء من المسلمين وغيرهم، وقيامه بإنشاء "بيت الحكمة" في قصر الخلافة ببغداد، وإشرافه عليه بنفسه، ليكون مركزا للترجمة إلى اللغة العربية. وقد أرسل أبو جعفر إلى إمبراطور الروم يطلب منه بعض كتب اليونان فبعث إليه بكتب في الطب والهندسة والحساب والفلك، فقام نفر من المترجمين بنقلها إلى العربية.

وصل إلى بيت الحكمة في عهد هارون الرشيد دفعة كبيرة من الكتب ولم يعد يقتصر على حفظها بل وضم إلى جانب المترجمين الناسخين والخازنين الذين يتولون تخزين الكتب، والمجلدين وغيرهم من العاملين.

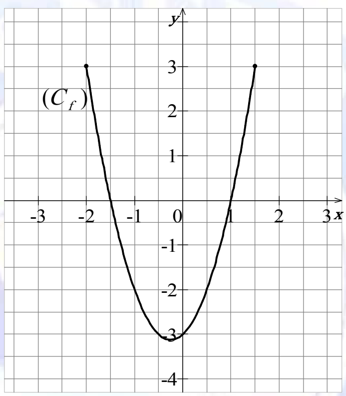
بلغ نشاط بيت الحكمة ذروته في عهد الخليفة المأمون الذي أولاه عناية فائقة، ووهبه كثيرا من المال والوقت حتى أنّه استقدم من قبرص خزانة كتب الروم. وبذلك أصبح بيت الحكمة خزانة كتب، ومركز ترجمة وتأليف و مركز للأبحاث ورصد النجوم، ومن أهم ما ميز بيت الحكمة هو تعدد المصادر وهي الكتب القديمة و التراجم و الكتب التي ألفت للخلفاء والكتب التي نسخت من ما جعله مجمعا علميا إلى أن اجتاح المغول بغداد سنة (656هـ = 1258م)حيث تم تدمير معظم محتوياته في ذلك الوقت.

I. تذكير حول المعادلات والمتراجحات:

نشاط1

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left[-2\,;\frac{3}{2}\right]$ بـ $f(x)=2x^2+x-3$:

ليكن (C_f) المرسوم أدناه تمثيلها البياني في معلم.



باستعمال التمثيل البياني للدالة أجب عن الأسئلة الآتية:

1. عين صور الأعداد الحقيقية -2 و $\frac{-1}{2}$ و 0 .
2. حل المعادلة $f(x)=-3$
3. حل المتراجحة $f(x)>-3$
4. حل المعادلة $2x^2+x-3=0$
5. حل المتراجحة $2x^2+x-3\leq 0$
6. حدد في جدول، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$

حل

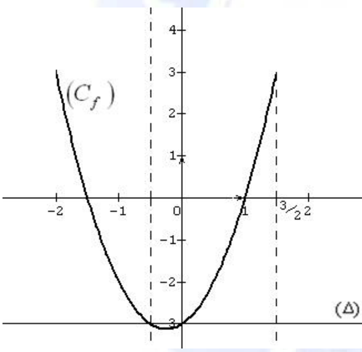
1. صورة العدد -2 هي ترتيب النقطة ذات الفاصلة $x=-2$ وباستعمال المنحنى (C_f) الممثل للدالة f نقرأ صورة العدد -2 هي العدد 3.

صورة العدد $\frac{-1}{2}$ هي ترتيب النقطة التي فاصلتها $x=\frac{-1}{2}$ ونحصل بقراءة بيانية في المنحنى على صورة العدد $\frac{-1}{2}$ وهي العدد -3.

صورة العدد 0 هي -3 **(**تقاطع المنحنى (C_f) مع محور التراتيب**)**.

2. حل المعادلة $f(x)=-3$

نسمي (Δ) المستقيم ذي المعادلة $y=-3$



وهو مستقيم يوازي محور الفواصل بيانيا فإن حلول المعادلة $f(x)=-3$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) لأننا عندما نضع $y=f(x)$ ونضع من جهة أخرى $y=-3$ نحصل على جملة المعادلتين
$$\begin{cases} y=f(x) \cdots (C_f) \\ y=-3 \quad \cdots (\Delta) \end{cases}$$

وبقراءة بيانية في المنحنى نلاحظ أنّ المستقيم يقطع المنحنى في نقطتين فاصلتاهما $\frac{-1}{2}$ و 0 ومنه نحصل على حلين هما $x=\frac{-1}{2}$ و $x=0$.

3. حل المتراجحة $f(x)>-3$

نلاحظ أن وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) تتميّز بثلاث وضعيات:

*وضعية فيها جزء من المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ)

*الوضعية الثانية فيها جزء من المنحنى (C_f) تقع تحت المستقيم (Δ).

*الوضعية الثالثة نلاحظ فيها أنّ (Δ) يقطع (C_f).

بهذا فإن حلول المتراجحة: $f(x) > -3$ هي فواصل نقاط الجزء من المنحنى الذي يقع فوق المستقيم (Δ).

بقراءة بيانية مباشرة في الشكل نحصل على حلول المتراجحة وهي المجموعة S : $S = \left[-2\,;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]0\,;\frac{3}{2}\right]$

4. حل المعادلة $2x^2 + x - 3 = 0$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى مع محور الفواصل.

لأنّ المعادلة $2x^2 + x - 3 = 0$ هي نفسها المعادلة $f(x) = 0$ التي تنتج من الجملة $\begin{cases} y = f(x) & \cdots (C_f) \\ y = 0 & \cdots (x'x) \end{cases}$

وبقراءة بيانية أيضا نجد أن المنحني يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما $\frac{-3}{2}$ و 1 ومنه للمعادلة حلين هما $x = \frac{-3}{2}$ أو $x = 1$.

5. حل المتراجحة $2x^2 + x - 3 \leq 0$

معادلة المنحنى (C_f) هي $y = f(x)$

معادلة حامل محور الفواصل هي $y = 0$

بيانيا فإن حلول المتراجحة $2x^2 + x - 3 \leq 0$ هي فواصل الجزء من المنحنى الذي يقع تحت محور الفواصل بالإضافة إلى نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل وبالقراءة بيانية في الشكل نحصل على الحلول الآتية: $x = \left[\frac{-3}{2};1\right]$

6. حدد في جدول، حسب قيم x ، إشارة $f(x)$

بيانيا يتم معرفة إشارة $f(x)$ بمقارنة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل.

- حلول المتراجحة $f(x)<0$ هي الأعداد الحقيقية x التي تنتمي إلى المجال $\left]\frac{-3}{2};1\right[$ (و هذا حسب نتائج السؤال رقم 5).

- حلول المعادلة: $f(x)>0$ هي الأعداد الحقيقية x التي تنتمي إلى المجموعة $\left]1;\frac{3}{2}\right] \cup \left[-2;\frac{-3}{2}\right[$.

نشاط2

باستعمال عبارة الدالة f أجب عن أسئلة النشاط السابق الوارد في الصفحة 2.

حل

1. تعيين صور الأعداد الحقيقية -2 و $\frac{-1}{2}$ و 0.

عبارة الدالة f هي $f(x)=2x^2+x-3$ ويتم تعيين صور الأعداد الحقيقية -2 ، $\frac{-1}{2}$ و 0 بحساب $f(-2)$ ، $f\left(\frac{-1}{2}\right)$ و $f(0)$.

لدينا: $f(-2)=2(-2)^2+(-2)-3$ ، $f(-2)=3$

$f\left(\frac{-1}{2}\right)=2\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)-3$ ، $f\left(\frac{-1}{2}\right)=-3$

$f(0)=2\times0^2+0-3$ ، $f(0)=-3$

.2 حل المعادلة $f\left(x\right)=-3$

بتعويض عبارة $f\left(x\right)$ تصبح المعادلة $f\left(x\right)=-3$ متكافئة مع المعادلة $x(2x+1)=0$ معناه أن : $x=0$ أو $x=-\frac{1}{2}$

.3 حل المتراجحة $f\left(x\right)>-3$

نعوض عبارة $f\left(x\right)$ في المتراجحة المعطاة ونحصل على ما يأتي:

$2x^2+x-3>-3$ معناه: $x\left(2x+1\right)>0$.

