# 2. المتتاليات العددية

**الكفاءات المستهدفة**

- التّمييز بين متتالية وحدّها العام.
- التعرف على متتالية بالتراجع.
- حساب الحدود الأولى لمتتالية معرفة بالتراجع.
- تحديد اتجاه تغير متتالية حسابية أو هندسية.
- استعمال المتتاليات الحسابية والهندسية لحل مشكلات من الحياة اليومية.
- حساب الحد العام و مجموع حدا الأولى لمتتالية من الشكل: $u_{n+1} = au_n + b$.

## تصميم الدرس

**تعريف**

I. المتتاليات العددية

II. المتتاليات الحسابية – المتتاليات الهندسية

III. نمذجة وضعية باستعمال متتالية

IV. اتجاه تغير متتالية

V. المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = a\,u_n + b$ حيث $(a \neq 0$ و $b \neq 0)$

VI. ملخص

VII. توظيف المعارف (تمارين + حلول وإرشادات)

VIII. تقويم ذاتي (اختيار من متعدد + صحيح أم خاطئ)

IX. استعد للبكالوريا (مسائل محلولة مع سلّم التنقيط)

## تعريف:

ولد كارل فريديريك **غوص** في مدينة برونشفايغ عام 1777 م وتوفى عام 1855م. عاش بمدينة غوتنغن حيث التحق بجامعتها ليصبح سنة 1807م أستاذاً ومديراً لمرصدها.

كان غوص معروفاً بأبحاثه المتميزة في حقول الرياضيات والفيزياء وعلم الفلك وعلم قياسات الأرض وعلم فيزياء الأرض، ويعود إليه الفضل في عدد من المجالات العلمية في وقتنا الحاضر.

كان غوص عبقريا منذ صغره فقد تعلم بمفرده القراءة والعد وعمره ثلاث سنوات كما أنّه أبهر مبكرا أساتذته ويحكى أن أحد الأساتذة، بهدف الاستراحة، كلف تلامذته الذين كان من بينهم غوص وعمره ثمان سنوات، القيام ببعض العمليات الحسابية فاقترح عليهم حساب مجموع الأعداد من 1 إلى 100 إلا أنه بعد لحظات قليلة قدم له غوص الحل الصحيح. كتب غوص المجموع المطلوب مرتين وذلك بإتباع ترتيبين متعاكسين $\begin{cases}1+2+.....+99+100\\100+99+.....+2+1\end{cases}$ لاحظ بعد ذلك أنه بتجميع كل عددين عموديا يحصل على نفس المجموع 101 بحيث أنّ: $1+100=101$، $2+99=101$، $3+98=101$، ... ، $100+1=101$ وهذا مائة مرة. توصل هكذا إلى أنّ $2(1+2+...+100)=100\times101$

ومنه $1+2+...+100=\frac{100\times101}{2}=5050$.

• بإتباع نفس المنهجية أحسب مجموع الأعداد الطبيعية من 1 إلى 1000.

## I. المتتاليات العددية:

**نشاط**

1. في الجدول المقابل نرفق بكل عدد طبيعي مربعه، انقل وأكمل الجدول، ثم اكتب متتالية مربعات الأعداد الطبيعية الناتجة:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | | | | | | | | |

2. نرفق بالعدد الطبيعي $n$ العدد $\frac{1}{n(n+1)}$ (نعرّف هكذا دالة عددية من المجموعة $\mathbb{N}$ إلى المجموعة $\mathbb{R}$ نقول أنّ $\frac{1}{n(n+1)}$ هو صورة العدد $n$)

اكتب صور الأعداد السبعة الآتية: 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

**حل**

1. لدينا:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |

متتالية مربعات الأعداد الطبيعية الناتجة هي: 0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49

2. صورة العدد 1 هي $\frac{1}{2}$ لأنّ $\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$

وهكذا بالتعويض نجد صور الأعداد $1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7$ هي على الترتيب $\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ \frac{1}{12}\ ;\ \frac{1}{20}\ ;\ \frac{1}{30}\ ;\ \frac{1}{42}\ ;\ \frac{1}{56}$ (نقول أنّنا تحصلنا على متتالية أعداد، حدودها: الأول $\frac{1}{2}$ والثاني $\frac{1}{6}$ والثالث $\frac{1}{12}$ وهكذا ...)

## 1. المتتاليات العددية

### تعريف

متتالية عددية $u$ هي دالة معرّفة على المجموعة $\mathbb{N}$ أو على جزء منها، ترفق بالعدد الطبيعي $n$ العدد $u(n)$.

**ترميز :** $u:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\ ;\ n\mapsto u(n)=u_n$

- يسمى $u(n)$ صورة العدد الطبيعي $n$ بالمتتالية $u$ ونرمز له بـ $u_n$.
- نرمز إلى المتتالية $u$ بـ $(u_n)_{n\geq n_0}$ إذا كانت معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ أكبر من $n_0$ أو يساويه.
- نرمز إلى المتتالية $u$ بـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو $(u_n)$ إذا كانت معرفة على كل $\mathbb{N}$.
- يسمى $u_n$ الحد العام للمتتالية $(u_n)$.
- المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حدها الأول هو $u_{n_0}$.
- المتتالية $(u_n)$ المعرفة على كل $\mathbb{N}$ حدّها الأول $u_0$.

### ملاحظة

لابدّ من التمييز بين متتالية $(u_n)$ وبين حدّها العام $u_n$ الذي هو عدد حقيقي.

## 2. طرائق توليد متتالية

**نشاط**

**1.** إليك متتالية الأعداد 2; 5; 11; 23 ; 47 ; ... ; ... التي رمزنا لحدودها بالشكل الآتي:

$u_0 = 2$ ، $u_1 = 5$ ، $u_2 = 11$ ، $u_3 = 23$ ، $u_4 = 47$ ، ...

- ابحث عن العلاقة المنطقية الموجودة بين كل حدين متتابعين من حدود هذه المتتالية، ثمّ انقل العبارة الآتية وأتممها: " نحصل على حد بضرب الحد الذي قبله مباشرة في ... ثمّ إضافة ... "
- بيّن أنّ العدد 95 هو حد من حدود هذه المتتالية، وارمز له.
- احسب كلا من الحدين $u_6$ و $u_8$.
- من أجل كل عدد طبيعي $n$، عبِّر عن الحد $u_{n+1}$ بدلالة الحد $u_n$.

**2.** إليك في ما يأتي الحدود الخمسة الأولى لمتتالية:

$v_0 = -5$ ، $v_1 = -2$ ، $v_2 = 1$ ، $v_3 = 4$ ، $v_4 = 7$ ، ...

| |
|---|
| الحد $v_0$ دليله هو 0 |
| الحد $v_n$ دليله هو $n$ |

- ابحث عن العلاقة المنطقية الموجودة بين كل حدٍّ ودليله في هذه المتتالية، ثمّ انقل العبارة الآتية وأتممها: " نحصل على حد بضرب دليله في ... ثم طرح ... "
- عبِّر عن $v_n$ بدلالة $n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.
- احسب كلا من الحدين $v_{2007}$ و $v_{1428}$.
- عبِّر عن $v_{n+1}$ بدلالة $v_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.

**حل**

**1.** لاحظ أنّ $5=2\times2+1$ و $11=2\times5+1$ و $23=2\times11+1$ و $47=2\times23+1$

ومنه يمكن التّعبير عن العلاقة المنطقية الموجودة بين حدود هذه المتتالية بالشكل الآتي: " نحصل على حد بضرب الحد الذي قبله مباشرة في العدد 2 ثمّ إضافة العدد 1"

- لكي نبيّن أنّ العدد 95 هو حد من حدود هذه المتتالية يكفي التأكد من إنّ العدد 95 يحقق العلاقة المنطقية التي وجدناها مع حد من حدود هذه المتتالية، وهو كذلك لأنّ $95=2\times47+1$.

أنّ العدد 95 هو الحد السادس في هذه المتتالية، التي رمزنا لحدّها الأول 2 بالرمز $u_0$، لذلك نرمز له بالرمز $u_5=95$، وهو يلي الحد الخامس $u_4=47$ مباشرة.

- حساب كل من الحدين $u_6$ و $u_8$.

بالنسبة إلى الحد $u_6$ نستعمل الحد $u_5$ فنجد $u_6=2u_5+1=2\times95+1=191$

أما بالنسبة إلى الحد $u_8$ فإننا نحتاج إلى الحد $u_7$ والذي يساوي

$u_7=2u_6+1=2\times191+1=383$ ومنه $u_8=2u_7+1=2\times383+1=767$

- التعبير عن الحد $u_{n+1}$ بدلالة الحد $u_n$: بما أنّ $u_n$ هو الحد الذي يأتي قبل الحد $u_{n+1}$ مباشرة، وباستعمال العلاقة المنطقية، التي وجدناها، بين حدود هذه المتتالية فإنّ $u_{n+1}=2u_n+1$ (نقول أنّنا عبّرنا عن الحد $u_{n+1}$ بدلالة الحد $u_n$).

2. نلاحظ أنّ: $v_0 = -5 = 3\times 0 - 5$ و $v_1 = -2 = 3\times 1 - 5$

و $v_2 = 1 = 3\times 2 - 5$ و $v_3 = 4 = 3\times 3 - 5$ و $v_4 = 7 = 3\times 4 - 5$

- ومنه يمكن صياغة العلاقة المنطقية بين الحد ودليله في هذه المتتالية بالشكل: " نحصل على حد بضرب دليله في العدد 3 ثمّ طرح العدد 5"
- التعبير عن $v_n$ بدلالة $n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$: بما أنّ الحد العام $v_n$ دليله $n$، وباستعمال ما سبق، نكتب $v_n = 3n - 5$ (نقول أنّنا عبّرنا عن الحد العام $u_n$ بدلالة $n$).
- لحساب كل من الحدين $v_{2007}$ و $v_{1428}$ نعوّض بقيمة $n$ في عبارة الحد العام $v_n = 3n - 5$ فنجد:

$v_{2007} = 3\times 2007 - 5 = 6016$ و $v_{1428} = 3\times 1428 - 5 = 4279$

- التّعبير عن $v_{n+1}$ بدلالة $v_n$: لدينا $v_n = 3n - 5$ ومنه

$v_{n+1} = 3(n+1) - 5 = (3n - 5) + 3 = v_n + 3$ أي $v_{n+1} = v_n + 3$

## لتوليد متتالية يمكن إتباع إحدى الطريقتين الآتيتين :

- **الطريقة الأولى : توليد متتالية بتعريف حدّها العام**

يمكن تعريف متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ بالتعبير عن حدّها العام $u_n$ بدلالة $n$ وذلك بوضع $u_n = f(n)$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ مع $n \geq n_0$، حيث $f$ دالة معرف على المجال $[n_0 ; +\infty[$.

### مثال

$(u_n)$ متتالية معرّفة بـِ: $u_n = 2n + 1$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.

لدينا $u_n = f(n)$ حيث $f$ هي الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة $f(x) = 2x+1$.

العلاقة $u_n = 2n+1$ تسمح بحساب قيمة أي حد من حدود المتتالية $(u_n)$ ومن أجل ذلك يكفي تعويض $n$ على التوالي بالأعداد 0، 1، 2، ...

نجد: $u_0 = 2\times 0+1 = 1$ ، $u_1 = 2\times 1+1 = 3$ ،

$u_2 = 2\times 2+1 = 5$ وهكذا ...

- **الطريقة الثانية: توليد متتالية بعلاقة تراجعية**

يمكن تعريف متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ بالتراجع (أي بمحاكاة مبدء الاستدلال بالتراجع) وذلك بإعطاء:

1. قيمة حدّها الأول $u_{n_0}$.
2. علاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ تربط بين كلِّ حدَّين متتابعين من المتتالية، حيث $f$ دالة عددية معرّفة على مجال D وتأخذ قيمها فيه.

**مثال**

$(u_n)$ متتالية معرفة بـ:

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 3u_n - 2$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.

في هذه الحالة لدينا $f(x) = 3x-2$ و $f$ معرّفة على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها فيه.

تسمح العلاقة $u_{n+1} = 3u_n - 2$ بحساب قيمة الحد $u_{n+1}$ إذا عُلمت قيمة الحد الذي يسبقه مباشرة $u_n$.

قيمة $u_0$ تسمح بحساب قيمة $u_1$ وهكذا فإن: $u_1 = 3\times u_0 - 2 = 3\times 2-2 = 4$.

قيمة $u_1$ تسمح بحساب قيمة $u_2$ وهكذا فإن $u_2 = 3\times u_1 - 2 = 3\times 4-2 = 10$

... الخ

**تطبيق1**

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي: $u_n = -3n^2 + 1$.

1. احسب $u_0$ و $u_1$ و $u_2$ و $u_{20}$.
2. احسب الحد العاشر.
3. أكتب بدلالة $n$ كل من الحدود $u_{n+1}$ و $u_{2n}$ و $u_{3n+2}$.

**حل**

1. بالتعويض في عبارة الحد العام $u_n = -3n^2 + 1$ بالقيمة المناسبة ل $n$

نجد: $u_0 = -3(0)^2 + 1 = 1$ ، $u_1 = -3(1)^2 + 1 = -2$

$u_2 = -3(2)^2 + 1 = -11$ ، $u_{20} = -3(20)^2 + 1 = -1199$.

2. بما أنّ $u_0$ هو الحد الأول، فالحد العاشر هو $u_9$ حيث

$$u_9 = -3(9)^2 + 1 = -242$$

3. بتعويض $n$ في عبارة الحد العام $u_n = -3n^2 + 1$ بالقيم $n+1$ و $2n$ و $3n+2$ نجد:

$$u_{n+1} = -3(n+1)^2 + 1 = -3n^2 - 6n - 2$$

و

$$u_{2n} = -3(2n)^2 + 1 = -12n^2 + 1$$

و

$$u_{3n+2} = -3(3n+2)^2 + 1 = -27n^2 - 36n - 11$$

**تطبيق2**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي:

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = -2u_n + 1$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.

1. احسب $u_1$ و $u_2$ و $u_3$.
2. احسب، باستعمال آلة حاسبة بيانية، $u_{10}$ و $u_{11}$ و $u_{12}$.
3. احسب، باستعمال ورقة حساب في مجدول إكسل، $u_{10}$ و $u_{11}$ و $u_{12}$.

**حل**

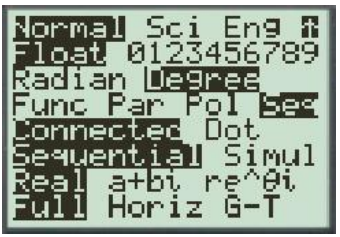
**1.** بتعويض $n$ في العلاقة $u_{n+1}=-2u_n+1$ بالقيمة 0 وباستعمال $u_0=2$ نجد: $u_1=-2u_0+1=-2\times 2+1=-3$

بطريقة مماثلة نجد: $u_2=-2u_1+1=-2(-3)+1=7$ و $u_3=-13$.

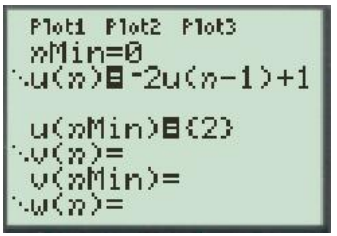
**2.** باستعمال آلة حاسبة بيانية مثل (TI-83 Plus) يمكن إتباع المراحل الآتية لعرض قيم حدود المتتالية العددية المعرفة بـ:

$u_0=2$ و $u_{n+1}=-2u_n+1$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.

• بالنقر على اللمسة [MODE] تعرض الآلة النافذة المقابلة، ثمّ اختر *Seq* من السطر الرابع، هذا السطر يغير طبيعة الحجز في النافذة الموالية.




• بالنقر على اللمسة [Y=] تعرض الآلة النافذة المقابلة، ثمّ احجز 0 أمام nMin = و $u(n)=-2u(n-1)+1$ أمام $u(n)=$ (تكون قد حجزت العلاقة $u_n=-2u_{n-1}+1$)، واحجز 2 أمام $u(n\text{Min})=$ (أي $u_0=2$).




• بالنقر على اللمسة [2nd] ثم [WINDOW] تعرض الآلة النافذة المقابلة، ثمّ احجز 7 أمام TblStrart = لتحديد بداية عرض القيم من $u_7$.

• بالنقر على اللمسة 2nd ثمّ GRAPH تعرض الآلة النافذة المقابلة، نحصل هكذا على: $u_{10}=1707$ ، $u_{11}=-3413$ و $u_{12}=6827$.

**3.** حساب $u_{10}$ و $u_{11}$ و $u_{12}$ باستعمال ورقة حساب في مجدول إكسل.

نتبع الخطوات الآتية لإنجاز ورقة الحساب أدناه، باستعمال مجدول إكسال

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | n | Un |
| 2 | 0 | 2 |
| 3 | 1 | -3 |
| 4 | 2 | 7 |
| 5 | 3 | -13 |
| 6 | 4 | 27 |
| 7 | 5 | -53 |
| 8 | 6 | 107 |
| 9 | 7 | -213 |
| 10 | 8 | 427 |
| 11 | 9 | -853 |
| 12 | 10 | 1707 |
| 13 | 11 | -3413 |
| 14 | 12 | 6827 |

• احجز في الخليتين A2 و A3 العددين 0 و 1 على الترتيب.

• احجز في الخلية B2 القيمة 2 (أي $u_0$ ) وفي الخلية B3 الصيغة =-2*B2+1 ويعني أنّك قد أدخلت $u_{n+1}=-2u_n+1$ من أجل $n=0$ (تحصل على $-3$ أي قيمة $u_1$ في الخلية B3).

• حدّد الخليتين A3 و B3 معا وعمّم محتواهما بالسحب إلى السطر 14. تجد في العمود A أدلة حدود المتتالية وفي العمود B قيمها الموافقة.

## تطبيق3

$(v_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $v_0=-3$ و $v_{n+1}=2v_n+5$ حيث $n\in\mathbb{N}$

**1.** أحسب $v_1$ و $v_2$.

**2.** عبر بدلالة $v_n$ عن كل من $v_{n+2}$ و $v_{n-1}$.

**حل**

**1.** بتعويض $n$ في العلاقة $v_{n+1}=2v_n+5$ بالقيمة 0 وباستعمال $v_0=-3$ نجد: $v_1=2v_0+3=2(-3)+5=-1$

بطريقة مماثلة نجد: $v_2=2v_1+5=2(-1)+5=3$.

**2.** $v_{n+2}=2v_{n+1}+5=2(2v_n+5)+5$ ، ومنه $v_{n+2}=4v_n+15$.

من $v_{n+1}=2v_n+5$ نستنتج أن $v_n=2v_{n-1}+5$ و بالتالي $2v_{n-1}=v_n-5$ ومنه $v_{n-1}=\frac{v_n-5}{2}$.

## II. المتتاليات الحسابية – المتتاليات الهندسية:

### 1. المتتاليات الحسابية

**نشاط**

أ) باستعمال ورقة حساب في مجدول إكسل، احجز في الخليتين A1 و A2 العددين 1 و 3 على الترتيب، ثمّ حدّد الخليتين معا وعمّم محتواهما إلى أسفل العمود A، تحصل على متتالية أعداد بين كل حدّين متتابعين من حدودها نفس الخاصية، عيّنها.

ب) كرّر العملية السابقة مع العددين 0 و 2 في العمود B، وكذا العددين 1 و $-5$ في العمود C.

ج) نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ كما يأتي: $u_n=2n-1$

**1.** احسب الحدود $u_1$ و $u_2$ و $u_3$ و $u_4$

2. عبّر عن $u_{n+1}$ بدلالة $u_n$.

3. احسب بدلالة $n$ كلا من المجاميع الآتية:

$u_1+u_n$ و $u_2+u_{n-1}$ و $u_3+u_{n-2}$ و

$u_p+u_{n-(p-1)}$ حيث $1\le p\le n$

4. عبّر عن $S=u_1+u_2+...+u_n$ بدلالة $n$.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | -5 |
| 3 | 5 | 4 | -11 |
| 4 | 7 | 6 | -17 |
| 5 | 9 | 8 | -23 |
| 6 | 11 | 10 | -29 |
| 7 | 13 | 12 | -35 |
| 8 | 15 | 14 | -41 |
| 9 | 17 | 16 | -47 |
| 10 | 19 | 18 | -53 |

**حل**

أ)، ب) لإنجاز ورقة الحساب المقابلة يستحسن البدء بالعمود A، ثمّ تكرار العملية المتعلقة بالعددين 0 و 2 وكذا العددين 1 و $-5$ في العمودين B و C على الترتيب.

- بالنسبة إلى متتالية الأعداد في العمود A: كل حدّ ينتج بإضافة 2 إلى الحد الذي يسبقه.
- بالنسبة إلى متتالية الأعداد في العمود B: كل حدّ ينتج بإضافة 2 إلى الحد الذي يسبقه.
- بالنسبة إلى متتالية الأعداد في العمود C: كل حدّ ينتج بإضافة $-6$ إلى الحد الذي يسبقه.

**ملاحظة**

في كل من هذه المتتاليات الفرق بين كل حدّين متتابعين ثابت.

ج) بما أنّ $u_n = 2\ n - 1$ من أجل كل عدد طبيعي معدوم $n$ .

**1.** $u_1 = 2\ (1) - 1 = 1$ و $u_2 = 2\ (2) - 1 = 3$

و $u_3 = 2\ (3) - 1 = 5$ و $u_4 = 2\ (4) - 1 = 7$

**2.** التعبير عن $u_{n+1}$ بدلالة $u_n$ .

بما أنّ $u_n = 2\ n - 1$ فإنّ $u_{n+1} = 2\ (n+1) - 1 = 2\ n + 1$

ومنه $u_{n+1} - u_n = 2$ (الفرق بين كل حدّين متتابعين ثابت ويساوي 2) أي $u_{n+1} = u_n + 2$ .

**3.** حساب المجاميع المعطاة بدلالة $n$ :

$$u_1 + u_n = 1 + (2\ n - 1) = 2\ n$$

$$u_2 + u_{n-1} = 3 + [2\ (n-1) - 1] = 2\ n$$

$$u_3 + u_{n-2} = 5 + [2\ (n-2) - 1] = 2\ n$$

بالنسبة إلى $u_p + u_{n-(p-1)}$ لدينا $u_p = 2\ p - 1$

وبالتالي $u_{n-(p-1)} = 2\ (n-(p-1)) - 1 = 2\ n - 2\ p + 1$

ومنه $u_p + u_{n-(p-1)} = 2\ n$ حيث $1 \le p \le n$

نلاحظ أنّه من أجل كل عدد طبيعي $p$ حيث $1 \le p \le n$ فإنّ $u_p + u_{n-(p-1)} = u_1 + u_n$

**4.** التعبير عن $S = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة $n$ .

من $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

نكتب $S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + ... + u_3 + u_2 + u_1$

وبالجمع نجد

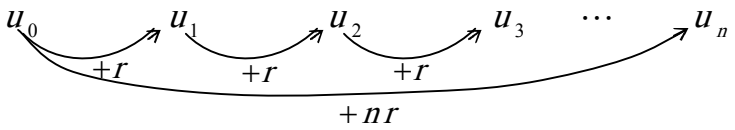
$$2S=(u_1+u_n)+(u_2+u_{n-1})+(u_3+u_{n-2})+\ldots+(u_{n-2}+u_3)+(u_{n-1}+u_2)+(u_n+u_1)$$

أي أنّ $2S$ هو مجموع $n$ حدًا، كل منها من الشكل $u_p+u_{n-(p-1)}$ حيث $1\le p\le n$ ويساوي $u_1+u_n$ أي $2$، ومنه $2S=n(2n)=2n^2$ أي $S=n^2$

**تعريف** (متتالية حسابية)

القول أنّ متتالية $(u_n)$ هي متتالية حسابية معناه يوجد عدد حقيقي $r$، بحيث من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1}=u_n+r$

يسمى $r$ أساس المتتالية الحسابية $(u_n)$.




**أمثلة**

1. متتالية الأعداد الزوجية هي متتالية حسابية أساها $2$.
2. الأعداد $n+5$ ، $n-2$ ، $n-9$ حيث $n$ عدد طبيعي، هي حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $-7$، لأنّ $n-2=(n+5)+(-7)$ و $n-9=(n-2)+(-7)$
3. المتتالية $(u_n)$، حيث $u_n=5n+3$ و $n$ عدد طبيعي، هي متتالية حسابية أساسها $5$، لأنّ $u_{n+1}=5(n+1)+3=5n+8$ ومنه $u_{n+1}=(5n+3)+5$ أي $u_{n+1}=u_n+5$

## عبارة الحد العام

### خاصية1

إذا كانت المتتالية $(u_n)$ متتالية حسابية، حدّها الأول $u_0$ وأساسها $r$، فإنّ من أجل كل عددين طبيعيين $n$ و $p$،

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{و} \quad u_n = u_p + (n-p)r .$$

### برهان

• إذا $(u_n)$ متتالية حسابية حدّها الأول $u_0$ وأساسها $r$، فإنّ:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_1 + r \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ u_{n-1} &= u_{n-2} + r \\ u_n &= u_{n-1} + r \end{aligned}$$

وبجمع هذه الـ $n$ معادلة طرفا إلى طرف والاختصار نجد: $u_n = u_0 + nr$

• إذا $(u_n)$ متتالية حسابية حدّها الأول $u_0$ وأساسها $r$، فإنّه من أجل كل عددين طبيعيين $n$ و $p$، وباستعمال ما سبق، $u_n = u_0 + nr$ و $u_p = u_0 + pr$

ومنه (بالطرح) نجد $u_n - u_p = u_0 + nr - (u_0 + pr) = (n-p)r$

أي $u_n = u_p + (n-p)r$ .

### ملاحظة

كل متتالية $(u_n)$ حيث $u_n = u_0 + nr$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ هي متتالية حسابية حدّها الأول $u_0$ وأساسها $r$ .

**مثال**

1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; ⋯ متتالية الآعداد الفردية أساسها 2، وبالتالي فإنّ حدها العام يكتب: $u_n = u_0 + nr = 1 + n \times 2 = 2n + 1$

أو $u_n = u_1 + (n-1)r = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$

أو $u_n = u_2 + (n-2)r = 5 + (n-2) \times 2 = 2n + 1$

وفي كل حالة نجد $u_n = 2n + 1$

## مجموع $(n+1)$ حدا الأولى

### خاصية2

إذا كانت $(u_n)$ متتالية حسابية فإنّ $S$ مجموع $(n+1)$ حدا الأولى منها يحسب من العلاقة:

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

**بصفة عامة**

$S$ مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية يحسب من العلاقة:

$$S = (\text{عدد الحدود}) \times \left[\frac{\text{الحد الأول} \quad + \quad \text{الحد الأخير}}{2}\right]$$

**مثال**

المجموع $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$ هو مجموع $n$ حدا الأولى من متتالية حسابية أساسها 1، ومنه $S = n\left(\frac{1+n}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}$

**خاصية3**

تكون الأعداد $a$ و $b$ و $c$ بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a+c=2b$ .

أي $b=\dfrac{a+c}{2}$ ويسمى العدد $b$ الوسط الحسابي للعددين $a$ و $c$ .

**مثال**

الأعداد $n+5$ ، $n-2$ ، $n-9$ حيث $n$ عدد طبيعي، هي حدود متتابعة من متتالية حسابية لأنّ $(n-9)+(n+5)=2(n-2)$

**تطبيق**

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=-3n+2$ .

1. احسب $u_0$ و $u_1$ .
2. اثبت أن المتتالية $(u_n)$ حسابية يطلب تعيين أساسها $r$ .
3. احسب، بدلالة $n$ ، المجموع $S=u_0+u_1+\cdots+u_n$ .

**حل**

1. بالتعويض نجد $u_0=-3(0)+2=2$ و $u_1=-3(1)+2=-1$ .

2. لإثبات أن المتتالية $(u_n)$ حسابية يكفي أنْ بيّن أنّ الفرق $u_{n+1}-u_n$ ثابت، من اجل كل عدد طبيعي $n$ .