يمكن استعمال الجدول الآتي لتحديد إشارة: $x\left(2x+1\right)$

x	-2		$\frac{-1}{2}$		0		$\frac{3}{2}$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x(2x+1)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

بقراءة في الجدول نستنتج أن حلول المتراجحة $f\left(x\right)>-3$ هي المجموعة $S=\left[-2\,;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0\,;\frac{3}{2}\right]$.

.4 حل المعادلة $2x^2+x-3=0$

يمكن ملاحظة أن العدد $x=1$ هو حل للمعادلة للمعطاة ونستنتج الحل الآخر $x=\frac{-3}{2}$.

نتحقق باستعمال مميز هذه المعادلة $\Delta = b^2 - 4ac$ أنّ حلولها هي $x=1$ أو $x=\frac{-3}{2}$.

5. حل المتراجحة $2x^2 + x - 3 \leq 0$

نعلم من نتائج السؤال الرابع أن: $x=1$ و $x=\frac{-3}{2}$ جذران لكثير الحدود: $2x^2+x-3$ وعليه من دراسة إشارة $2x^2+x-3$ فإن مجموعة الحلول للمتراجحة هي المجموعة $\left[\frac{-3}{2};1\right]$

6. تعيين إشارة $f(x)$

نعلم أنّ $x=1$ و $x=\frac{-3}{2}$ يمثلان جذرين للمعادلة $f(x)=0$ إذا $f(x)$ يكتب على الشكل $f(x)=2(x-1)(x+\frac{3}{2})$ لدينا الجدول الآتي:

x	-2		$\frac{-1}{2}$		0		$\frac{3}{2}$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{3}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$2(x-1)(x+\frac{3}{2})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

قراءة الجدول تسمح لنا تحديد إشارة $f(x)$ كما يأتي:

يكون : $f(x)>0$ عندما يكون : $x \in \left[-2;\frac{-3}{2}\right] \cup [1;2]$

يكون : $f(x)<0$ عندما يكون : $x \in \left[\frac{-3}{2};1\right]$

1. إشارة $ax+b$ حيث $b\in\mathbb{R}$ ، $a\in\mathbb{R}^*$

جدول الإشارة

a ، b عددان حقيقيان حيث $a\neq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
إشارة $ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

ملاحظة

يؤول حل متراجحة من الشكل $ax+b\leq 0$ (أو $ax+b\geq 0$) إلى دراسة إشارة $ax+b$.

مثال

1) ادرس إشارة $f(x)$ حيث $f(x)=-2x+1$.

2) استنتج حلول كل من المتراجحتين: $f(x)<0$ و $f(x)>0$.

حل

1) من عبارة $f(x)=-2x+1$ لدينا: $a=-2$ ؛ $b=1$.

بتطبيق للمبرهنة السابقة لدينا:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

2) كما ورد في الملاحظة السابقة فإن حل المتراجحة $f(x)<0$ و $f(x)>0$ يتم من خلال نتائج إشارة $f(x)$ الذي هو معلوم في السؤال السابق (1).

لدينا حلول المتراجحة $f(x)<0$ هي المجموعة $S_1 = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

حلول المتراجحة $f(x)>0$ هي المجموعة $S_2 = \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$.

تطبيق

ادرس حسب قيم x إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ حيث:

$$g(x) = -2x+3 \text{ ، } f(x) = 3x+6$$

طريقة

لدراسة إشارة $ax+b$ مع $(a \neq 0)$نقوم أولا بحل المعادلة $ax+b=0$ ثم نحدّد إشارة a وأخيرا نستنتج الإشارة

حل

1. $3x+6=0$ يعني $3x=-6$ أي $x=-2$. $3x+6$ هو من الشكل $ax+b$ مع $a=3$ وبما أن $a>0$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
إشارة $3x+6$		$-$	0	$+$	

2. $-2x+3=0$ يعني $-2x=-3$ أي $x=\frac{3}{2}$. $-2x+3$ هو من الشكل $ax+b$ مع $a=-2$ وبما أن $a<0$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
إشارة $-2x+3$		$+$	0	$-$	

2. إشارة ax^2+bx+c حيث $c\in\mathbb{R}$ ، $b\in\mathbb{R}$ ، $a\in\mathbb{R}^*$

a ، b و c أعداد حقيقية حيث $a\neq 0$

لدراسة إشارة ax^2+bx+c نميز ثلاث حالات وذلك حسب إشارة المميز Δ حيث $\Delta=b^2-4ac$

الحالة الأولى: $\Delta<0$

ليس للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ حلولا ولدينا:

x	$-\infty$ $+\infty$
إشارة ax^2+bx+c	إشارة a

مثال

تحقق أن $f(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي x، حيث $f(x)=3x^2+x+5$

*المعادلة $3x^2+x+5=0$ لا تقبل حلا لأنّ $\Delta=-59$

إذن نحن أمام الحالة الأولى حيث $a=3$ أي $a>0$

بما أنّ إشارة $3x^2+x+5$ هي إشارة a أي إشارة العدد 3 فإنّ $f(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

الحالة الثانية: $\Delta=0$

للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ جذرا مضاعفا $x'=-\dfrac{b}{2a}$ ولدينا:

x	$-\infty$	x'	$+\infty$
إشارة ax^2+bx+c	إشارة a	0	إشارة a

مثال

تحقق أنّ $f(x)<0$ ، من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ حيث $f(x)=-x^2+2x+1$.

لدينا المعادلة $-x^2+2x+1=0$ تقبل حلا مضاعفا $x=1$ لأن $\Delta=0$.

وعليه فإن إشارة $f(x)$ هي إشارة $a=-1$ مهما يكن $x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

معناه $f(x)<0$ على المجموعة $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

الحالة الثالثة: $\Delta>0$

للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ جذران متمايزان $x'=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

و $x''=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

نفرض أنّ $x'<x''$ حتى نتمكن من ترتيبهما في الجدول الموالي (يمكن فرض العكس)

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
إشارة ax^2+bx+c		إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a	

ملاحظة هامة

1. يؤول حل كل من المتراجحتين $ax^2+bx+c\geq 0$ و $ax^2+bx+c\leq 0$ إلى دراسة إشارة ax^2+bx+c .

2. لدراسة إشارة ax^2+bx+c نتبع الخطوات الآتية:

- نحسب المميز Δ ثم نتعرف على إشارته من خلال قيمته التي نجدها.
- نتأكد من مطابقة النتيجة التي نتوصل إليها مع واحدة من الحالات الثلاثة السابقة.
- نعين الإشارة حسب كل حالة.

فمثلا إذا كان $\Delta > 0$ فإنّ للمعادلة جذرين وعليه نستنتج الإشارة كما هو موضح في المثال الموالي.

مثال

ادرس حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

*المعادلة $3x^2 + 2x - 5 = 0$ تقبل حلين متمايزين لأن $\Delta = 65$.

الحلان هما $x' = 1$ و $x'' = \frac{-5}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{-5}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

تطبيق

ادرس حسب قيم x إشارة كل من $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ حيث:

$f(x) = -3x^2 + x - 2$ ، $g(x) = -2x^2 - 3x + 5$ ، $h(x) = 5x^2 - 3x - 2$

حل

1. لدينا $\Delta = -23$ ومنه ليس للمعادلة $-3x^2 + x - 2 = 0$ حلول.

العبارة $-3x^2 + x - 2 = 0$ هي من الشكل $ax^2 + bx + c$ مع $a = -3$ وبما أنّ $\Delta < 0$ و $a < 0$ فإنّ:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
إشارة $f(x) = 3x^2 + x + 2$	$-$

إذن $f(x) < 0$ من أجل كل عدد حقيقي x .

2. لدينا $\Delta = 49$ ومنه للمعادلة $-2x^2 - 3x + 5 = 0$ جذران هما $x' = \frac{3+7}{-4} = \frac{-5}{2}$ و $x'' = \frac{3-7}{-4} = 1$.

العبارة $-2x^2-3x+5$ هي من الشكل ax^2+bx+c مع $a=-2$

وبما أنّ $\Delta > 0$ و $a<0$ فإنّ:

x	$-\infty$		$\frac{-5}{2}$		1		$+\infty$
إشارة $g(x)=-2x^2-3x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه نستنتج أنّ:

* $g(x)>0$ من أجل $x\in\left]-2,5;1\right[$ ،

* $g(x)<0$ من أجل $x\in\left]-\infty;-2,5\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ ،

* $g(x)=0$ من أجل $x=-2,5$ أو $x=1$.