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

$u_{n+1}-u_n=\left[-3(n+1)+2\right]-\left[-3n+2\right]=-3$ .

نستنتج أنّ المتتالية $(u_n)$ حسابية أساسها $r=-3$ .

**ملاحظة**

يمكن ملاحظة أنّ الحدّ العام $u_n = -3n + 2$ هو من الشّكل $u_n = u_0 + nr$ ومنه استنتاج أنّ المتتالية $(u_n)$ حسابية أساسها $r = -3$ وحدّها الأول 2.

**3.** لدينا عدد حدود المجموع $S$ هو $(n+1)$ ، ذلك لأنّ $u_0 \; ; \; u_1 ; \cdots ; u_n$ هي $(n+1)$ حدا ومنه:

$$S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2 - 3n + 2}{2}$$

أي $S = \dfrac{(n+1)(4-3n)}{2}$.

**طريقة**

لإثبات أن $(u_n)$ متتالية حسابية يكفي أن نثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت، وهو أساسها $r$.

## 2. المتتاليات الهندسية

**نشاط**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ كما يأتي:

$$u_n = 5 \times 3^n$$

**1.** احسب الحدود $u_0$ و $u_1$ و $u_2$ و $u_3$، وجِدْ العلاقة بين كل حدين متتابعين

**2.** عبّر عن $u_{n+1}$ بدلالة $u_n$.

**3.** ليكن $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ مجموع $n+1$ حدًا الأولى من هذه المتتالية:

• بيّن أنّ $3S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1}$، وأنّ $2S = u_{n+1} - u_0$ واستنتج ناتج $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

**4.** حقّق صحة نتائج المجموع $S$ المحصّل عليه باستعمال مجدول إكسل.

**حل**

**1.** حساب الحدود $u_0$ و $u_1$ و $u_2$ و $u_3$. بتعويض $n$ بقيمتها في العلاقة $u_n = 5\times 3^n$ نجد: $u_0 = 5\times 3^0 = 5$ و $u_1 = 5\times 3^1 = 15$ و $u_2 = 5\times 3^2 = 45$ و $u_3 = 5\times 3^3 = 135$.

نلاحظ أنّ كل حدّ يساوي جداء الحد الذي يسبقه والعدد 3.

**2.** التعبير عن $u_{n+1}$ بدلالة $u_n$.

من $u_n = 5\times 3^n$ نجد $u_{n+1} = 5\times 3^{n+1}$ ومنه $u_{n+1} = 5\times 3^{n+1} = 5\times 3^n \times 3 = 3u_n$ أي $u_{n+1} = 3u_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.

**3.** لدينا $3S = 3u_0 + 3u_1 + 3u_2 + \ldots + 3u_n$ وبما أن $u_{n+1} = 3u_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ (من 2.) أي $3u_0 = u_1$ و $3u_1 = u_2$ وهكذا ...

فإنّ $3S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1}$

لدينا $2S = 3S - S = \left(u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1}\right) - \left(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n\right)$

أي $2S = u_{n+1} - u_0$

مما سبق نجد $2S = u_{n+1} - u_0 = 5\times 3^{n+1} - 5$ ومنه $S = \frac{5}{2}\times\left(3^{n+1} - 1\right)$

**4.** التّحقق من صحة النتائج $S = \frac{5}{2}\times\left(3^{n+1} - 1\right)$ باستعمال مجدول إكسل، وذلك بالنسبة إلى بعض الأعداد الطبيعية $n$.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | n | Un | S=U0+U1+…+Un | S=5/2*(3^(n+1)-1) |
| 2 | 0 | 5 | 5 | 5 |
| 3 | 1 | 15 | 20 | 20 |
| 4 | 2 | 45 | 65 | 65 |
| 5 | 3 | 135 | 200 | 200 |
| 6 | 4 | 405 | 605 | 605 |
| 7 | 5 | 1215 | 1820 | 1820 |

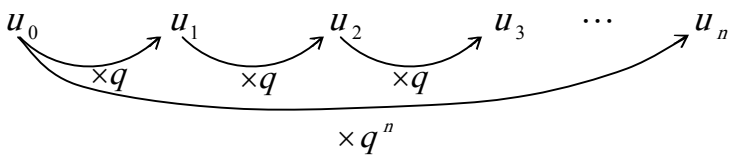
لإنجاز ورقة الحساب أعلاه، باستعمال مجدول، واستغلالها يمكن إتباع الخطوات الآتية :

- احجز في الخليتين A2 و A3 العددين 0 و 1 على الترتيب.
- احجز في الخلية B2 الصيغة =5*3^A2 ثمّ عمّمها بالسحب إلى الخلية B3 تحصل على الحدين الأول 5 والثاني 15.
- احجز في الخلية C2 العدد 5 وفي الخلية C3 الصيغة =B3+C2 تحصل على 20 مجموع الحدين الأول والثاني.
- احجز في الخلية D2 الصيغة =5/2*(3^(A2+1)-1) ثمّ عمّمها بالسحب إلى الخلية D3 تحصل على المجموعين 5 و 20.
- حدّد الخلايا A3 و B3 و C3 و D3 دفعة واحدة وعمّم محتواها بالسحب إلى الأسفل، ولاحظ تطابق النتائج في العمودين C و D حيث في العمود الأول حسبنا المجموع باستعمال الجمع البسيط، أما في العمود الثاني حسبنا المجموع باستعمال العلاقة $S=\frac{5}{2}\times\left(3^{n+1}-1\right)$.

## المتتالية هندسية

**تعريف** (المتتالية هندسية)

القول أنّ متتالية $(u_n)$ هي متتالية هندسية معناه يوجد عدد حقيقي $q$ ، بحيث من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = q\,u_n$
يسمى $q$ أساس المتتالية الهندسية $(u_n)$ .




**أمثلة**

1. الأعداد 3 ، $\frac{3}{2}$ ، $\frac{3}{4}$ هي حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، لأنّ: $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times 3$ و $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}$

2. المتتالية $(u_n)$، حيث $u_n = 5^n$ و $n$ عدد طبيعي، هي متتالية هندسية أساسها 5، لأنّ $u_{n+1} = 5^{n+1} = = 5 \times 5^n$ أي: $u_{n+1} = 5\,u_n$

3. المتتالية $(v_n)$، حيث $v_0 = 1$ و $v_{n+1} = 3\,v_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، هي متتالية هندسية أساسها 3 .

## عبارة الحد العام

### خاصية1

إذا كانت المتتالية $(u_n)$ متتالية هندسية، حدّها الأول $u_0$ وأساسها $q$ ، فإنّ من أجل كل عددين طبيعيين $n$ و $p$ ، $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_n = u_p\,q^{n-p}$ .

**برهان**

• إذا $(u_n)$ متتالية هندسية حدّها الأول $u_0$ وأساسها $q$، فإنّ:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times q \\ u_2 &= u_1 \times q \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ u_{n-1} &= u_{n-2} \times q \\ u_n &= u_{n-1} \times q \end{aligned}$$

وبضرب هذه الـ $n$ معادلة طرفا إلى طرف والاختصار نجد: $u_n = u_0 \times q^n$

• إذا $(u_n)$ متتالية هندسية، حدّها الأول $u_0$ وأساسها $q$، فإنّ من أجل كل عددين طبيعيين $n$ و $p$، وباستعمال ما سبق، $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_p = u_0 \times q^p$

ومنه (بالقسمة) نجد $\dfrac{u_n}{u_p} = \dfrac{u_0 \times q^n}{u_0 \times q^p} = q^{n-p}$ أي $u_n = u_p\, q^{n-p}$.

**ملاحظة**

كل متتالية $(u_n)$ حيث $u_n = u_0\, q^n$ من أجل كل عدد طبيعيين $n$ هي متتالية هندسية حدّها الأول $u_0$ وأساسها $q$.

**مثال**

"3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; ⋯ " حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها 2 وحدّها الأول 3، وبالتالي فإنّ حدّها العام يكتب: $u_n = u_0\, q^{n-0} = 3 \times 2^n$

أو $u_n = u_1\, q^{n-1} = 6 \times 2^{n-1} = 3 \times 2 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^n$

أو $u_n = u_2\, q^{n-2} = 12 \times 2^{n-2} = 3 \times 2^2 \times 2^{n-2} = 3 \times 2^n$

## مجموع $(n+1)$ حدا الأولى

### خاصية2

إذا كانت $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $q$ (حيث $q\neq 1$)، فإنّ $S$ مجموع $(n+1)$ حدا الأولى منها يحسب من العلاقة:

$$S=u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}+u_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

**بصفة عامة**

يحسب $S$ مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها يختلف عن 1 بالعلاقة:

$$S=(\text{الحد الأول})\times\left[\frac{1-(\text{الأساس أس عدد الحدود})}{1-(\text{الأساس})}\right]$$

### مثال

المجموع $S=3+6+12+24+\cdots+1536$ هو مجموع 10 حدود الأولى من متتالية هندسية أساسها 2 وحدّها الأول 3، لأنّ كل حد هو من الشكل $3\times 2^n$ حيث $n$ تنتمي إلى $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

ومنه $S=3\left(\frac{1-2^{10}}{1-2}\right)=3\left(2^{10}-1\right)=3069$

### خاصية3

تكون الأعداد $a$ و $b$ و $c$ بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $a\times c=b^2$.

أي $b=\sqrt{a\times c}$ ويسمى العدد $b$ الوسط الهندسي للعددين $a$ و $c$.

**مثال**

الأعداد $2$ ، $2\sqrt{3}$ ، $6$ هي حدود متتابعة من متتالية هندسية لأنّ $2\times 6=\left(2\sqrt{3}\right)^2$

**تطبيق**

$(v_n)$ متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1=3$ وأساسها $q=2$

1. احسب $v_2$ و $v_3$.
2. عبّر عن الحد العام $v_n$ بدلالة $n$.
3. احسب، بدلالة $n$، المجموع $S=v_1+v_2+\cdots+v_n$.

**حل**

1. حساب الحدين $v_2$ و $v_3$

$$v_2=v_1\times q=3\times 2=6$$

$$v_3=v_2\times q=6\times 2=12 \quad \text{أو} \quad v_3=v_1\times q^{3-1}=3\times 2^2=12$$

2. التعبير عن الحد العام $v_n$ بدلالة $n$: $v_n=v_1\times q^{n-1}=3\times 2^{n-1}$.
3. المجموع $S=v_1+v_2+\cdots+v_n$ يتكوّن من $n$ حد، ومنه

$$S=v_1+v_2+\cdots+v_n=v_1\times\frac{1-q^n}{1-q}$$

وبالتعويض نجد $S=3\times\frac{1-2^n}{1-2}=-3\left(1-2^n\right)=3\left(2^n-1\right)$.

## III. نمذجة وضعية باستعمال متتالية:

**نشاط**

يزداد عدد سكان مدينة A بـِ 130 نسمة كل سنة، في حين يزداد عدد سكان مدينة B بنسبة 2% من سنة إلى أخرى. في سنة 2005 بلغ عدد سكان كل مدينة من المدينتين A و B 6000 نسمة.

**نمذجة الوضعية**

نرمز بـِ $u_n$ إلى عدد سكان المدينة A و بـِ $v_n$ إلى عدد سكان المدينة B خلال السنة $2005+n$.

1. عين $u_0$ و $v_0$ ثمّ $u_1$ و $v_1$.
2. أثبت أنّ المتتالية $(u_n)$ هي متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها $r$.
3. عبر عن $u_n$ بدلالة $n$.
4. أثبت أنّ المتتالية $(v_n)$ هي متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها $q$.
5. عبر عن $v_n$ بدلالة $n$.
6. قارن بين عددي سكان المدينتين A و B في سنة 2010.

**التخمين باستعمال مجدول إكسل**

باستعمال مجدول إكسل احجز المتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ وذلك بإتباع الخطوات الآتية :

- احجز في الخلايا A2 و B2 و C2 و D2 الأعداد 0 و 2005 و 6000 و 6000 على الترتيب.

• احجز في الخلايا A3 و B3 و C3 و D3 و E3 العدد 1 والصيغ =B2+1 و =C2+130 و =D2×1,02 و =SI(D3>C3;"محققة";"غيرمحققة") على الترتيب.

**ملاحظة**

الصيغة =SI(D3>C3;"محققة";"غيرمحققة") تعني إذا كان العدد الموجود في الخلية D3 أكبر من العدد الموجود في الخلية C3 أظهر عبارة "محققة"، فيما عدا ذلك أظهر عبارة "غير محققة".

• حدّد الخلايا A3 و B3 و C3 و D3 و E3 دفعة واحدة وعمّم محتواها بالسحب إلى الأسفل، ولاحظ النتائج.

ابتداء من أية سنة يفوق عدد سكان المدينة B عدد سكان المدينة A ؟

**حل**

**1.** تعيين $u_0$ و $v_0$ ثمّ $u_1$ و $v_1$.

بما أنّ $u_n$ هو عدد سكان المدينة A خلال سنة $2005+n$، فإنّ:

$u_0$ هو عدد سكان المدينة A خلال سنة 2005 ومنه $u_0=6000$

و $u_1$ هو عدد سكانها خلال سنة 2006 ومنه $u_1=6000+130=6130$

وبما أنّ $v_n$ هو عدد سكان المدينة B خلال سنة $2005+n$، فإنّ:

$v_0$ هو عدد سكان المدينة B خلال سنة 2005 ومنه $v_0=6000$

و $v_1$ هو عدد سكانها خلال سنة 2006 ومنه $v_1=6000+\frac{2\times 6000}{100}=6120$

**2.** بما أنّ عدد سكان المدينة A يزداد بـِ 130 نسمة كل سنة، فإنّ العلاقة بين $u_n$ (عدد سكانها خلال السنة $2005+n$) و $u_{n+1}$ (عدد سكانها خلال السنة

الموالية) هي $u_{n+1}=u_n+130$ ، ومنه المتتالية $(u_n)$ هي متتالية حسابية أساسها $r=130$

**3.** التعبير عن $u_n$ بدلالة $n$ : بالتعويض في $u_n=u_0+nr$ بقيمتي $u_0$ و $r$ نجد $u_n=6000+n(130)=130\,n+6000$

**4.** بما أنّ عدد سكان المدينة B يزداد بنسبة 2% من سنة إلى أخرى، فإنّ العلاقة بين $v_n$ (عدد سكانها خلال السنة $2005+n$) و $v_{n+1}$ (عدد سكانها خلال السنة الموالية) هي $v_{n+1}=v_n+\frac{2}{100}v_n$ ،

أي $v_{n+1}=\left(1+\frac{2}{100}\right)v_n$ وبالتالي $v_{n+1}=1,02\ v_n$ ومنه المتتالية $(v_n)$ هي متتالية هندسية أساسها $q=1,02$

**5.** التعبير عن $v_n$ بدلالة $n$ : بالتعويض في $v_n=v_0\times q^n$ بقيمتي $v_0$ و $q$ نجد $v_n=6000\times 1,02^n$ .

**6.** بحل المعادلة $2005+n=2010$ نجد $n=5$ ،

نرمز لعدد سكان المدينتين A و B بالرمزين $u_5$ و $v_5$ على الترتيب في سنة 2010 .