3. لدينا $\Delta=49$ و منه للمعادلة $5x^2-3x-2=0$ جذران هما $x'=\frac{3-7}{10}=\frac{-2}{5}$ و $x''=\frac{3+7}{10}=1$.

العبارة $5x^2-3x-2$ هي من الشكل ax^2+bx+c مع $a=5$ وبما أنّ $\Delta>0$ و $a>0$ فإنّ :

x	$-\infty$		$\frac{-2}{5}$		1		$+\infty$
إشارة $h(x)=5x^2-3x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه نستنتج أنّ :

* $h(x)>0$ من أجل $x\in\left]-\infty;-0,4\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ ،

* $h(x)<0$ من أجل $x\in\left]-0,4;1\right[$ ،

* $h(x)=0$ من أجل $x=-0,4$ أو $x=1$.

II. تذكير حول المشتقات:

1. الدوال المشتقة لدوال مألوفة

a ، b و k أعداد حقيقية. f دالة و f' دالتها المشتقة.

$f(x)$	k	$ax+b$	x^2	x^n مع $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{x}$
$f'(x)$	0	a	$2x$		$-\frac{1}{x^2}$
مجالات قابلية الاشتقاق	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

أمثلة

- الدالة $x \mapsto 2x-3$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي الدالة $x \mapsto 2$
- الدالة $x \mapsto x^3$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي الدالة $x \mapsto 3x^2$

2. العمليات على الدوال المشتقة

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ k عدد حقيقي.

$\frac{f}{g}$	$\frac{1}{g}$	$f\,g$	$k\,f$	$f+g$	الدالة
باستثناء قيم x من I التي تحقق $g(x)=0$		I	I	I	قابلة للاشتقاق على
$\frac{f'g-g'f}{g^2}$	$-\frac{g'}{g^2}$	$f'g+g'f$	$k\,f'$	$f'+g'$	دالتها المشتقة هي

أمثلة

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=-2x+1$ ؛ $g(x)=x^2+1$

عين الدوال المشتقة للدوال: $(f+g)$ ؛ $(-3f)$ ؛ $(f\times g)$ ؛ $\frac{1}{g}$ ؛ $\frac{7}{g}$.

حل

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ باعتبارها دالة تآلفية من الشكل $ax+b$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود من الدرجة الثانية.

لدينا مهما يكن $x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=-2$ و $g'(x)=2x$.

$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$ أي $(f+g)'(x)=-2+2x$

$(-3f)'(x)=-3f'(x)$ أي $(-3f)'(x)=-3(-2)=+6$.

$(f\times g)'(x)=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$ أي $(f\times g)'(x)=2(x^2+1)-2x(-2x+1)$

$(f\times g)'(x)=2x^2-2x-2$

الدالة $x\mapsto\frac{1}{g(x)}$ قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأن $x^2+1>0$ من أجل $x\in\mathbb{R}$

لدينا $\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=\frac{-g'(x)}{g^2(x)}$ ومنه $\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=\frac{-2x}{x^2+1}$

الدالة $x\mapsto\frac{f(x)}{g(x)}$ قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأن $x^2+1>0$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g(x)}{g^2(x)}$$

أي $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{-2(x^2+1)-(-2x+1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

ومنه $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{-6x^2-2x-2}{(x^2+1)^2}$$

3. معادلة المماس

مبرهنة

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم إذا قبلت f الاشتقاق عند a من I فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;\, f(a))$ مماسا معامل توجيهه $f'(a)$

ومعادلته: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

مثال

عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 2 حيث $f(x) = x^2 + 1$.

* لتعيين معادلة (Δ) نوظف ما جاء في المبرهنة السابقة حيث أعطي الشكل العام لمعادلة المماس في النقطة ذات الفاصلة a وهو:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

بالنسبة لهذا المثال لدينا $a = 2$.

منه $(*) ....y = f'(2)(x-2) + f(2)$

لدينا $f(x) = x^2 + 1$ إذن $f'(x) = 2x$

بالتعويض عن x بالعدد 2 في عبارة $f'(x)$ نجد: $f'(2) = 4$

و بالتعويض عن x بالعدد 2 في عبارة $f(x)$ نجد: $f(2) = 5$

نعوض الآن في المعادلة $(*)$ فنجد : $(\Delta) : y = 4x - 3$.

4. اتجاه تغير دالة باستعمال إشارة الدالة المشتقة

مبرهنة

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x) < 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على I.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة على

ملاحظات

- تبقى المبرهنة صحيحة في الحالتين الأولى والثانية إذا انعدمت $f'(x)$ من أجل عدد منته من قيم x.
- دراسة اتجاه تغير دالة يعني تعيين المجالات التي تكون فيها الدالة متزايدة تماما، متناقصة تماما أو ثابتة.

تطبيقات

تطبيق 1

عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ في كل حالة من الحالات الآتية :

$f(x) = -3x+1$ (1)، $f(x) = x^2 - 4x + 5$ (2)، $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + 3$ (3)

حل

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=-3$.
2. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $f'(x)=2x-4$.
3. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $f'(x)=6x^2-2x+5$.

تطبيق2

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$.

1. عين الدالة المشتقة للدالة f .
2. أكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0.

حل

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ولدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ،

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-1(2x+3)}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x-3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

2. معادلة (Δ) هي $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

أي $y=f'(0)\times x+f(0)$

بما أن $f(0)=\dfrac{2(0)+3}{0+1}$ و $f'(0)=\dfrac{-1}{(0+1)^2}=-1$

فإنّ $(\Delta): y=-x+3$.

تطبيق 3

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-3;2]$ بـِ: $f(x)=x^2+x$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة f .
2. عين معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها -2.
3. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنى (C_f) والمماس (Δ) .

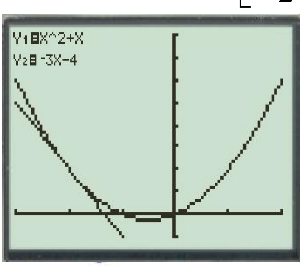
حل

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $[-3;2]$ ولدينا من أجل كل x من $[-3;2]$، $f'(x)=2x+1$.

$2x+1=0$ يعني $2x=-1$ أي $x=-\frac{1}{2}$ و منه إشارة $f'(x)$ هي :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$-$	0	$+$	

نستنتج من إشارة $f'(x)$ أن الدالة f متناقصة تماما على $\left[-3;-\frac{1}{2}\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};2\right]$.



2. معادلة (Δ) هي $y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$

لدينا $f(-2)=2$ و $f'(-2)=-3$.

نجد بعد التعويض: $y=-3x+4$.

3. تمثيل (C_f) و (Δ) على شاشة حاسبة بيانية.

III. ملخص:

1. حل متراجحة

حل متراجحة من الشكل $ax+b\geq 0$ (أو $ax+b\leq 0$)
أو $ax^2+bx+c\geq 0$ (أو $ax^2+bx+c\leq 0$) يتم بدراسة إشارة كلاّ من $ax+b$ و ax^2+bx+c .

2. إشارة ax^2+bx+c حيث $c\in\mathbb{R}$ ، $b\in\mathbb{R}$ ، $a\in\mathbb{R}^*$

الحالة الأولى: $\Delta<0$

إشارة ثلاثي الحدود هي إشارة a على $\mathbb{R}$

الحالة الثانية: $\Delta=0$

إشارة ثلاثي الحدود هي إشارة a على $\mathbb{R}-\{x_0\}$ حيث x_0 هي حل للمعادلة $ax^2+bx+c=0$

الحالة الثالثة : $\Delta>0$

إشارة ثلاثي الحدود هي إشارة a على $\mathbb{R}-\{x_0,x_1\}$ حيث x_0 و x_1 هما حلا المعادلة $ax^2+bx+c=0$

3. اتجاه تغير دالة

لدراسة تغير الدالة يجب دراسة إشارة الدالة المشتقة.

4. معادلة المماس

إذا كانت الدالة f قابلة الاشتقاق عند القيمة x_0 فإن المنحنى الممثل للدالة f يقبل مماسا عند النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ معادلته هي:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

IV. توظيف المعارف:

أ. تمارين

1. ادرس حسب قيم x إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ حيث:

$$g(x) = 3x+5 \quad ، \quad f(x) = 3x-5$$

2. إليك جدول تغيرات كل دالة من الدالتين f و g . أدرس إشارة كل منهما على المجال المعطى.

x	-1	3	5
$f(x)$		0	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$		0	

3. عين الدالة المشتقة للدالة f في كل من الحالات الآتية :

1) $f(x) = 5-2x$

2) $f(x) = -2x^2+3x-10$

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + 1$

4. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=3x^3$

1. أحسب العدد المشتق للدالة f من أجل القيمة 3.
2. عين معادلة المماس Δ للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0.

5. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يأتي: $f(x)=x^2-5x+4$

و (ρ) منحنيها الممثل في المعلم $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1. برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و احسب دالتها المشتقة.
2. أكتب معادلة لمماس المنحنى (ρ) عند نقطته $E(0\,;4)$.
3. هل توجد نقطة M من (ρ) يكون مماسه عندها موازيا للمستقيم ذي المعادلة $y=\frac{1}{2}x$ ؟.
4. a عدد حقيقي . أكتب معادلة لمماس المنحنى (ρ) عند النقطة ذات الفاصلة a .
5. استنتج أن المنحنى (ρ) يقبل مماسين كل منهما يشمل مبدأ المعلم O.

6. باستعمال المشتقة، ادرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على المجال D في كل حالة من الحالات الآتية:

(1 $\quad D=\,]0\,;+\infty[\ ,\ f(x)=\dfrac{-3}{x}$

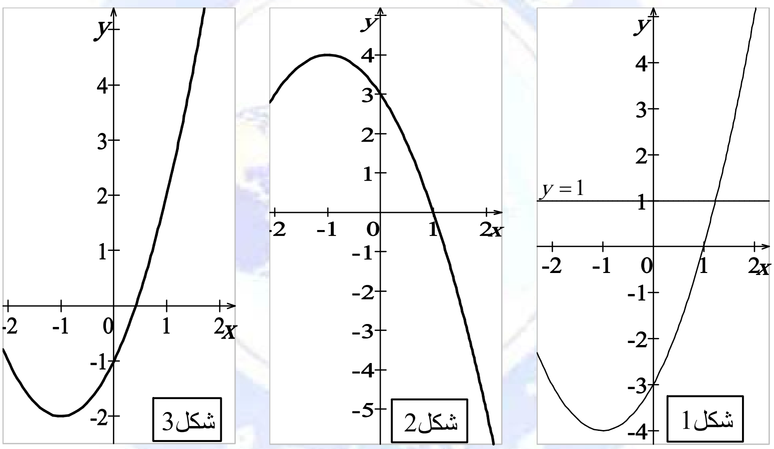
(2 $\quad D=\,]1\,;+\infty[\ ,\ f(x)=\dfrac{x}{1-x}$

(3 $\quad D=\,]-\infty\,;-1[\ ,\ f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

7. نعتبر فيما يأتي جدول تغيرات دالة f معرفة على المجال $[-2;2]$:

x	-2		-1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

1. من بين التمثيلات البيانية المرسومة أدناه عين المنحنى (C_f) الممثل للدالة f .



2. علما أنه من أجل كل x من $[-2;2]$ ، $f(x)=x^2+bx-3$.

- استنتج من جدول التغيرات معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول b .
- أحسب العدد b ثم استنتج عبارة $f(x)$.

3. أحسب $f'(x)$ ثم إشارتها على المجال $[-2;2]$. قارن نتائجك مع تلك الواردة في جدول التغيرات.

4. تحقق أن النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المنحنى (C_f) .

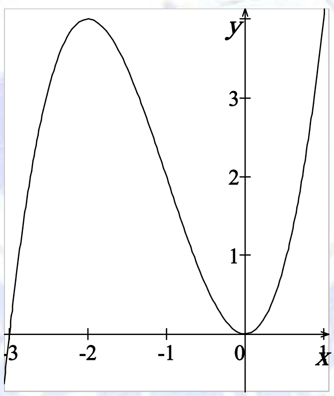
5. أكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة A .

6. حدد بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=1$ في المجال $[-2;2]$ ثم عينها جبريا.

7. أنشئ التمثيل البياني للدالة g المعروفة على المجال $[-2;2]$ بِ :

$g(x)=-f(x)$.

8. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-3;1]$ بتمثيلها البياني (C_f) المرسوم في الشكل أدناه.



1. من بين جداول التغيرات المقترحة عين جدول تغيرات الدالة f

x	-3		-2		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

x	-3		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

x	-3		-2		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

2. علما أن عبارة الدالة f هي كالآتي : $f(x) = x^3 + bx^2 + c$ حيث b و c عددان حقيقيان.

بقراءة بيانية عين كلا من $f(0)$ و $f(1)$ ثم استنتج أنه من أجل كل x من $[-3;1]$: $f(x) = x^3 + 3x^2$.

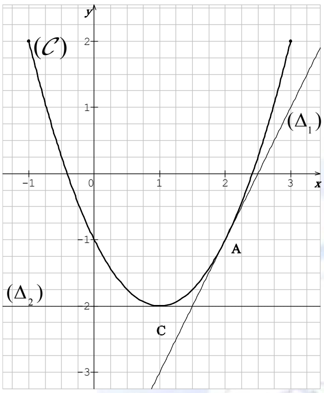
3. لتكن f' الدالة المشتقة f

- أحسب $f'(x)$ ثم ادرس على المجال $[-3;1]$ إشارة $f'(x)$.
- حدد اتجاه تغير الدالة f .قارن مع جدول التغيرات أعلاه.

4. عين معادلة للمستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

5. أعد رسم المنحنى (C_f) ثم أرسم المماس (Δ) .

9. يعطى في هذا التمرين التمثيل البياني $(\mathcal{C})$ لدالة f معرفة على $[-1;3]$ (Δ_1) و (Δ_2) المماسين للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطتين A و C اللتين فاصلتاهما 2 و 1 على الترتيب.



1. بقراءة بيانية، عين $f(0)$ ، $f(1)$ و $f(2)$.
2. أعط اتجاه تغير f على المجال $[-1;3]$
3. بقراءة بيانية، عين $f'(1)$ و $f'(2)$.
4. عين معادلة للمماس (Δ_2) عند النقطة C.
5. عين معادلة للمماس (Δ_1) عند النقطة A.
6. علما أن الدالة f معرفة بالشكل:

$f(x) = x^2 + bx + c$ حيث b و c عددان حقيقيان. عين b و c باستعمال النتائج السابقة.

7. اكتب معادلة المماس للمنحنى في النقطة ذات الفاصلة 0 .

10. باستعمال المعلومات المتوفرة في جدول تغيرات دالة f المعطى

x	-1	0	2	4
$f(x)$	0 ↗	2 ↘	-3 ↗	-2

1. عين $f(0)$.
2. هل النقطتان $A(0;-1)$ و $B(2;-3)$ تنتميان إلى منحني الدالة f ؟
3. أعط تغيرات الدالة f .
4. قارن بين $f(1,5)$ و $f(1,8)$ ثم بين $f(-0,5)$ و $f(-0,8)$.

ب. حلول وإرشادات

1.

دراسة حسب قيم x إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ حيث:

$f(x)=3x-5$ ، $g(x)=3x+5$

عبارة $f(x)$ و $g(x)$ من الشكل $ax+b$ لدينا:

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

نحصل على: عندما $x\in\left]-\infty\,;\frac{5}{3}\right]$ فإن $f(x)\leq 0$

عندما $x\in\left]\frac{5}{3}\,;+\infty\right[$ فإن $f(x)\geq 0$

بالنسبة إلى $g(x)$ نلاحظ أن $g(x)=-f(x)$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

لدينا: $g(x)\geq 0$ عندما $x\in\left]-\infty\,;\frac{5}{3}\right]$

$g(x)<0$ عندما $x\in\left]\frac{5}{3}\,;+\infty\right[$

.2

باستعمال وقراءة على الجدول :

x	-1	3	5
$f(x)$		0	$\nearrow$

نحصل على ما يأتي :

$f(x) \le 0$ عندما $x \in [-1\,;3]$

$f(x) > 0$ عندما $x \in]3\,;5]$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$		0	$\searrow$

من خلال هذا الجدول يتبين لنا :

أن $g(x) \le 0$ عندما $x \in [0\,;+\infty[$

$g(x) > 0$ عندما $x \in]-\infty\,;0[$

.3

تعيين الدالة المشتقة للدالة f في كل من الحالات الآتية:

1) $f(x) = 5-2x$, $f'(x) = 5-2x$

2) $f(x) = -2x^2+3x-10$, $f'(x) = -4x^2+3$

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x+1$, $f'(x) = x^2+3x-1$

.4

1. حساب عدد المشتق للدالة f من أجل القيمة $x_0=3$ حيث $f(x)=3x^3$.

$f'(x)=9x^2$ ومنه $f'(3)=9(3)^2$ أي $f'(3)=81$

2. معادلة المماس Δ للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0 .

لدينا : $(\Delta): y=f'(a)(x-a)+f(a)$ علما أن $a=0$

لدينا : $(\Delta): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ علما أن $y=0$ معادلة المماس (Δ) للمنحنى عند النقطة التي فاصلتها 0 هي حامل محور الفواصل.

.5

لدينا $f(x)=x^2-5x+4$ و (ρ) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. الدالة $x\to x^2-5x+4$ معرفة في $\mathbb{R}$ و هي دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية، فهي قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا مهما يكن x $x\in$ فإن $f'(x)=2x-5$.

2. معادلة لمماس المنحنى (ρ) عند نقطته $E(0;4)$.

نعلم أن معادلة المماس للمنحنى هي : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$a=0$ لدينا: $(\Delta): y=f'(0)(x-0)+f(0)$; $f'(0)=-5$ و $f(0)=4$

و منه نحصل على : $y=-5(x-0)+4$; $y=-5x+4$

3. إذا كان المنحنى (ρ) يقبل مماس عند نقطة M موازي للمستقيم ذي المعادلة $y=\frac{1}{2}x$ ، هذا يعني أن: $f'(x_0)=\frac{1}{2}$ حيث x_0 فاصلة النقطة M ومنه

$f'(x)=2x_0-5$; $2x_0-5=\frac{1}{2}$ ومنه $x_0=\frac{11}{4}$.

إذا توجد نقطة $M\left(\frac{11}{4};\ f(\frac{11}{4})\right)$ حيث المماس للمنحنى (ρ) عند هذه النقطة يكون موازيا للمستقيم $y=\frac{1}{2}x$.

.6

باستعمال المشتقة، ندرس تغير الدالة f المعرفة على المجال D في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $D=]0;+\infty[\ ,\ f(x)=\frac{-3}{x}$

2) $D=]1;+\infty[\ ,\ f(x)=\frac{x}{1-x}$

3) $D=]-\infty;-1[\ ,\ f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

1) الدالة f المعرفة في المجال $]0;+\infty[$ f بالعبارة $f(x)=\frac{-3}{x}$ قابلة للاشتقاق في D و لدينا $f'(x)=-3\left(\frac{1}{x}\right)'$ أي: $f'(x)=-3\left(\frac{-1}{x^2}\right)$

ومهما يكن x عنصر من D فإن $f'(x)>0$ وبالآتي فإن الدالة f متزايدة تماما في D.

2) $f(x)=\frac{x}{1-x}$ ، الدالة f قابلة الاشتقاق في المجال $]1;+\infty[$

لأنّها حاصل قسمة دالتين. لدينا : $f'(x)=\dfrac{1.(1-x)-(-1)x}{(1-x)^2}$

$f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ و بالآتي فإن f متزايدة تماما في المجال $]1;+\infty[$.

3) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$ الدالة f قابلة الاشتقاق في المجال $]-\infty;-1[$

باعتبارها حاصل قسمة دالتين هما: $x\mapsto 2x+1$ و الدالة $x\mapsto x+1$.

لدينا $f'(x)=\dfrac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2}$; $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $f'(x)>0$

من أجل كل عدد x من D ومنه f متزايدة تماما في المجال $]-\infty;-1[$.

7.

1. من خلال جدول تغيرات الدالة f نحصل على المعلومات الآتية:

$f(-2)=-3$ و $f(2)=5$ و هذا لا يتناسب إلا مع الشكل رقم 1.

إذا المنحنى الممثل للدالة f هو المنحنى المرسوم في الشكل 1.

2. عبارة $f(x)=x^2+bx-3$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-2;2]$ من جدول التغيرات لدينا $f'(x)=0$ من أجل $x=-1$.

علما أن $f'(x)=2x+b$ نحصل على $f'(-1)=0$ معناه أن $-2+b=0$

أي $b=+2$ وبالآتي : $f(x)=x^2+2x-3$

3. حساب $f'(x)$. بما أن $f(x)=x^2+2x-3$ فإن $f'(x)=2x+2$

$f'(x)=0$ معناه $2x+2=0$ و منه $x=-1$ هذه النتيجة واردة في جدول التغيرات للدالة f .

إشارة $f'(x)$. $f'(x)>0$ معناه أن $2x+2>0$ أي $x>-1$.

$f'(x) < 0$ معناه أن $2x+2 < 0$ أي $-2 \le x < -1$.

وهذه النتائج متناسبة وصحيحة في الجدول أعلاه.

4. تحقق أن النقطة $A(1,0)$ تنتمي إلى (C_f).

$A(1,0)$ تنتمي إلى (C_f) إذا كان $f(1) = 0$. لدينا $f(1) = 1^2 + 2 - 3 = 0$

5. معادلة للمماس (Δ) عند النقطة $A(1,0)$.

نعلم أن معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $A(a, f(a))$ هي :

$$f(a) = 0 \;,\quad a = 1 \;.\quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$(\Delta): y = f'(a)(x-a) + f(a)$ ومنه نحصل على $(\Delta): \quad y = 4x - 4$

6. عدد حلول المعادلة : $f(x) = 1$ في المجال $[-2;2]$.

- بيانيا : حلول المعادلة $f(x) = 1$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو معادلة $y = 1$. بيانيا فإن المستقيم الذي معادلته $y = 1$ يقطع (C_f) في نقطة واحدة ، فاصلتها x_0 .(أنظر الشكل)
- حلول المعادلة $f(x) = 1$ جبريا.

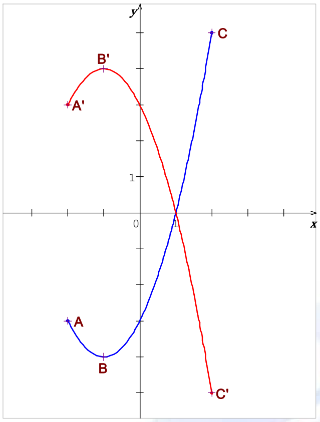
$f(x) = 1$ معناه : $x^2 + 2x - 3 = 1$ أي $x^2 + 2x - 4 = 0$.

$\Delta' = 5$ لدينا جذران $x' = -1 - \sqrt{5}$ ، $x'' = -1 + \sqrt{5}$ مع الملاحظة أن $x' \in [-2;2]$. الحل هو $x'' = -1 + \sqrt{5}$.

7. التمثيل البياني للدالة $g(x) = f(x)$

لتكن النقطة $M(x, y)$ من (C_f) . معناه $y = -f(x)$

النقطة $M'(x; -f(x))$ هي نظيرة النقطة M بالنسبة إلى محور الفواصل.



إذن نحصل على منحنى الدالة g بإنشاء نظير المنحنى (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل.

نظيرة النقطة $A(-2\,;-3)$ هي $A'(-2\,;3)$

نظيرة النقطة $B(-1\,;-4)$ هي $B'(-1\,;4)$

نظيرة النقطة $C(2\,;5)$ هي $C'(2\,;-5)$

(أنظر الشكل)

8.

1. تعيين جدول تغيرات الدالة f .

من خلال قراءة بيانية للمنحنى (C_f) نحصل على المعطيات الآتية:

$f(-3)=0$ ، $f(-2)=4$ ، $f(0)=0$ و $f(1)=4$. و الدالة f' تنعدم من أجل $x=-2$ و $x=0$ وهي موجبة في المجال $[0\,;1]\cup[-3\,;-2]$ وسالبة في المجال $[-2\,;0]$.هذه المعلومات لا تتناسب إلا مع الجدول رقم3.

2. حساب $f(0)$ و $f(1)$ بقراءة بيانية.

نعلم أن عبارة $f(x)=x^3+bx+c$ حيث $b\,,\,c\in x$

$f(0)=0$ و $f(1)=4$ هذا معناه أن $c=0$ و $f(1)=4$ نحصل على $1^3+b+0=4$ أي $b=3$ و منه تصبح عبارة $f(x)$ هي $f(x)=x^3+3x^2$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-3\,;1]$.

3. حساب $f'(x)$ و إشارتها في المجال $[-3\,;1]$.