بما أنّ $u_5=130\times 5+6000=6650$ ، و $v_5=6000\times 1,02^5=6624,48$

فإنّ في سنة 2010 عدد سكان المدينة A هو 6650 نسمة، وهو أكبر من عدد سكان المدينة B الذي يقدّر بحوالي 6624 نسمة.

**التخمين باستعمال مجدول إكسل**

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | n | السنة | Un | Vn | Vn > Un |
| 2 | 0 | 2005 | 6000 | 6000 | |
| 3 | 1 | 2006 | 6130 | 6120 | غير محققة |
| 4 | 2 | 2007 | 6260 | 6242,4 | غير محققة |
| 5 | 3 | 2008 | 6390 | 6367,25 | غير محققة |
| 6 | 4 | 2009 | 6520 | 6494,59 | غير محققة |
| 7 | 5 | 2010 | 6650 | 6624,48 | غير محققة |
| 8 | 6 | 2011 | 6780 | 6756,97 | غير محققة |
| 9 | 7 | 2012 | 6910 | 6892,11 | غير محققة |
| 10 | 8 | 2013 | 7040 | 7029,96 | غير محققة |
| 11 | 9 | 2014 | 7170 | 7170,56 | محققة |
| 12 | 10 | 2015 | 7300 | 7313,97 | محققة |
| 13 | 11 | 2016 | 7430 | 7460,25 | محققة |

بعد انجاز ورقة الحساب أعلاه، نلاحظ أنّه ابتداء من سنة 2014 يفوق عدد سكان المدينة B عدد سكان المدينة A .

**تطبيق**

بلغ عدد سكان إحدى المدن الجزائرية 3000 نسمة سنة 2005 و 3630 نسمة سنة 2007 .

نفرض $\alpha$ نسبة تزايد السكان سنويا بهذه المدينة وأنّها ثابتة.

1. عين قيمة $\alpha$ (نسبة تزايد سكان المدينة سنويا).
2. كم سيكون عدد سكان هذه المدينة سنة 2030 ؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات.

**حل**

ليكن $n$ عدد طبيعي. نرمز بـ $u_n$ إلى عدد سكان المدينة السنة $2005+n$ ومنه $u_0 = 3000$ ( $u_0$ عدد السكان سنة 2005 )

و $u_2 = 3630$ ( $u_2$ عدد السكان سنة 2007 ).

**1.** رمزنا بـ $u_n$ لعدد سكان المدينة السنة $2005+n$، فيكون $u_{n+1}$ هو عدد سكانها السنة الوالية. بما أن نسبة التزايد السنوية $\alpha$ ثابتة فإن العلاقة بين عدد السكان خلال السنة $2005+n$ وعدد السكان خلال السنة الموالية هي:

$u_{n+1} = u_n + \alpha u_n$ أي $u_{n+1} = (1+\alpha)u_n$.

نستنتج أن المتتالية $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = 1+\alpha$.

لدينا إذن $u_2 = u_0 \times q^2$ ومنه $q^2 = \frac{u_2}{u_0}$. نجد هكذا $q^2 = 1,21$

و بالتالي $q = 1,1$، ومنه $\alpha = 0,1 = 10\%$.

**2.** في البداية نبحث عن $p$ بحيث $u_p$ هو عدد السكان سنة 2030

أي $2005 + p = 2030$ ومنه $p = 25$.

لدينا $u_{25} = u_0 \times q^{25}$ ومنه $u_{25} = 3000 \times (1,1)^{25}$ أي $u_{25} \simeq 32504,12$.

يكون عدد سكان المدينة سنة 2030 حوالي 32500 نسمة.

## طرائق

- يمكن نمذجة المقادير التي تتزايد (أو تتناقص) بمقدار ثابت $r$ بمتتالية حسابية أساسها $r$ (أو $-r$).
- كما يمكن نمذجة المقادير التي تتزايد (أو تتناقص) بنسبة ثابتة $\alpha$ بمتتالية هندسية أساسها $q = 1+\alpha$ (أو $q = 1-\alpha$).

## IV. اتجاه تغير متتالية:

### 1. اتجاه تغير متتالية

**أنشطة**

1. أ) اكتب الستة حدود الأولى من المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = \frac{3}{n+1}$

ب) هل الحدود المتتابعة الناتجة هي في تزايد أم في تناقص؟

ج) ضع تخمينا بين الحدين $u_n$ و $u_{n+1}$.

د) اثبت صحة التخمين الذي وضعته.

2. باستعمال مجدول إكسل مثل بيانيا الحدود الإحدى عشرة الأولى من المتتالية الحسابية $(u_n)$ ذات الحد الأول $u_0 = 10$ والأساس $r$ في كل من الحالتين: أ) $r = 3$ ب) $r = -3$

- غيّر قيمة $r$ وضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية الحسابية.

3. باستعمال مجدول إكسل مثل بيانيا الحدود الإحدى عشرة الأولى من المتتالية الهندسية $(v_n)$ ذات الحد الأول $u_0$ والأساس $q$ في كل من الحالات: أ) $q = \frac{1}{2}$ و $v_0 = 35$ ب) $q = 2$ و $v_0 = 35$

ج) $q = \frac{1}{2}$ و $v_0 = -35$ د) $q = 2$ و $v_0 = -35$

- غيّر قيمة $q$ أو $u_0$ وضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية الهندسية.

**حل**

**1.** أ) الحدود الستة الأولى هي على الترتيب:

$u_5 = 0,5$ ; $u_4 = 0,6$ ; $u_3 = 0,75$ ; $u_2 = 1$ ; $u_1 = 1,5$ ; $u_0 = 3$

**ب)** إنّ $u_5 < u_4 < u_3 < u_2 < u_1 < u_0$ أي أنّ الحدود المتتابعة الناتجة هي في تناقص.

**جـ)** بناء على ماسبق يمكن وضع التّخمين الآتي: $u_{n+1} < u_n$ .

**د)** إثبات أنّ $u_{n+1} < u_n$ :

إنّ $2 > 1$ ومنه، بإضافة $n$ إلى الطرفين، نجد $n + 2 > n + 1$

و بالتالي فإنّ $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$ وبضرب كل من الطرفين في 3 نجد

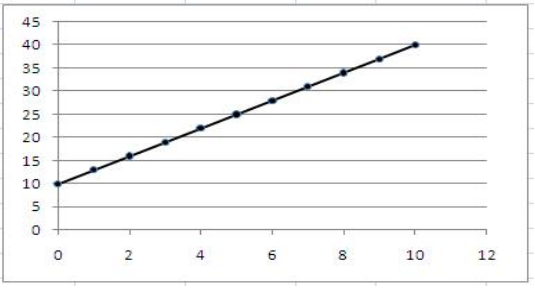
$\frac{3}{n+2} < \frac{3}{n+1}$ أي $\frac{3}{(n+1)+1} < \frac{3}{n+1}$ ومعناه أنّ $u_{n+1} < u_n$

**ملاحظة**

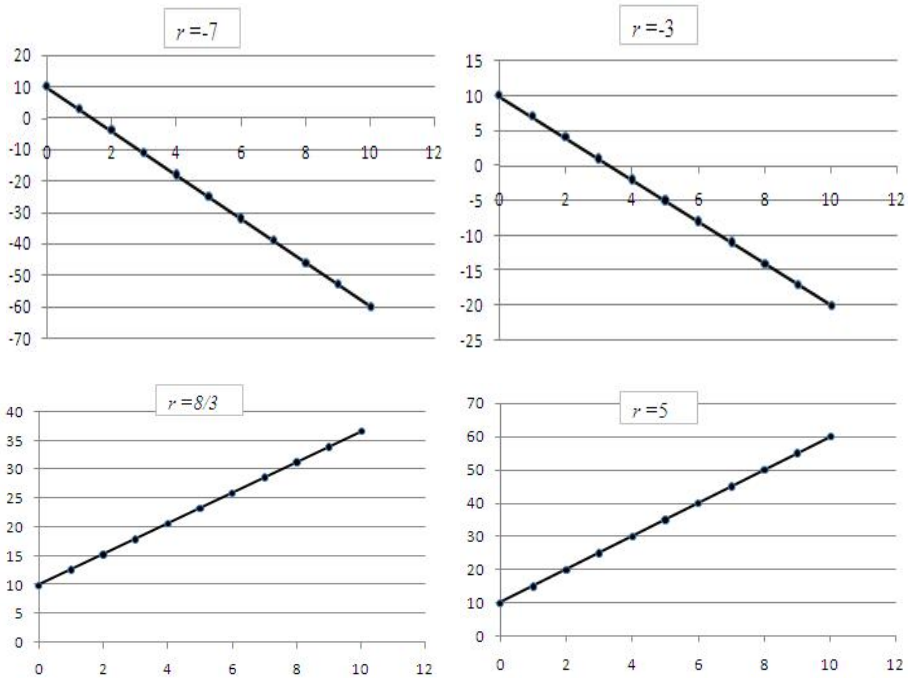
توجد طرائق أخرى لإثبات صحّة $u_{n+1} < u_n$ منها التحقق من $u_{n+1} - u_n < 0$ أو أنّ $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

**2.**

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | n | Un | r |
| 2 | 0 | 10 | 3 |
| 3 | 1 | 13 | |
| 4 | 2 | 16 | |
| 5 | 3 | 19 | |
| 6 | 4 | 22 | |
| 7 | 5 | 25 | |
| 8 | 6 | 28 | |
| 9 | 7 | 31 | |
| 10 | 8 | 34 | |
| 11 | 9 | 37 | |
| 12 | 10 | 40 | |



- بالنسبة إلى المتتالية $(u_n)$ احجز في الخلايتين A2 و C2 العددين 0 و 3 على الترتيب، وفي الخلية B2 الصيغة =10+A2×$C$2.
- حدّد الخليتين A2و B2معا وعمّم محتواهما بالسحب إلى السطر 12 مثلا.
- حدّد الخلايا من A1 و B1 إلى A12 و B12، ثمّ أدرج التمثيل البياني باستعمال أيقونة Insertion ثمّ Nuage de points.
- بإرفاق $r$ بالقيم $-3$ ; $-7$ ; $5$ ; $\frac{8}{3}$ على سبيل المثال نحصل على التمثيلات الآتية :

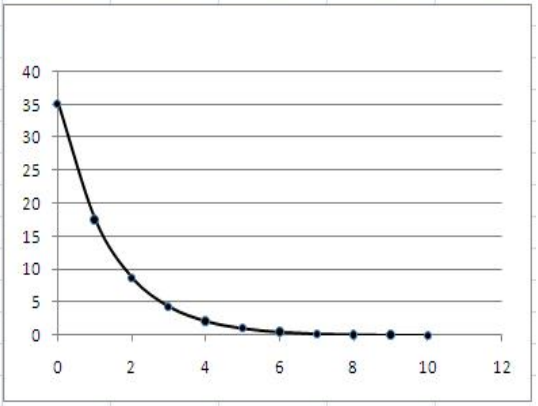


عندئذ يمكننا وضع التخمين الأتي :

تكون متتالية حسابية متزايدة إذا كان أساسها موجبا، وتكون متناقصة إذا كان أساسها سالبا.

.3

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | n | Vn | V0 | q |
| 2 | 0 | 35 | 35 | 0,5 |
| 3 | 1 | 17,5 | | |
| 4 | 2 | 8,75 | | |
| 5 | 3 | 4,375 | | |
| 6 | 4 | 2,1875 | | |
| 7 | 5 | 1,09375 | | |
| 8 | 6 | 0,546875 | | |
| 9 | 7 | 0,2734375 | | |
| 10 | 8 | 0,1367188 | | |
| 11 | 9 | 0,0683594 | | |
| 12 | 10 | 0,0341797 | | |
| 13 | | | | |




• يتم الحجز بالنسبة إلى $(v_n)$ كما يلي:

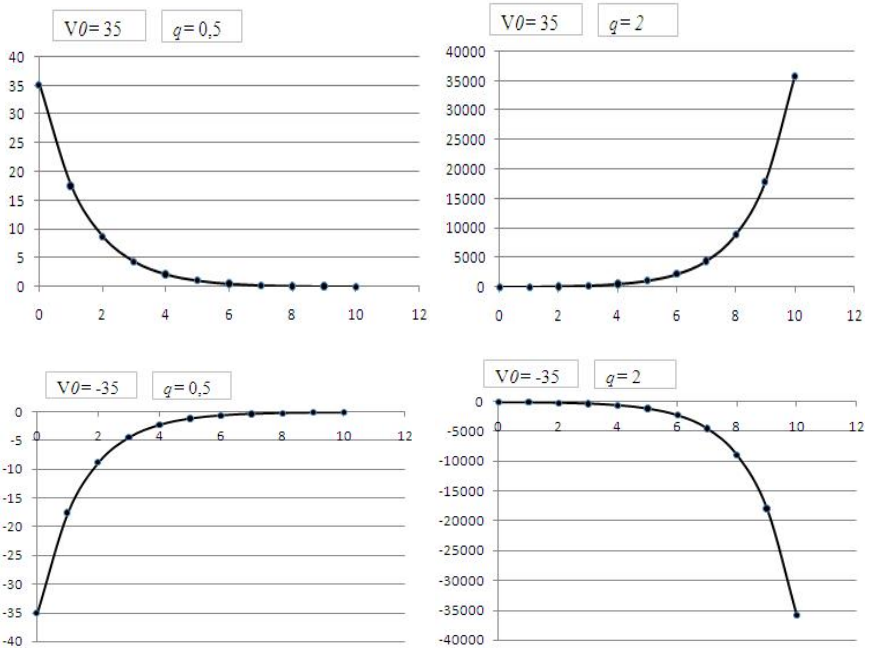
أحجز في الخلايا A2 و C2 و D2 الأعداد 0 و 35 و 0,5 على الترتيب.