بما أن $f(x)=x^3+3x^2$ فإنّ $f(x)=3x^2+6x$ أي $f(x)=3x(x+2)$

إشارة $f(x)$

$f(x)=3x(x+2)$ كثير الحدود من الدرجة الثانية له جذران $x=0$ و $x=-2$ لدينا :

x	-3		-2		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. معادلة المستقيم (Δ) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0

نعلم أن معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=a$ هي $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

لدينا $a=0$ ومنه معادلة المستقيم (Δ) هي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$f(0)=0$; $f'(0)=0$ ومنه معادلة (Δ) : $y=0$ وهو محور الفواصل $(x'x)$.

4. إعادة إنشاء المنحنى (C_f) .

بجمع المعطيات السابقة و التي تتلخص على ما يأتي:

- $f(x)=x^3+3x^2$ في المجال $[-3;1]$.
- $f'(x)=3x^2+6x$ أي $f'(x)=3x(x+2)$.

- جدول تغيرات الدالة f .

x	-3		-2		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

- نقاط مميزة لإنشاء (C_f)

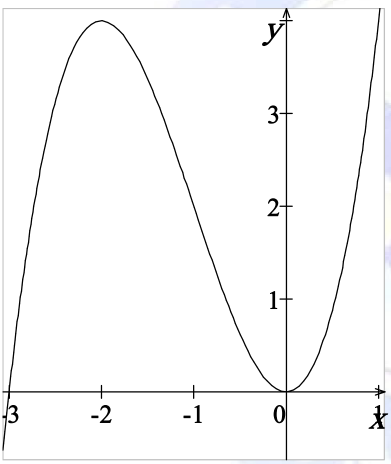
تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل.

نجد المعادلة $f(x)=0$ أي $x^3+3x^2=0$ معناه $x^2(x+3)$

و منه $x=0$ أو $x=-3$ لدينا النقاط $(0;0)$ و $(-3;0)$.

تقاطع المنحنى (C_f) مع محور التراتيب. $f(x)=0$ مبدأ المعلم

- نهاية عظمى $(-2;4)$ و نهاية صغرى $(0;0)$.
- معادلة المماس (Δ) للمنحنى عند النقطة $(0;0)$



* لتعيين معادلة (Δ) نوظف ما جاء في المبرهنة المعطاة في الصفة 159 حيث أعطي الشكل العام لمعادلة المماس في النقطة ذات الفاصلة a وهو:

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

بالنسبة لهذا المثال لدينا $a=0$.

منه: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ....(*)

لدينا $f'(x)=3x^2+6x$

نحسب $f(0)$ و $f'(0)$

فنجد: $f(0)=0$ و $f'(0)=0$

نعوض الآن في المعادلة (*)

فنجد: $(\Delta):y=0$.

.9

.1 بقراءة بيانية نجد $f(0)=-1$ ، $f(1)=-2$ و $f(2)=-1$

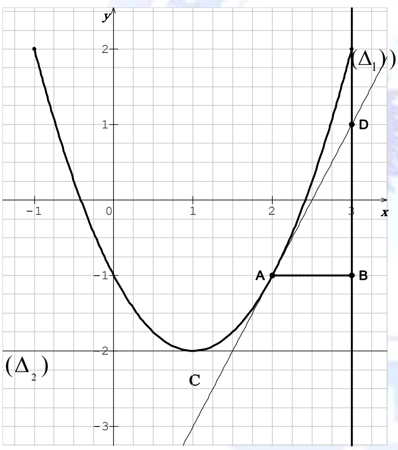
.2 اتجاه تغير f

f متناقصة تماما على المجال $[-1;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;3]$

.3 تعيين $f'(1)$ و $f'(2)$ بقراءة بيانية.

* $f'(1)$ هو معامل توجيه المماس عند النقطة C . نلاحظ أنّ هذا المماس يوازي محور الفواصل بالتالي معامل توجيهه يساوي 0.

* $f'(2)$ هو معامل توجيه المماس (Δ) للمنحنى في النقطة A .



نحسب معامل التوجيه هذا باستخدام العلاقة $\dfrac{y_D-y_A}{x_D-x_A}=\dfrac{1-(-1)}{3-2}=2$

<u>طريقة أخرى لحساب معامل التوجيه :</u>

نحسب ميل الزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$ في المثلث القائم ABD كما هو موضح في الشكل المقابل بالعلاقة

$$\frac{y_D-y_B}{x_B-x_A}=\frac{1-(-1)}{3-2}=2$$

.4 تعيين معادلة للمماس (Δ_2) عند النقطة C.

بما أنّ معامل التوجيه معدوم فإنّ معادلة (Δ_2) هي: $y=-2$

.5 تعيين معادلة للمماس (Δ_1) عند النقطة A.

ننظر إلى المماس (Δ_1) على مستقيم يشمل النقطة $A(2;-1)$ و معامل توجيهه 2 ، إذن معادلة (Δ_1) هي من الشكل $y=2x+\alpha$

هذه المعادلة تحقق إحداثيتي النقطة A .

نعوض بإحداثيتي النقطة $A(2;-1)$ في المعادلة لاستخراج العدد α فنجد:

$-1=2(2)+\alpha$ ومنه $\alpha=-5$

وبالتالي معادلة (Δ_1) هي: $y=2x-5$.

6. تعيين b و c في العبارة $f(x)=x^2+bx+c$

لدينا مما سبق $f(0)=-1$ بالتعويض في العبارة $f(x)=x^2+bx+c$ نجد $c=-1$.

ومنه $f(x)=x^2+bx-1$

لدينا أيضا مما سبق $f(1)=-2$ ،نعوض في العبارة $f(x)=x^2+bx-1$ فنجد $b=-2$

وأخيرا نجد: $f(x)=x^2-2x-1$

7. معادلة المماس للمنحنى في النقطة.

نستعين بالشكل العام لمعادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 وهو

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ....(1)

لدينا مما سبق $f(0)=-1$

نحسب $f'(0)$ بعد حساب $f'(x)=2x-2$ فنجد: $f'(0)=-2$

نعوض الآن في المعادلة (1) نجد: $y=-2x-1$

.10

نستعمل المعلومات المتوفرة في جدول التغيرات المعطى أدناه لنجيب عن الأسئلة المطروحة.

x	-1		0		2		4
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2

1. نلاحظ في جدول التغيرات أنّ صورة 0 هي 2 ومنه $f(0)=2$.

2. النقطة $A(0;-1)$ لا تنتمي إلى منحنى الدالة f لأننا نقرأ في جدول التغيرات صورة العدد 0 هي 2 وليس -1

بينما النقطة $B(2;-3)$ تنتمي إلى منحنى الدالة f لأننا نقرأ في جدول التغيرات صورة العدد 2 هي -3 .

3. تغيرات الدالة f .

طريقة: نستنتج اتجاه تغير الدالة من جدول التغيرات بالاعتماد على وضعية السم في كل مجال على حدة، فإذا كان السهم متجها نحو الأعلى قلنا إنّ الدالة متزايدة تماما على ذلك المجال، أما إذا كان متجها نحو الأسفل قلنا إنّ الدالة متناقصة تماما على هذا المجال.

*نلاحظ أنّ السهم في المجال $[0;2]$ متجه نحو الأسفل وهذا يعني أنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;2]$ من القيمة 2 إلى القيمة -3 .

*الدالة متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1;0]$ و $[2;4]$ لأننا نلاحظ في كل مجال من هذين المجالين أنّ السهم متجه نحو الأعلى.

4. المقارنة بين $f(1,5)$ و $f(1,8)$ ثمّ بين $f(-0,5)$ و $f(-0,8)$.

*القيمتان 1,5 و 1,8 تقعان ضمن المجال $[0;2]$ حيث الدالة متناقصة تماما ومنه $f(1,5) > f(1,8)$.

*القيمتان $-0,5$ و $-0,8$ تقعان ضمن المجال $]-1;0]$ حيث الدالة متزايدة تماما ومنه $f(-0,8) < f(-0,5)$.

V. تقويم ذاتي:

أ. اختيار من متعدد

يتضمن كل سؤال عبارة واحدة صحيحة، تعرّف عليها من بين العبارات الأربع المقترحة.

1. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x) = -0,1x + 0,6$

أ) f موجبة تماما على $\mathbb{R}$.

ب) f سالبة تماما على $\mathbb{R}$.

ج) f موجبة في $]-\infty ; 6]$ و سالبة في $[6 ; +\infty[$.

د) f موجبة في $[6 ; +\infty[$ و سالبة في $]-\infty ; 6]$.

2. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ: $f(x) = x^2 - 25x + 156$.

أ) مميز $f(x)$ سالب تماما.

ب) $f'(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها على $\mathbb{R}$.

ج) الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty ; 12,5]$ و متناقصة تماما على $[12,5 ; +\infty[$.

د) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا مضاعفا.

3. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=(1-x)(x^2-6x+8)$

أ) يقع منحنى الدالة f فوق محور الفواصل.

ب) الدالة f رتيبة تماما على $\mathbb{R}$.

ج) الدالة f موجبة في المجال $]2\,;4[$.

د) المعادلة $f(x)=5$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

4. لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{1}{0,05x-1}$.

أ) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{-20\}$.

ب) الدالة f متناقصة تماما على كل مجال من مجالي مجموعة تعريفها.

ج) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

د) $f'(x)=\dfrac{0.05}{(0.05x-1)^2}$

ب. صحيح أم خاطئ

1. إليك جدول تغيرات دالة f معرفة على المجال $[-2;1]$.

x	-2	-1	$-\frac{1}{3}$	0	1
$f(x)$	-2 ↗	0 ↘	$-\frac{4}{27}$ ↗	0 ↗	4

أجب بصحيح أم خاطئ على العبارات التالية دون تبرير

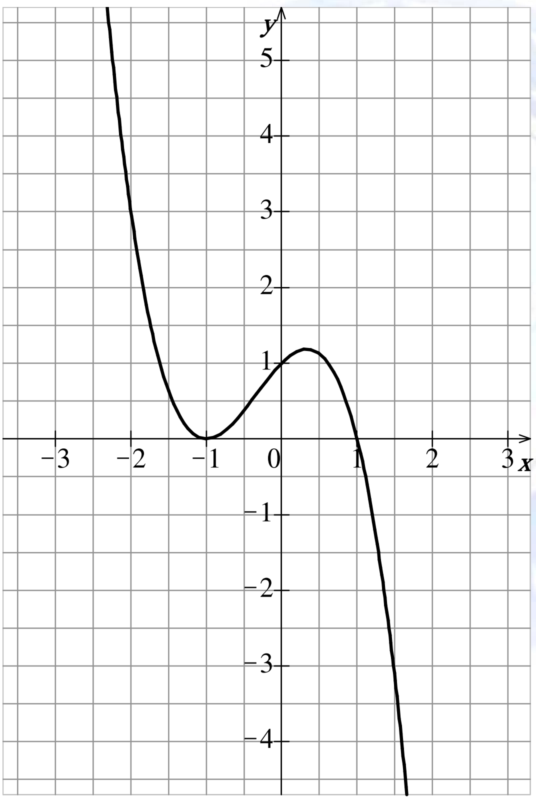
أ) f سالبة على $[-2;0]$ و موجبة على $[0;1]$

ب) الدالة f متزايدة تماما على $\left[-2;-\frac{1}{3}\right]$

جـ) $-\frac{4}{27}$ هي أصغر قيمة للدالة f على المجال $[-2;1]$

د) منحني الدالة f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة.

هــ) المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا واحدا ينتمي إلى $[-2;1]$



2. الشكل المقابل هو التمثيل البياني للدالة كثير الحدود من الدرجة الثالثة f المعرفة على $\mathbb{R}$.

أجب بصحيح أم خاطئ على العبارات التالية دون تبرير.

أ) الدالة f' تنعدم مرتين مغيرة إشارتها.

ب) المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول حقيقية متمايزة مثنى مثنى.

جـ) f موجبة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و سالبة تماما على $]1;+\infty[$.

د) $1-$ قيمة حدية صغرى على المجال $]-\infty;0[$.

هـــ) منحني الدالة f يقطع المستقيم الذي معادلته $y=\frac{5}{6}$

في ثلاث نقط.

أ. أجوبة اختيار من متعدد

1) جـ،

2) بـ،

3) جـ،

4) بـ.

ب. أجوبة صحيح أم خاطئ

الحالة	النصوص الصحيحة	النصوص الخاطئة
(1	أ، هـــ.	ب، جـ ، د.
(2	أ، جـ ، هـــ.	ب، د.

VI. استعد للبكالوريا:

1. من موضوع بكالوريا، دورة جوان 2008 بتصرف (10 نقاط)

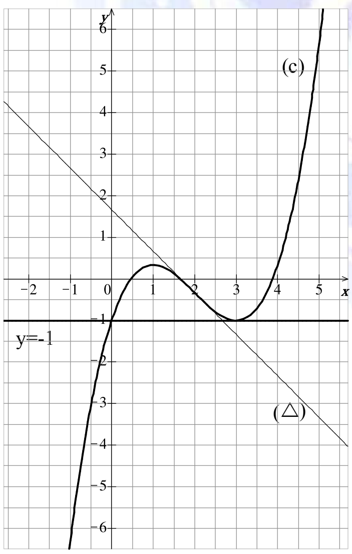
المنحنى (C) المرسوم في الشكل أدناه هو منحنى الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ و (Δ) مماس للمنحنى (C) عند فاصلتها 2.

1) خمن نهاية f عند $+\infty$ ثم بقراءة بيانية عين اتجاه تغير f على المجال $]-1;+\infty[$. شكل جدول تغيرات f .

2) من العبارات الآتية: $f_1(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$

$f_2(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$ ، $f_3(x)=-\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$

عين العبارة المناسبة للدالة f مبررا ذلك.



3) ادرس تغيرات f . هل تخميناتك وقراءة السابقة صحيحة ؟

4) عين معادلة للمستقيم (Δ).

5) حل بيانيا المتراجحة ذات المجهول x حيث: $f(x)<-1$

6) عين نقطتي تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (D) ذي المعادلة: $y=3x-1$.

حل	السلّم

1) تخمين نهاية f عند $+\infty$ بيانيا.

بقراءة بيانية و باستعمال المنحنى الممثل للدالة f نلاحظ أن **0,5**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

– تعيين اتجاه تغير f على المجال $[-1;+\infty[$

بيانيا بقراءة على الرسم نحصل على المعطيات الآتية:

الدالة f متزايدة في المجال $[-1;1]$. **0,25**

الدالة f متناقصة في المجال $[1;3]$. **0,5**

الدالة f متزايدة في المجال $[3;+\infty[$. **0,25**

وعليه لدينا : الدالة f متزايدة في المجال $[-1;1]\cup[3;+\infty[$

f متناقصة في المجال $[1;3]$.

تشكيل جدول تغيرات f . حسب النتيجة السابقة لدينا **0,5**

x	-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) البحث عن عبارة $f(x)$.

لدينا: $f_1(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$

$f_2(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3-1$ ، $f_3(x)=\dfrac{-1}{3}x^3-2x^2+3-1$

بقراءة بيانية لدينا: $f(0)=-1$.

وبالتعويض نجد $f_1(0)=+1$ و $f_2(0)=-1$ و $f_3(0)=-1$

نلاحظ أنّ النتيجة $f_1(0)=+1$ لا توافق المعطى $f(0)=-1$ ،

بينما النتيجتان $f_2(0)=-1$ و $f_3(0)=-1$ توافقان المعطى السابق إذا يمكن التخلص من عبارة $f_1(x)$ لأنها لا توافق المعطيات البيانية. 0,25

يبقى علينا أن نهتم بالدالتين f_2 و f_3

بقراءة بيانية أخرى نستنتج منها أنّ المنحنى يقبل في كل نقطة من النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و 3 مماسا يوازي محور الفواصل وهذا يعني أنّ $f'(1)=0$ و $f'(3)=0$. $2\times0{,}25$

بحساب الدالة المشتقة لكل من الدالتين f_2 و f_3 نجد أنّ

$f_2'(x)=x^2-4x+3$ و $f_3'(x)=-x^2-4x+3$ وبالتعويض 0,25 +0,25

نجد أنّ $f_2'(1)=0$ ، $f_2'(3)=0$ و $f_3'(1)=-2$ ، $f_3'(3)=-18$ $4\times0{,}25$

من الواضح أنّ نتائج f_2 توافق النتيجتان $f'(1)=0$ و $f'(3)=0$ وبالتالي توافق القراءة البيانية ومنه يمكن إلغاء عبارة $f_3(x)$ و عليه فإن $f(x)=f_2(x)$. 0,25

3) تغيرات الدالة f .