أحجز في الخلية B2 الصيغة =$C$2×$D$2^A2.

• حدّد الخليتين A2وB2معا وعمّم محتواهما بالسحب إلى السطر 12 مثلا.

• حدّد الخلايا من A1 و B1 إلى A12 و B12، ثمّ أدرج التمثيل البياني باستعمال أيقونة Insertion ثمّ Nuage de points.

• غيّر $r$ بقيمة أكبر من 1 مرّة وأصغر منه مرّة أخرى، ثمّ غيّر $V_0$ بقيمة موجبة مرّة وسالبة مرّة أخرى ولاحظ اتجاه تغير التمثيل البياني الناتج، وعلى سبيل المثال لاحظ التمثيلات الآتية:




• بالنسبة إلى التخمين المتعلق باتجاه التغير انظر (الفقرة IV-3)

## تعاريف

$(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ، القول عن:

1. $(u_n)$ أنّها متزايدة، يعني أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ $u_{n+1} \geq u_n$.
2. $(u_n)$ أنّها متناقصة، يعني أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ $u_{n+1} \leq u_n$.
3. $(u_n)$ أنّها ثابتة، يعني أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = u_n$.
4. القول عن $(u_n)$ أنّها رتيبة، يعني أنّها إما متزايدة وإما متناقصة.

## ملاحظات

- تبقى التعاريف السابقة صحيحة في حالة متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n \geq n_0$.
- توجد متتاليات ليست متزايدة وليست متناقصة. نقول أنّها غير رتيبة، ومثال على ذلك المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها العام $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
- تكون المتتالية $(u_n)$ ثابتة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $k$ بحيث من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n = k$.

### تطبيق1

لتكن $(u_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = n^2 - n$.

1. احسب $u_{n+1} - u_n$ من اجل كل عدد طبيعي $n$.
2. استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

**حل**

1. $u_{n+1}-u_n=\left[(n+1)^2-(n+1)\right]-\left(n^2-n\right)$ و منه $u_{n+1}-u_n=2n$.

2. نستنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ من مقارنة الحدين $u_n$ و $u_{n+1}$

من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $2n\geq 0$ ، أي $u_{n+1}-u_n\geq 0$ ، وهذا معناه أنّ $u_{n+1}\geq u_n$. إذن المتتالية $(u_n)$ متزايدة.

**تطبيق2**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي:

$u_1=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$.

برهن بالتراجع أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة.

**حل**

لإثبات أنّ المتتالية $(u_n)$ متناقصة يكفي إثبات أنّه، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $u_{n+1}\leq u_n$.

**المرحلة1**

من أجل $n=1$ لدينا $u_1=4$

و $u_2=\frac{1}{2}u_1-1=\frac{1}{2}\times 4-1=1$ ومنه $u_2\leq u_1$.

**المرحلة2**

نفرض أنّ $u_{n+1}\leq u_n$ من أجل عدد طبيعي غير معدوم $n$.

ونبرهن على أن $u_{n+2}\leq u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1} \leq u_n$ (من الفرضية السابقة)، وبضرب كل من الطرفين في $\frac{1}{2}$ نجد $\frac{1}{2}u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$، ثمّ نضيف $(-1)$ إلى كل من الطرفين فنحصل على:

$\frac{1}{2}u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}u_n - 1$ أي $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

**الخلاصة**

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، $u_{n+1} \leq u_n$.

إذن المتتالية $(u_n)$ متناقصة.

**طريقة**

لدراسة اتجاه تغير متتالية $(u_n)$ يمكن مقارنة الحدين $u_{n+1}$ و $u_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$.

## 2. اتجاه تغير متتالية حسابية

$(u_n)$ متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول $u_0$ وأساسها $r$.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} - u_n = r$ ومنه:

- إذا كان $r$ موجبا تماما $(r > 0)$ فإن المتتالية متزايدة تماما.

**مثال**

المتتالية $(u_n)$ حيث $u_n = 11n$ هي متتالية حسابية أساسها 11 وهو عدد موجب فهي متتالية متزايدة تماما. يمكن التحقق بسهولة من أنّ $u_{n+1} > u_n$.

- إذا كان $r$ سالبا تماما $(r < 0)$ فإن المتتالية متناقصة تماما.

**مثال**

المتتالية $(u_n)$ حيث $u_n = 1 - 5n$ هي متتالية حسابية أساسها $-5$ وهو عدد سالب فهي متتالية متناقصة تماما. يمكن التحقق بسهولة من أنّ $u_{n+1} < u_n$ .

- إذا كان $r$ معدوما $(r = 0)$ فإن المتتالية ثابتة.

**مثال**

$(u_n)$ حيث $u_n = 7$ هي متتالية ثابتة، حدودها هي $7\ ;\ 7\ ;\ 7\ ;\ \cdots$

## 3. اتجاه تغير متتالية هندسية

$(u_n)$ متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول $u_0$ وأساسها $q$ .

نعلم أن $u_n = u_0\, q^n$ و $u_{n+1} = u_0\, q^{n+1}$ . نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} - u_n = u_0\, q^n (q-1)$ ومنه :

- إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما.

**مثال**

المتتالية $(u_n)$ حيث $u_n = 3 \times 2^n$ هي متتالية هندسية أساسها $q = 2$ فهو أكبر من واحد، وحدها الأول $u_0 = 3$ فهو موجب، وبالتالي فهي متتالية متزايدة تماما. يمكن التحقق بحساب $u_{n+1} - u_n$ .

- إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإنّ المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما.

**مثال**

المتتالية $(u_n)$ حيث $u_n = -3 \times 2^n$ هي متتالية هندسية أساسها $q = 2$ أكبر من واحد، وحدها الأول $u_0 = -3$ سالب، فهي متناقصة تماما.

- إذا كان $0 < q < 1$ و $u_0 > 0$ فإنّ المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما.

**مثال**

المتتالية $(u_n)$ حيث $u_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ هي متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ فهو أصغر من 1، وحدها الأول $u_0=3$ موجب، وبالتالي فهي متناقصة تماما.

- إذا كان $0<q<1$ و $u_0<0$ فإنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما.

**مثال**

المتتالية $(u_n)$ حيث $u_n=-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ هي متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ فهو أصغر 1، وحدها الأول $u_0=-3$ سالب، وبالتالي فهي متزايدة تماما.

- إذا كان $q=1$ فإنّ المتتالية ثابتة.

**مثال**

$(u_n)$ حيث $u_n=3$ هي متتالية ثابتة، حدودها هي $3\,;3\,;3\,;\cdots$

- إذا كان $q=0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد الثاني.

لأنّ من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n=u_0\times q^n=u_0\times 0^n=0$

- إذا كان $q<0$ فإن العبارة $u_{n+1}-u_n$ لا تحافظ على إشارة ثابتة، ومنه المتتالية $(u_n)$ ليست رتيبة.

لأنّ $u_{n+1}-u_n=u_0\times(q-1)\times q^n$ و $q^n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة.

**تطبيق**

لتكن $(v_n)$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{3^n}{2^{n+1}}$.

1. بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية وعيّن أساسها وحدها الأول.
2. ما هو اتجاه تغير المتتالية $(v_n)$ ؟

**حل**

1. تعلم أنّ $(u_n)$ متتالية هندسية معناه يوجد عدد حقيقي $q$ (أساسها)، بحيث من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1} = q u_n$ وعليه:

لدينا $v_n = \frac{3}{2} \times \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \times \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3 \times 3^n}{2 \times 2^{n+1}} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} = v_{n+1}$ ، ومنه المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{3}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$.

2. بما أنّ $q > 1$ و $v_0 > 0$ فإن المتتالية $(v_n)$ متزايدة.

يمكن البرهان أنّ الفرق $v_{n+1} - v_n$ موجب $v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

## V. المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = a u_n + b$ حيث $(a \neq 0$ و $b \neq 0)$:

**نشاط**

في أول جانفي 2000 أودع نبيل 10000 DA ببنك يقترح فائدة مركبة نسبتها 5% سنويا، بالإضافة إلى ذلك، فإنه يودع في كل أول جانفي من السنوات الموالية مبلغ 2000 DA.

نرمز بـ $u_n$ إلى رصيد نبيل في أول جانفي من السنة $2000 + n$.

1. عين $u_0$ ثم احسب $u_1$ و $u_2$.

2. تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} = 1{,}05 u_n + 2000$.

3. بيّن أنّ المتتالية $(u_n)$ ليست حسابية وليست هندسية.

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$، $v_n = u_n + 40000$

• بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $1,05$، وعين حدها الأول.

• عبّر عن $v_n$ بدلالة $n$ ثمّ استنتج $u_n$ بدلالة $n$.

• كم يكون رصيد نبيل في سنة $2010$؟

**5.** نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$، $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ و $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$

• احسب $S'_n$ بدلالة $n$ ثمّ استنتج $S_n$ بدلالة $n$.

**حل**

**1.** بما أنّ $u_n$ يرمز إلى رصيد نبيل في أول جانفي من السنة $2000 + n$، فإنّ $u_0$ هو رصيده سنة $2000$ وبالتالي $u_0 = 10000$

إنّ $u_1 = u_0 + \frac{5}{100}u_0 + 2000 = (1,05) \times 10000 + 2000 = 12500$

و $u_2 = u_1 + \frac{5}{100}u_1 + 2000 = (1,05) \times 12500 + 2000 = 15125$.

**2.** التحقق أنّ من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} = 1,05u_n + 2000$.

من أجل كل عدد طبيعي $n$، يرمز $u_n$ إلى رصيد نبيل في أول جانفي من السنة $2000 + n$، كما يرمز $u_{n+1}$ إلى رصيده في السنة الموالية، الذي هو مجموع المقادير الثلاثة: رصيده السبق $u_n$ والفائدة على هذا الرصيد $\frac{5}{100}u_n$ والمبلغ $2000$ الذي يودعه في كل أول جانفي، فيكون:

$u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100}u_n + 2000$ أي $u_{n+1} = 1,05u_n + 2000$

**3.** إثبات أنّ المتتالية $(u_n)$ ليست حسابية وليست هندسية.

وجدنا: $u_0 = 10000$ و $u_1 = 12500$ و $u_2 = 15125$.

بما أنّ: $u_1 - u_0 = 2500$ و $u_2 - u_1 = 2625$.

وبالتالي فإنّ $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ ومنه المتتالية $(u_n)$ ليست حسابية.

بما أنّ: $\frac{u_1}{u_0} = \frac{12500}{10000} = 1,25$ و $\frac{u_2}{u_1} = \frac{15125}{12500} = 1,21$.

وبالتالي فإنّ $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ ومنه المتتالية $(u_n)$ ليست هندسية.

**ملاحظة**

يمكن البرهان باستعمال خواص المتتاليتين الحسابية والهندسية.

**4.** نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$، $v_n = u_n + 40000$

- إثبات أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $1,05$:

لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} + 40000 = (1,05\,u_n + 2000) + 40000$

$v_{n+1} = 1,05\,u_n + 42000 = 1,05(u_n + 40000)$

ومنه $v_{n+1} = 1,05\,v_n$

ولدينا $v_0 = u_0 + 40000 = 50000$، وبالتالي فإنّ $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $1,05$، وحدّها الأول $v_0 = 50000$.

- التعبير عن $v_n$ بدلالة $n$ ثمّ استنتج $u_n$ بدلالة $n$:

لدينا $v_n = v_n \times q^n = 50000 \times (1,05)^n$

إنّ $v_n = u_n + 40000$ ومنه $u_n = v_n - 40000$

وبالتالي $u_n = 50000 \times (1,05)^n - 40000$

- رصيد نبيل في سنة 2010 هو $u_{10}$، وبالتعويض في العلاقة السابقة نجد

$u_{10} = 50000 \times (1,05)^{10} - 40000 \simeq 41444,73$

**5.** حساب كل من: $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$ و $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$

- إنّ $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$ هو مجموع $n$ حدا الأولى لمتتالية هندسية أساسها $1,05$، وحدّها الأول $v_0 = 50000$ ، ومنه

$$S'_n = 50000 \times \frac{1-(1,05)^n}{1-1,05} = 10^6\left[(1,05)^n - 1\right]$$

- استنتاج $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ :

بما أنّ $u_n = v_n - 40000$ فإنّ

$$S_n = (v_0 - 40000) + (v_1 - 40000) + \ldots + (v_{n-1} - 40000)$$

أي $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} \; - \; 40000\,n$

ومنه $S_n = 10^6\left[(1,05)^n - 1\right] - 40000\,n$

**دراسة أمثلة للمتتاليات** $(u_n)$ **حيث** $u_{n+1} = a\,u_n + b$

نعتبر $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1$ والعلاقة $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$.

## 1. الحالة الأولى $a = 1$

**مثال**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 2$ ومن أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$، $u_{n+1} = u_n - 3$ .

- واضح أنّ المتتالية $(u_n)$ حسابية أساسها $r = -3$ وحدها الأول $u_1 = 2$.
- من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$، $u_n = u_1 + (n-1)r$ ومنه $u_n = 5 - 3n$.

• من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$، $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ ومنه

$$S_n = \frac{n(7-3n)}{2}$$

• من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$، $u_{n+1} - u_n = -3$ ومنه المتتالية $(u_n)$ متناقصة.

## 2. الحالة الثانية $a \neq 1$ و $u_1 = \frac{b}{1-a}$

**مثال**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = -3$ ومن أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$، $u_{n+1} = 2u_n + 3$ .