لدينا $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$.

الدالة f قابلة الاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ باعتبارها دالة كثير الحدود من الدرجة الثالثة.

لدينا $f'(x)=x^2-4x+3$. 0,25

$f'(x)=0$ معناه $x^2-4x+3=0$ أي $x=1$ أو $x=3$ 0,25

إشارة $f'(x)$:

x	-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

0,25

f متزايدة على المجالين $[-1;1]$ و $[3;+\infty[$.

f متناقصة على المجال $[1;3]$. 0,25

و منه جدول التغيرات:

x	-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{19}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

0,25

تغيرات الدالة f متطابقة تماما مع المعطيات التي استنتجناها بالقراءة البيانية سواء من حيث قيم العد $f(x)$ من أجل $x=1$ ثمّ $x=3$ أو من حيث تغيرات الدالة في حدّ ذاتها بالمقارنة مع القراءة البيانية في المنحنى (C) على الشكل المعطى. 0,25

4) معادلة للمماس (Δ) مماس عند النقطة التي فاصلتها 2 .

لدينا : $(\Delta): y = f'(a)(x-a) + f(a)$ مع $a=2$. 0,25

نحسب $f'(2)$ و $f(2)$ نجد: $f'(2) = -1$ ؛ $f(2) = \frac{-1}{3}$ 2×0,25

نعوض في العادلة فنجد: $(\Delta): y = -x + \frac{5}{3}$. 0,25

5) حل المتراجحة $f(x) < -1$ بيانيا

لدينا المستقيم $y=-1$ يوازي محور الفواصل (x',x) و يشمل النقطة $(0;-1)$. 0,25

ندرس بقراءة بيانية وضعية المنحنى (C) بالنسبة المستقيم (Δ)

فنجد حلول المتراجحة $f(x) < -1$ هي فواصل نقاط الجزء من

المنحنى التي يكون فيها (C) تحت المستقيم $y=-1$ بيانيا يكون (C) تحت المستقيم $y=-1$ عندما يكون $x<0$ وبالتالي نجد حلول المتراجحة $f(x)<-1$ هي المجموعة $]-\infty;0[$.	0,25 0,25 0,25
6) تعيين نقاط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (D) ذي المعادلة $y=3x-1$. فواصل نقاط تقاطع (C) مع (D) هي حلول المعادلة $f(x)=3x-1$ إذن نحل المعادلة $\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1=3x-1$ أي $\frac{1}{3}x^3-2x^2=0$ ومنه $\frac{1}{3}x^2(x-6)=0$ وبالتالي $x=0$ و $x=6$. لما $x=0$ فإن $y=-1$ و منه نحصل على النقطة $(0;-1)$. لما $x=6$ فإن $y=-1$ و منه نحصل على النقطة $(6;17)$.	0,5 2×0,5 0,25 0,25

2. مسألة محلولة

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=x^3-3x+2$.

(C) هو المنحنى البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=(x+2)(x-1)^2$.

2.

أ) أحسب $f'(x)$ حيث f' هي الدالة f المشتقة للدالة على $\mathbb{R}$.

ب) عين إشارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f' على $\mathbb{R}$.

د) شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (لا يطلب حساب النهايات)

.3

أ) حل في $\mathbb{R}$ في المعادلة $f(x)=0$.

ب) استنتج أن المنحنى (C) يقطع محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين إحداثيتاهما.

4. انقل الجدول الآتي ثم أتممه :

x	$-2,5$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$						

5. ارسم تمثيلا بيانيا للمنحني على المجال .

6. بقراءة بيانية :

أ) عين عدد حلول المعادلة. (أعط حصرا للحلول في حالة وجودها)

ب) حل المتراجحة $f(x)<0$.

حل

1. نتحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f(x)=(x+2)(x-1)^2$

المطلوب منا التحقق من العبارة $f(x)$ وهذا يتم بنشر $(x+2)(x-1)^2$

$$(x+2)(x-1)^2=(x+2)(x^2-2x+1)$$
$$=x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2$$

أي $$(x+2)(x-1)^2=x^3-3x+2$$

و هي عبارة $f(x)$.

2. أ . حساب عبارة $f'(x)$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ باعتبارها دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة.

لدينا $f'(x)=3x^2-3$ ومنه يمكن كتابة $f'(x)=3(x^2-1)$

ب. <u>دراسة إشارة</u> $f'(x)$.

$f'(x)$ تتعدم إذا كان : $3(x^2-1)=0$ أي عندما : $x=1$ أو $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جـــ . <u>استنتاج اتجاه تغير الدالة f على</u> $\mathbb{R}$.

من الجدول السابق نحصل على ما يأتي:

$f'(x)\leq 0$ إذا وفقط إذا كان $x\in[-1;+1]$ ومنه f متناقصة على $[-1;+1]$.

$f'(x)\geq 0$ إذا و فقط إذا كان $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ و منه f متزايدة على كل من المجالين $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$.

د. <u>تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$</u> .

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

3. أ. <u>حلول المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$</u>.

نستعمل عبارة $f(x)=(x+2)(x-1)^2$ ونحصل على الحلول الآتية :

$(x+2)(x-1)^2=0$ أي $x=-2$ أو $x=1$ (حل مضاعف)

ب. تقاطع المنحنى (C) مع محور الفواصل.

بما أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ هما $x'=-2$ و $x''=1$ فإن المنحنى (C) يقطع محور الفواصل في نقطتين $A(1\,;0)$ و $B(-2\,;0)$.

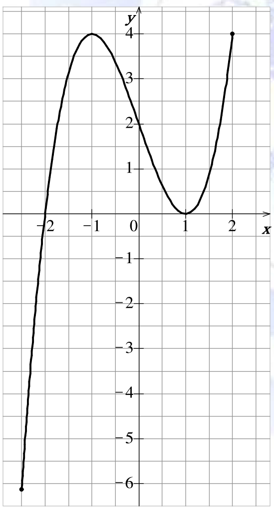
4. نقل الجدول ثم ملؤه:

لتسهيل الحسابات يمكن استعمال عبارة $f(x)=(x+2)(x-1)^2$

x	$-2,5$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-6,25$	0	4	$+2$	0	4

5. رسم المنحنى (C) الممثل للدالة f على المجال $[-2,5\,;2]$.

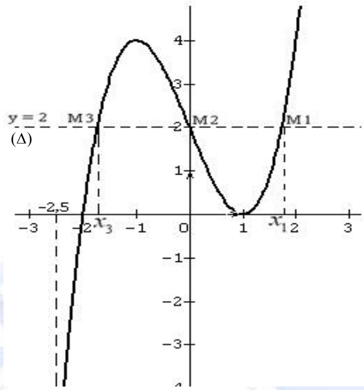
نستعمل في رسم المنحنى جدول التغيرات ونستعين بقيم الجدول الذي أتممناه في السؤال **4**. فنحصل على الشكل المقابل:



6. أ. تعيين حلول المعادلة $f(x)=2$ بيانيا.

بيانيا فإن حلول المعادلة $f(x)=2$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) ذو معادلة $y=2$.

أنظر الشكل أدناه.



وبقراءة على الرسم فان المستقيم (Δ) يقطع المنحنى (C) في ثلاث نقاط $M_1\left(x_1\,;7(x_1)\right)$ ؛ $M_2(0\,;2)$ و $M_3\left(x_3\,;\,f(x_3)\right)$.

لدينا : $1<x_1<2$ ؛ $-2<x_3<-1$.

ب. حل المتراجحة $f(x)<0$.

طريقة1: (حل جبري)

لحل هذه المتراجحة نستعمل عبارة $f(x)=(x+2)(x-1)^2$.

وبما أن $(x-1)^2$ عدد موجب فإن إشارة $f(x)$ هي إشارة $(x+2)$ وعليه يكون $f(x)<0$ إذا وفقط إذا كان: $x\in\left]-\infty\,;-2\right[$.

طريقة2: (حل بياني)

نعلم أنّ حلول المتراجحة $f(x)<0$ هي فواصل نقط الجزء من المنحنى الذي يقع تحت محور الفواصل، وبقراءة بيانية نلاحظ أنّ هذا الجزء يقع في المجال $\left]-\infty\,;-2\right[$ ومنه حلول المتراجحة هي هذا المجال.