• حساب الحدود الأولى يعطينا: $u_2 = -3$ و $u_3 = -3$، ... نخمن أن المتتالية $(u_n)$ ثابتة.

• لنبين بالتراجع أنّه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$، $u_n = -3$.

1) الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$ لأن $u_1 = -3$.

2) نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي $n$ حيث $n \geq 1$ أي أن $u_n = -3$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا $u_{n+1} = 2u_n + 3 = 2(-3) + 3$ ومنه $u_{n+1} = -3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$. إذن المتتالية $(u_n)$ ثابتة.

• من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$، $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = nu_1$ ومنه $S_n = -3n$.

### 3. الحالة الثالثة $a \neq 1$ و $u_1 \neq \frac{b}{1-a}$

لحساب الحد العام $u_n$ والمجموع $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ نستعين بالمتتالية ذات الحد العام $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

**مثال**

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 1$ ومن أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$، $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام: $v_n = u_n + 3$.

• من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$،

$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = (2u_n + 3) + 3 = 2u_n + 6 = 2(u_n + 3) = 2\,v_n$.

لدينا من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$، $v_{n+1} = 2\,v_n$. نستنتج أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $v_1 = u_1 + 3 = 4$ لأنّ $4$.

• من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$، $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 4 \times 2^{n-1}$

ومنه $u_n = v_n - 3 = 4 \times 2^{n-1} - 3$.

• من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$، $S'_n = v_1 + v_2 + ... + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

ومنه $S'_n = 4(2^n - 1)$.

ولدينا $u_n = v_n - 3$ ومنه

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = (v_1 - 3) + (v_2 - 3) + ... + (v_n - 3)$$

$$S_n = (v_1 + v_2 + ... + v_n) - (3 + 3 + ... + 3) = S'_n - 3n$$

نستنتج هكذا أن $S_n = 4(2^n - 1) - 3n$.

• من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}^*$، $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n$ ومنه للمتتاليتين $(u_n)$ و $(v_n)$ نفس اتجاه التغير، وفي المثال كل منها متزايدة.

**تطبيق**

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = \alpha$ والعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

**أ)** نفرض $\alpha = 3$

اثبت أن المتتالية $(u_n)$ ثابتة ثمّ احسب، بدلالة $n$، المجموع $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

**ب)** نفرض $\alpha = 2$ ونعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
2. عبّر عن $v_n$ بدلالة $n$ ثمّ استنتج $u_n$ بدلالة $n$.
3. احسب، بدلالة $n$، المجموع $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
4. ما هو اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$؟

**حل**

**أ)** لدينا $\alpha = 3$ ومنه $u_0 = 3$ لأنّ $u_0 = \alpha$

• وعليه إذا كانت المتتالية $(u_n)$ ثابتة فسيكون كل حد من حدودها يساوي 3 وبالتالي نثبت صحة الخاصية " $u_n = 3$، $n$ من أجل كل عدد طبيعي " باستعمال البرهان بالتراجع.

* الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$ لأنّ $u_0 = 3$.

* نفرض أنّ الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي $n$ حيث $n \geq 0$ أي أنّ $u_n = 3$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا $\frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$ ومنه $u_{n+1} = 3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$. إذن المتتالية $(u_n)$ ثابتة.

• من أجل كل عدد طبيعي $n$، $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)u_0$ لأنّ $S_n$ هو مجموع $n+1$ حدا كل منها يساوي $u_0$، ومنه $S_n = 3(n+1)$.

**ب)** لدينا $\alpha = 2$ ومنه $u_0 = 2$

**1.** لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \left(\frac{1}{3}u_n + 2\right) - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$

ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$. ولدينا $v_0 = u_0 - 3 = -1$

إذن المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = -1$.

**2.** لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

ولدينا $v_n = u_n - 3$ ومنه $u_n = v_n + 3$. إذن $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$.

**3.** لدينا $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0 + 3) + (v_1 + 3) + \ldots + (v_n + 3)$

ومنه $S = (v_0 + v_1 + \ldots + v_n) + (3 + 3 + \ldots + 3)$

$S = S' + 3(n+1)$ حيث $S' = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ (مجموع $n+1$ حدا الأولى من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول $-1$).

لدينا $S' = (-1)\times \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = -\dfrac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

ومنه $S = -\dfrac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+3(n+1)$ أي $S = \dfrac{1}{2\times 3^n}+3n+\dfrac{3}{2}$

**4.** لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$،

$$u_{n+1}-u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+3-\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+3\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}-u_n > 0$ ، ومنه المتتالية $(u_n)$ متزايدة.

## VI. ملخص:

### المتتاليات العددية

- المتتالية العددية $u$ هي دالة معرّفة على المجموعة $\mathbb{N}$ أو على جزء منها، $u:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\ ;\ n\mapsto u(n)=u_n$
- نرمز إلى المتتالية $u$ إما بـ $(u_n)_{n\geq n_0}$ وإما بـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو $(u_n)$ وذلك تبعا لمجموعة تعريفها.
- $u_n$ هو الحدّ العام للمتتالية $(u_n)$.
- لتوليد متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ يمكن إتباع إحدى الطريقتين الآتيتين:

**الطريقة الأولى :** بالتعبير عن حدّها العام $u_n$ بدلالة $n$.

**الطريقة الثانية** : بإعطاء

1. قيمة حدّها الأول $u_{n_0}$.
2. علاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$ تربط بين كلِّ حدَّين متتابعين من المتتالية، حيث $f$ دالة عددية معرّفة على مجال D وتأخذ قيمها فيه.

## المتتالية الحسابية

- $(u_n)$ متتالية حسابية معناه يوجد عدد حقيقي $r$ (يسمى $r$ أساسها)، بحيث من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = u_n + r$
- عبارة الحد العام لمتتالية حسابية $(u_n)$ حدّها الأول $u_0$ وأساسها $r$ هو $u_n$ حيث $u_n = u_0 + nr$ و $u_n = u_p + (n-p)r$ من أجل كل عددين طبيعيين $n$ و $p$.
- مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية يحسب من العلاقة:

$$S = (\text{عدد الحدود}) \times \left[\frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}\right]$$

- تكون الأعداد $a$ و $b$ و $c$ بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a+c=2b$. أي $b=\frac{a+c}{2}$ ويسمى العدد $b$ الوسط الحسابي للعددين $a$ و $c$.

## المتتالية الهندسية

- $(u_n)$ متتالية هندسية معناه يوجد عدد حقيقي $q$ (يسمى $q$ أساسها)، بحيث من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = qu_n$

- عبارة الحد العام لمتتالية هندسية $(u_n)$ حدّها الأول $u_0$ وأساسها $q$ هو $u_n$ حيث $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_n = u_p\, q^{n-p}$ من أجل كل عددين طبيعيين $n$ و $p$.

- مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها يختلف عن 1 يحسب من العلاقة:

$$S = (\text{الحد الأول}) \times \left[\frac{1 - (\text{الأساس أس عدد الحدود})}{1 - (\text{الأساس})}\right]$$

- تكون الأعداد $a$ و $b$ و $c$ بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $a \times c = b^2$. أي $b = \sqrt{a \times c}$ ويسمى العدد $b$ الوسط الهندسي للعددين $a$ و $c$.

## اتجاه تغير متتالية

نعتبر $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

- $(u_n)$ متزايدة، يعني أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} \geq u_n$.
- $(u_n)$ متناقصة، يعني أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} \leq u_n$.
- $(u_n)$ ثابتة، يعني أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} = u_n$.
- $(u_n)$ ثابتة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $k$ بحيث من أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_n = k$.
- $(u_n)$ رتيبة، يعني أنّها إما متزايدة وإما متناقصة.

## اتجاه تغير متتالية حسابية

$(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r$ .

لدينا، من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}-u_n=r$ ومنه:

- إذا كان $r$ موجبا تماما $(r>0)$ فإن المتتالية متزايدة تماما.
- إذا كان $r$ سالبا تماما $(r<0)$ فإن المتتالية متناقصة تماما.
- إذا كان $r$ معدوما $(r=0)$ فإن المتتالية ثابتة.

## اتجاه تغير متتالية هندسية

$(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $q$ ، وحدها الأول $u_0$ .

لدينا، من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}-u_n=u_0\,q^n(q-1)$ ومنه:

- إذا كان $q>1$ و $u_0>0$ فإنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما.
- إذا كان $q>1$ و $u_0<0$ فإنّ المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما.
- إذا كان $0<q<1$ و $u_0>0$ فإنّ المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما.
- إذا كان $0<q<1$ و $u_0<0$ فإنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما.
- إذا كان $q=1$ فإنّ المتتالية ثابتة.
- إذا كان $q=0$ تكون كل حدود المتتالية معدومة ابتداء من الحد الثاني.
- إذا كان $q<0$ فإن العبارة $u_{n+1}-u_n$ لا تحافظ على إشارة ثابتة، ومنه المتتالية $(u_n)$ ليست رتيبة.

**المتتاليات $(u_n)$ حيث $u_{n+1}=a\,u_n+b$ مع $(a\neq 0$ و $b\neq 0)$**

- في حالة $a=1$، هي متتالية حسابية أساها $b$، وبالتالي حدّها العام $u_n=u_1+(n-1)b$.
- في حالة $a\neq 1$ و $u_1=\dfrac{b}{1-a}$ و هي متتالية ثابتة، وحدّها العام $u_n=\dfrac{b}{1-a}$.
- في الحالة $a\neq 1$ و $u_1\neq\dfrac{b}{1-a}$ نحسب الحد العام $u_n$ بالاستعانة بالمتتالية ذات الحد العام $v_n=u_n-\dfrac{b}{1-a}$، بعد التحقق من أن المتتالية $(v_n)$ هندسية وأساسها $a$.

## VII. توظيف المعارف:

### أ. تمارين

**1.** احسب الحدود الخمس الأولى للمتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ في كل من الحالتين الآتيتين:

أ) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

ب) $u_0 = -2$ و $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

**2.** في كل من حالة مما يأتي حدود متتابعة من متتالية، أكمل الحد الذي ينقص:

أ) $3\ ;\ 6\ ;\ 9\ ;\ 12\ ;\ \cdots$.

ب) $1\ ;\ -2\ ;\ 4\ ;\ -8\ ;\ 16\ ;\ \cdots$.

جـ) $0\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{2}{5}\ ;\ \dfrac{3}{7}\ ;\ \dfrac{4}{9}\ ;\ \cdots$.

**3.** تعرض آلة حاسبة الجدول الآتي، والذي يمثل جزءً من جدول قيم متتالية $(u_n)$.

| n | u(n) |
|---|---|
| 0 | .5 |
| 1 | 7.5 |
| 2 | 14.5 |
| 3 | 21.5 |
| 4 | 28.5 |
| 5 | 35.5 |
| 6 | 42.5 |

n=6

بيّن أن $(u_n)$ يمكن أن تكون متتالية حسابية، واستنتج حدها الأول وأساسها.

4. $(u_n)$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 7$ وأساسها $-3$.

1. احسب الحد السادس والحد الرابع عشر.

2. احسب المجموع : $S = u_0 + u_1 + ... + u_{13}$.

5. $(u_n)$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0$ وأساسها $r$. عيّن الحد الرابع و العشرين، والحد ذي المرتبة 2010 في كل حالة مما يأتي:

1. $u_0 = -46$ و $r = 2$ .

2. $u_0 = 14063$ و $r = -7$ .

6. $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $r$. $(v_n)$ و $(w_n)$ متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي $n$ على الترتيب بـ : $v_n = 3u_n - 1$ و $w_n = u_{2n} + 3$ .

بين أن المتتاليتين $(v_n)$ و $(w_n)$ حسابيتان وعيّن أساس كل منهما.

7. أيٌّ المتتاليات $(u_n)$ المعرّفة أدناه هي متتالية حسابية؟ وعيّن أساسها.

أ) $u_n = \frac{2}{3}n - 7$ .

ب) $u_n = \frac{n}{n+1}$ .

جـ) $u_n = \frac{5n+8}{2}$ .

د) $u_n = n^2 + 5$ .

هـ) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$ .

و) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ 2u_{n+1} - 2u_n = 5 \end{cases}$ .

8. بيّن أن كلا من المتتاليات $(u_n)$ المعرّفة أدناه هي متتالية هندسية، وعيّن أساسها.

أ) $u_n = 3^n$ .

ب) $u_n = \frac{5^n}{7^n}$ .

د) $u_n = 80 \times (0,05)^n$ .  جـ) $u_n = \frac{5}{2^n}$ .

هـ) $\begin{cases} u_0 = 0,2 \\ u_{n+1} - 4u_n = 0 \end{cases}$ .  و) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n}{11} \end{cases}$ .

**9.** احسب المجموعين التاليين : $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{59049}$ و

$S' = 1 + 2 + 4 + ... + 16384$ .

**10.** بيّن في كل حالة مما يأتي أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة.

أ) $u_n = \frac{n}{n+2}$ .  ب) $u_n = (n+3) \times 5^n$ .

**11.** بيّن في كل حالة مما يأتي أنّ المتتالية $(u_n)$ متناقصة.

أ) $u_n = -n^2 + 5$ .  ب) $u_n = \frac{3}{n+1}$ .

جـ) $u_n = 5 \times (0,2)^n$ .

**12.** نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بِـ : $u_n = \frac{1-n}{n}$ .

1. أُدرس إشارة العبارة $u_{n+1} - u_n$ ، استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.
2. أعط دالة $f$ تحقق $u_n = f(n)$. باستعمال اتجاه تغير الدالة $f$ تحقق من النتيجة المحصل عليها في السؤال السابق .

**13.** $(u_n)$، $(v_n)$ متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بِـ : $u_0 = 1$ ،

$u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2}$ و $v_n = u_n + 1$.

أ) أثبت أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية.

ب) عبّر عن $v_n$ بدلالة $n$ ثمّ استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ .

14. $(v_n)$ متتالية حسابية حيث: $v_4 = 5$ و $v_8 = 7$.

1. عين أساس المتتالية وحدها الأول $v_0$.
2. عبّر عن $v_n$ بدلالة $n$. ثم عين العدد الطبيعي $n$ حيث $v_n = 50$.
3. أُحسب المجموع : $S = v_6 + v_7 + ... + v_{94}$ .

15. $(u_n)$ متتالية حسابية حدها الأول $u_1$.

1. احسب حدها الثاني $u_2$ علما أنّ $u_1 + u_3 = 12$.
2. احسب الحد الرابع $u_4$ علما أن $u_3 + u_4 + u_5 = 30$.
3. عين أساس هذه المتتالية وحدها الأول $u_1$.
4. اكتب الحد العام $u_n$ بدلالة $n$ ثم عيّن $n$ بحيث يكون $u_n = 32$.
5. احسب : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ واستنتج $S = 4 + 6 + 8 + 10 + ... + 32$

16. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية حسابية حيث: $u_0 + u_3 = 18$ و $u_2 + u_5 = 34$

1. أوجد الحد الأول $u_0$ والأساس $r$ لهذه المتتالية.
2. أكتب الحد العام $u_n$ بدلالة $n$.
3. احسب بدلالة $n$ المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
4) أوجد العدد الطبيعي $n$ بحيث $S_n = 78$ .

17. عدد سكان بلد في سنة 1990 هو 45,4 مليون نسمة، وانتقل إلى 52,6 مليون نسمة في سنة 2002.

نسمي $v_0$ عدد السكان في 1990 و $v_n$ عدد السكان بعد $n$ سنة.

نفرض أن عدد السكان يتزايد كل سنة بتزايد ثابت $r$.

1. أُحسب التزايد $r$.
2. ما هو عدد السكان هذا البلد في عام 2020؟

18. لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرّفة بـ: $u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n-1)$.

1. عيّن الحدّ الأوّل $u_0$ حتى تكون المتتالية $(u_n)$ ثابتة.

2. نضع $u_0=4$ و $v_n=2u_n+1$.

أ) برهن أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأوّل $v_0$.

ب) استنتج $v_n$ بدلالة $n$، ثمّ $u_n$ بدلالة $n$.

19. يقترح أحمد على عمر عقدين لكراء مسكن لمدة 8 سنوات. يدفع عمر 5000 $DA$ في السنة الأولى.

1. في العقد الأول، ثمن الكراء يزداد كل سنة بقيمة ثابتة 150 $DA$.

نضع $u_n$ ثمن الكراء للسنة $n$.

أ) احسب الثمن $u_2$.

ب) عبّر عن $u_n$ بدلالة $n$ ثمّ احسب $u_8$.

جـ) احسب ثمن الكراء للثماني سنوات الأولى.

2. في العقد الثاني ثمن الكراء يزداد كل سنة بنسبة 3%.

نضع $v_n$ ثمن الكراء للسنة $n$.

أ) احسب الثمن $v_2$.

ب) عبّر عن $v_n$ بدلالة $n$ ثم أُحسب $v_8$.

جـ) احسب ثمن الكراء للثماني سنوات الأولى.

3. ما هو العقد الأقل تكلفة بالنسبة إلى عمر خلال الثماني سنوات الأولى؟

## ب. حلول التمارين

**1.**

أ) بتعويض $n$ بالقيم $0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4$ في عبارة الحد العام $u_n = \frac{1}{n+1}$ نجد $u_0 = 1\ ;\ u_1 = \frac{1}{2}\ ;\ u_2 = \frac{1}{3}\ ;\ u_3 = \frac{1}{4}\ ;\ u_4 = \frac{1}{5}$.

ب) $u_0 = -2$ و $u_1 = 3u_0 + 1 = 3(-2) + 1 = -5$.

و $u_2 = 3u_1 + 1 = 3(-5) + 1 = -14$

و $u_3 = 3u_2 + 1 = 3(-14) + 1 = -41$

و $u_4 = 3u_3 + 1 = 3(-41) + 1 = -122$

**2.**

أ) $3\ ;\ 6\ ;\ 9\ ;\ 12\ ;\ 15$ الحدّ الذي ينقص هو 15 لأنّ كل حدّ يزيد عن الذي يسبقه بالعدد 3.

ب) $1\ ;\ -2\ ;\ 4\ ;\ -8\ ;\ 16\ ;\ -32$ الحدّ الذي ينقص هو $-32$ لأنّ بدء من الحد $-2$ كل حدّ هو جداء الحدّ الذي يسبقه والعدد $-2$.

جـ) $0\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{5}\ ;\ \frac{3}{7}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{5}{11}$ الحدّ الذي ينقص هو $\frac{5}{11}$ لأنّ بسوط الكسور متتالية الأعداد الطبيعية، ومقاماتها متتالية الأعداد الفردية، أي كل حد يكتب على الشكل $\frac{n}{2n+1}$.

**3.**

واضح أنّ الحد الأول هو 0,5، كما نلاحظ أنّ الفرق بين كل حدين متتابعين هو 7 ومنه يمكن للمتتالية $(u_n)$ أن تكون متتالية حسابية، حدها الأول 0,5 وأساسها 7.

## .4

بما أن $(u_n)$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 7$ وأساسها $-3$ فإنّ حدّها العام $u_n = 7 - 3n$.

**1.** الحد السادس هو $u_5$ والحد الرابع عشر $u_{13}$ لأن الحد الأول هو $u_0$

والتعويض في $u_n = 7 - 3n$ نجد: $u_5 = 7 - 3\times 5 = -8$

و $u_{13} = 7 - 3\times 13 = -32$

**2.** المجموع : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{13}$ يتكوّن من 14 حدا، ومنه

$$S = 14\times \frac{7+(-32)}{2} = -175$$

## .5

بما أنّ الحد الأول هو $u_0$ فإنّ الحد الرابع والعشرين هو $u_{23}$ والحد ذي المرتبة 2010 هو $u_{2009}$ ومنه:

**1.** لدينا $u_n = 2n - 46$ ومنه $u_{23} = 0$ و $u_{2009} = 3972$.

**2.** لدينا $u_n = -7n + 14063$ ومنه $u_{23} = 13902$ و $u_{2009} = 0$.

## .6

تكون المتتالية $(v_n)$ حسابية إذا كان الفرق $v_{n+1} - v_n$ ثابتا.

إنّ $v_{n+1} - v_n = (3u_{n+1} - 1) - (3u_n - 1) = 3(u_{n+1} - u_n) = 3r$ ومنه المتتالية $(v_n)$ حسابية وأساسها $3r$.

كذلك $w_{n+1} - w_n = \left(u_{2(n+1)} - 3\right) - \left(u_{2n} - 3\right) = u_{2n+2} - u_{2n}$

لكنّ $r$ $u_{n+1} - u_n = r$ ومنه $u_{2n+1} - u_{2n} = r$ ... (I) (بتعويض $n$ بـ $2n$)

و $r$ $u_{2n+2} - u_{2n+1} = r$ ... (II) (بتعويض $n$ بـ $2n+1$)

وبجمع العلاقتين (I) و (II) طرف إلى طرف نجد $u_{2n+2}-u_{2n}=2r$

ومنه المتتالية $(w_n)$ حسابية وأساسها $2r$.

## 7.

ندرس في كل حالة الفرق $u_{n+1}-u_n$.

أ) $u_{n+1}-u_n=\left(\frac{2}{3}(n+1)-7\right)-\left(\frac{2}{3}n-7\right)=\frac{2}{3}$، ومنه $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $\frac{2}{3}$.

ب) $u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}$ بما أنّ الفرق $u_{n+1}-u_n$ متعلق بالعدد $n$ فهو غير ثابت، ومنه المتتالية $(u_n)$ ليست حسابية.

جـ) $u_{n+1}-u_n=\frac{5(n+1)+8}{2}-\frac{5n+8}{2}=\frac{5}{2}$، ومنه $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $\frac{5}{2}$.

د) لدينا $u_{n+1}-u_n=2n+1$، ومنه المتتالية $(u_n)$ ليست حسابية.

هـ) بما أنّ $u_{n+1}-u_n=n$، ومنه المتتالية $(u_n)$ ليست حسابية.

و) من $2u_{n+1}-2u_n=5$ نجد $u_{n+1}-u_n=\frac{5}{2}$ ، ومنه $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $\frac{5}{2}$.

**ملاحظة**

المتتالية المعرّفة في الجزء (و) حدّها العام $u_n=4+\frac{5}{2}n$ فهي نفسها المتتالية المعرّفة في الجزء (جـ).

.8

أ) $u_{n+1}=3^{n+1}=3\times3^{n}=3\times u_n$ ومنه $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها 3.

ب) $u_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{7^{n+1}}=\frac{5}{7}\times\frac{5^{n}}{7^{n}}=\frac{5}{7}\times u_n$ ومنه $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{7}$.

ج) $u_{n+1}=\frac{5}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2^{n}}=\frac{1}{2}\times u_n$ ومنه $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

د) $u_{n+1}=80\times(0,05)^{n+1}=80\times0,05\times(0,05)^{n}=4\times(0,05)^{n}$ ومنه $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها 4.

هـ) $u_{n+1}=4\,u_n$ ومنه $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها 4.

و) $u_{n+1}=\frac{7}{11}\times u_n$ ومنه $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{7}{11}$.

**ملاحظة**

يمكن، في كل حالة، حساب الكسر $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ والتحقق من أنّه ثابت (يساوي الأساس).

.9

إنّ $S$ هو مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول 1، أي حدها العام $u_n=\frac{1}{3^{n}}$

ومن $\frac{1}{59049}=\frac{1}{3^{n}}$ نجد $n=10$

(أو ملاحظة أنّ $S=\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{10}}$) أي أنّ عدد حدود المجموع $S$ هو 11،

ومنه $S=1\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}=\dfrac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\right]=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3^{10}}\simeq 1,5$

إنّ $S$ هو مجموع حدود متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 1، ومنه حدها العام $u_n=2^n$ ، ومن $2^n=16384$ نجد $n=14$ (أو ملاحظة أنّ $S=2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{14}$) أي أنّ عدد حدود المجموع $S$ هو 15،

ومنه $S=1\times\dfrac{1-2^{15}}{1-2}=2^{15}-1=32767$

## 10.

تكون المتتالية $(u_n)$ متزايدة إذا كان $u_{n+1}-u_n\geq 0$

أ) لدينا $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+1}{n+3}-\dfrac{n}{n+2}=\dfrac{2}{(n+3)(n+2)}$

ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $(n+3)(n+2)>0$ ومنه $\dfrac{2}{(n+3)(n+2)}>0$ وبالتالي فإنّ $u_{n+1}-u_n\geq 0$ و $(u_n)$ متزايدة.

ب) لدينا $u_{n+1}-u_n=(n+4)\times 5^{n+1}-(n+3)\times 5^n=(4n+17)\times 5^n$ .

ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $5^n>0$ و $4n+17>0$ ومنه $(4n+17)\times 5^n>0$ وبالتالي فإنّ $u_{n+1}-u_n\geq 0$ و $(u_n)$ متزايدة.

## 11.

تكون المتتالية $(u_n)$ متزايدة إذا كان $u_{n+1}-u_n\leq 0$

أ) لدينا $u_{n+1}-u_n=\left(-(n+1)^2+5\right)-\left(-n^2+5\right)=-(2n+1)$ .

و من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $-(2n+1)<0$ ومنه $u_{n+1}-u_n<0$

و $(u_n)$ متناقصة تماما.

ب) لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{n+2}-\frac{3}{n+1}=\frac{-3}{(n+2)(n+1)}$.

من أجل كل عدد طبيعي $n$، $\frac{-3}{(n+2)(n+1)}<0$ ومنه $u_{n+1}-u_n<0$

إذن $(u_n)$ متناقصة.

جـ) لدينا $u_{n+1}-u_n=5\times(0,2)^{n+1}-5\times(0,2)^n=-4\times(0,2)^n$

ومنه $u_{n+1}-u_n<0$ إذن $(u_n)$ متناقصة تماما.

## 12.

1. لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{n}{n+1}-\frac{1-n}{n}=\frac{-1}{n(n+1)}$.

من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $n(n+1)\geq 0$ ومنه $\frac{-1}{n(n+1)}<0$ أي

$u_{n+1}-u_n<0$ وبالتالي $(u_n)$ متناقصة تماما.

2. الدالة $f$ التي تحقق $u_n=f(n)$ هي بحيث $f(x)=\frac{1-x}{x}$

بدراسة تغيرات الدالة $f$ انظر جدول التغيرات المرفق

نجد أن الدالة $f$ متناقصة تماما على كل مجال تعريفها، ومنه من اجل كل $x$ حيث $x\neq 0$ فإنّ

$f(x+1)-f(x)<0$ ومنه

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ |
| $f(x)$ | $-1$ ↘ $-\infty$ | $\|\|$ | $+\infty$ ↘ $-1$ |

$f(n+1)-f(n)<0$ وبالتالي $u_{n+1}-u_n<0$ .

**13.**

أ) إثبات أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية.

لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}+1=\left(\frac{3}{2}u_n+\frac{1}{2}\right)+1=\frac{3}{2}\times(u_n+1)=\frac{3}{2}v_n$

ومنه المتتالية $(v_n)$ هندسية وأساسها $q=\frac{3}{2}$ .

ب) التعبير عن $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$ .

لدينا $v_0=u_0+1=2$ وبالتالي فإنّ $v_n=v_0\times q^n=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^n=\frac{3^n}{2^{n-1}}$

بما أنّ $v_n=u_n+1$ فإنّ $u_n=v_n-1$ ومنه $u_n=\frac{3^n}{2^{n-1}}-1$

**14.**

نفرض أن $r$ أساس المتتالية $(v_n)$ و $v_0$ حدها الأول، فيكون $v_8=v_4+4r$

ومنه $4r+5=7$ وبالتالي $r=\frac{1}{2}$ .

كما أنّ $v_4=v_0+4r$ ومنه $v_0=5-4\times\frac{1}{2}=3$

**2.** التعبير عن $v_n$ بدلالة $n$ :

لدينا $v_n=v_0+nr=3+\frac{1}{2}n$ أي $v_n=3+\frac{1}{2}n$

$v_n=50$ معناه $3+\frac{1}{2}n=50$ أي $n=94$ .

**3.** حساب المجموع : $S=v_6+v_7+...+v_{94}$ .

إنّ عدد حدود هذا المجموع هو 89 ومنه $S=89\times\frac{6+50}{2}=2492$

**ملاحظة**

لمعرفة عدد حدود المجموع $S$ يمكن استغلال الفكرة المقابلة.

$$\underbrace{V_{94}\ ;\ \cdots\ ;\ V_6\ ;\ \underbrace{V_5\ ;\ \cdots\ ;\ V_1}_{\text{5 حدود}}}_{\text{94 حدا}}$$

**15.**

1. إنّ $u_2$ هو الوسط الحسابي للحدين $u_3$ ; $u_1$ أي $u_1+u_3=2u_2$ وبما أنّ $u_1+u_3=12$ فإنّ $2u_2=12$، وبالتالي $u_2=6$ .
2. كذلك لدينا $u_3+u_5=2u_4$ وبما أن $u_3+u_4+u_5=30$ فإنّ $u_2=10$
3. نفرض أنّ أساس هذه المتتالية هو $r$ وحدها الأول $u_1$ فيكون:

$\begin{cases} u_2=u_1+r \\ u_4=u_1+3r \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_1+r=6 \\ u_1+3r=10 \end{cases}$ وبحل جملة المعادلتين نجد $r=2$ و $u_1=4$ .

**ملاحظة:** الحدود الخمسة الأولى هي: 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12

4. الحد العام $u_n=u_1+(n-1)r$ ومنه نجد $u_n=2n+2$ .

من $u_n=32$ نجد $2n+2=32$ ومنه $n=15$ ، $u_{15}=32$

5. احسب : $S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ واستنتج $S=4+6+8+10+\ldots+32$

لدينا $S_n=n\times\dfrac{u_1+u_n}{2}$ ومنه $S_n=n\times\dfrac{4+(2n+2)}{2}=n(n+3)$

إنّ $S=S_{15}=15\times(15+3)=270$

**16. إرشادات لحل التمرين**

1. عبّر عن كل من $u_2$ و $u_3$ و $u_5$ بدلالة $r$ و $u_0$ من العلاقة $u_n=u_p+(n-p)r$ .

2. استعمل العلاقة $u_n = u_0 + nr$ .

3. لحسب المجموع ينبغي الانتباه إلى أنّ عدد الحدود هو $n+1$

4) لاحظ أنّ $2n^2+5n-75=(n-5)(2n+15)$ .

## 17. إرشادات لحل التمرين

1. لاحظ أنّ $u_0 = 45,4$ و $u_2 = 52,6$ و $u_{12} = u_0 + 12r$ .

2. لدينا $v_n$ هو عدد السكان سنة $n$ + 1990، ومنه عدد السكان هذا البلد في عام 2020 هو $v_{30}$ .

## 18.

1. المتتالية $(u_n)$ ثابتة معناه $u_{n+1} = u_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

أي $u_0 = u_1 = u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$ ومنه $u_0 = \frac{1}{3}(u_0 - 1)$ وبالتالي $u_0 = -\frac{1}{2}$

2. أ) بما أنّ $v_n = 2u_n + 1$ فإنّ $v_{n+1} = 2u_{n+1} + 1$

ومنه $v_{n+1} = 2u_{n+1} + 1 = 2 \times \frac{1}{3}(u_n - 1) + 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$

وبالتالي $v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + 1) = \frac{1}{3}v_n$ أي $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

إنّ $v_0 = 2u_0 + 1$ ومنه $v_0 = 9$ .

والمتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدّها الأوّل $v_0 = 9$ .

ب) لدينا $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه $v_n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^{n-2}}$ أي $v_n = \frac{1}{3^{n-2}}$

بما أنّ $v_n = 2u_n + 1$ فان $u_n = \frac{1}{2}(v_n - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{n-2}} - 1\right)$ أي $u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{n-2}} - 1\right)$

.19

لدينا $u_1 = 5000$ و $u_n$ ثمن الكراء للسنة $n$ .

**1. أ)** $u_2 = u_1 + r = 5000 + 150 = 5150$

**ب)** إنّ $(u_n)$ هي متتالية حسابية أساسها 150 وحدّها الأول $u_1 = 5150$ .

ومنه $u_n = 150n + 4850$ ، أي $u_n = u_1 + (n-1)r = 150n + 4850$

و $u_8 = 150 \times 8 + 4850 = 6050$

**جـ)** نفرض ثمن الكراء للثماني سنوات الأولى $S$ ، لدينا

$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_8$ ومنه $S = 8 \times \frac{5000 + 6050}{2} = 44200$

ثمن الكراء للثماني سنوات الأولى هو $44200\,\text{DA}$ .

**2.** لدينا $v_1 = 5000$ و $v_n$ ثمن الكراء للسنة $n$ .

**أ)** $v_2 = v_1 + \frac{3}{100} v_1 = 1,03\, v_1 = 5150$ .

**ب)** إنّ $(v_n)$ هي متتالية هندسية أساسها 1,03 وحدّها الأول $v_1 = 5000$ .

ومنه $v_n = 5000 \times (1,03)^{n-1}$ ، أي $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 5000 \times (1,03)^{n-1}$

و $v_8 = 5000 \times (1,03)^7 \simeq 6149,37$

**جـ)** نفرض ثمن الكراء للثماني سنوات الأولى $S'$ ، لدينا

$S' = v_1 + v_2 + \ldots + v_8$ ومنه $S' = 5000 \times \frac{1 - (1,03)^8}{1 - 1,03} = 44500$

ثمن الكراء للثماني سنوات الأولى هو $44500\,\text{DA}$ .

**3.** العقد الأقل تكلفة بالنسبة إلى عمر خلال الثماني سنوات الأولى هو العقد الأول.

## VIII. تقويم ذاتي:

### أ. اختيار من متعدد

في كل من الحالات الآتية أربعة اقتراحات، واحد منها فقط صحيح عيّنه.

1) المتتالية $(u_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ:

أ) $u_0=-1$ و $u_{n+1}=u_n+0,1$ هي متتالية متناقصة.

ب) $u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ هي متتالية متناقصة.

جـ) $u_n=\frac{1}{n+1}$ هي متتالية متزايدة.

د) $u_0=4$ و $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}$ هي متتالية متزايدة.

2) المتتالية $(u_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ:

أ) $u_n=-3n+1$ هي متتالية هندسية.

ب) $u_0=4$ و $u_{n+1}=-3u_n$ هي متتالية حسابية.

جـ) $u_n=n+\frac{1}{2}$ هي متتالية حسابية.

د) $u_0=1$ و $u_{n+1}=u_n+1$ هي متتالية هندسية.

3) المجموع $S=2+5+8+11+\cdots+299$ يساوي

أ) 15050. ب) 14040.

جـ) 11110. د) 12200.

4) المجموع $S=0,005+0,1+0,2+0,4+\cdots+5254,88$ يساوي

أ) 12555,755. ب) 10485,8.

**ج)** $12323,55$ .  **د)** $10485,755$ .

## ب. صحيح أم خاطئ

في كل حالة مما يأتي خمسة نصوص، ميّز بين الصحيحة منها والخاطئة.

1) $(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتين معرّفتين على $\mathbb{N}$ بـِ: $u_0=\frac{1}{2}$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-2$

و $v_n=u_n+4$

**أ)** $(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

**ب)** $(u_n)$ متتالية حسابية أساسها $-2$

**ج)** $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

**د)** $(v_n)$ متتالية حسابية أساسها $4$

**هـ)** $(v_n)$ متتالية متناقصة.

2) $(u_n)$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـِ: $u_n=\frac{2n-3}{n+1}$ .

**أ)** $(u_n)$ متتالية متناقصة.

**ب)** المتتالية $(u_n)$ متزايدة.

**ج)** المتتالية $(u_n)$ حسابية وأساسها يختلف عن $-1$.

**د)** المتتالية $(u_n)$ هندسية وأساسها $2$.

**هـ)** المتتالية $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ متناقصة.

3)

**أ)** توجد متتالية في نفس الوقت حسابية وهندسية.

**ب)** إذا كان أساس المتتالية الهندسية موجب فتكون متزايدة، وإذا كان أساسها سالبا فتكون متناقصة.

**جـ)** كل متتالية ثابتة هي هندسية وحسابية في آن واحد.

**د)** من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n = u_0 q^n$ إذن $(u_n)$ متتالية هندسية.

**هـ)** تكون $(u_n)$ متتالية هندسية حيث حدودها غير معدومة وأساسها $q$ إذا وفقط إذا، تحقق من أجل كل عددين طبيعيين $m$ و $n$ ، $\frac{u_m}{u_n} = q^{m-n}$.

## أ. أجوبة اختيار من متعدد

1) ب.

2) جـ.

3) أ.

4) د.

## ب. أجوبة صحيح أم خاطئ

| الحالة | النصوص الصحيحة | النصوص الخاطئة |
|---|---|---|
| 1) | جـ. هـ. | أ. ب. د. |
| 2) | ب. د. هـ. | أ. جـ. |
| 3) | أ. د. جـ. هـ. | ب. |

## IX. استعد للبكالوريا:

**1.التمرين الأول من الموضوع الأول لدورة جوان2009 (06 نقاط)**

$(u_n)$ متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها الأول $u_1 = 2$ وبالعلاقة: $u_2 - 2u_5 = 19$

1. أ) احسب الأساس $r$ للمتتالية $(u_n)$.

ب) احسب الحد العاشر

2. اكتب عبارة $u_n$ بدلالة $n$.

3. بيّن أنّ العدد 2008– هو حد من حدود $(u_n)$ ثمّ حدّد رتبته.

4. احسب المجموع $S = u_1 + u_1 + ... + u_{671}$.

| حل | السلّم |
|---|---|
| 1. أ) لدينا $u_2 = 2+r$ و $u_5 = 2+4r$ ومنه | 1 |
| $u_2 - 2u_5 = 19$ معناه $2+r-2(2+4r)=19$، ومنه $r=-3$ | |
| ب) $u_{10} = u_1 + 9r$ ومنه $u_{10} = -25$ | 1 |
| 2. عبارة $u_n$ بدلالة $n$. | |
| لدينا $u_n = u_1 + (n-1)r$ ومنه $u_n = 5-3n$ | 1 |
| 3. إثبات أنّ العدد $-2008$ هو حد من حدود $(u_n)$. | 1 |
| $u_n = -2008$ ومنه $5-3n=-2008$ أي $n=671$ | 1 |
| وبالتالي فإنّ $u_{671} = -2008$ هو حد من حدود $(u_n)$ مرتبته 671 | |
| 4. حساب المجموع $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{671}$. | |
| $S = 671 \times \frac{u_1 + u_{671}}{2} = 671 \times (-1003) = -673013$ | 1 |

**2.التمرين الثاني من الموضوع الثاني لدورة جوان 2009 (05 نقاط)**

$(u_n)$ متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها موجب.

1.عيّن أساس هذه المتتالية وحدّها الأول $u_0$ إذا علمت أنّ $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.

2. تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n = 18 \times 2^n$.

3. أُحسب بدلالة $n$ المجموع $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$، ثمّ استنتج قيمة العدد الطبيعي $n$ حيث: $S_n = 1134$.

| حل | السلّم |
|---|---|
| 1. نفرض $q$ أساس $(u_n)$ فيكون $u_5 = u_3 \times q^2$ ومنه $576 = 144 \times q^2$ | |
| أي $q^2 = 4$ ومنه $q = 2$ $(q > 2)$ | 1 |
| لدينا $u_3 = u_0 \times q^3$ ومنه $8u_0 = 144$ وبالتالي $u_0 = 18$ | 1 |
| 2. التحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n = 18 \times 2^n$ . | 1 |
| بالتعويض في $u_n = u_0 \times q^n$ نجد $u_n = 18 \times 2^n$ | |
| 3. أُحسب بدلالة $n$ المجموع $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ | |
| $S = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 18 \times \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 18\left(2^{n+1} - 1\right)$ | 1 |
| استنتاج قيمة العدد الطبيعي $n$ حيث: $S_n = 1134$ | |
| $S_n = 1134$ معناه $18\left(2^{n+1} - 1\right) = 1134$ أي $2^{n+1} = 64$ | 1 |
| ومنه $2^{n+1} = 2^6$ وبالتالي $n = 5$ . | |

## 3. تمرين مع الإرشاد

$(v_n)$ متتالية حدها الأول $v_0$ موجب تماما، ومن أجل كل عدد طبيعي $n$

$v_{n+1} - v_n = 0,02v_n$ .

1. أ) بيّن أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تحديد أساسها.

ب) ما هو اتّجاه تغيّر هذه المتتالية؟

جـ) عبّر عن $v_n$ بدلالة $n$ و $v_0$.

2. نضع : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$ .

أ) أُحسب $S_n$ بدلالة $n$ و $v_0$ .

ب) أُحسب $(1,02)^{35}$، ثمّ عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $S_n \geq 50v_0$ .

**3.** نفرض أن عدد سكان بلد يرتفع كل سنة بنسبة 2%، وبلغ 30 مليون نسمة يوم 1جانفي 2000.

كم يبلغ عدد سكان هذا البلد يوم 1 جانفي 2020 ؟

## إرشادات لحل التمرين

**1. أ)** باستعمال العلاقة $v_{n+1} - v_n = 0,02\,v_n$ عبّر عن $v_{n+1}$ بدلالة $v_n$.

**ب)** قارن الأساس بالعدد 1، ولاحظ أن الحد الأول موجب. يمكنك دراسة $v_{n+1} - v_n$، أو مقارنة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ بالعدد 1.

**جـ)** $v_n = v_0\, q^n$.

**2.**

**أ)** لاحظ أنّ عدد حدود المجموع $S_n$ هو $n$.

**ب)** لحساب $(1,02)^{35}$ استعمل آلة حاسبة، ثمّ لتعيين قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $S_n \geq 50$ $v_0$، تحتاج إلى العدد $(1,02)^{36}$.

**3.** يمكن نمذجة عدد سكان هذا البلد بالمتتالية الهندسية المعرفة كما يأتي.

$v_0 = 30$ و $v_{n+1} = 1,02\,v_n$.