1. القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

الكفاءات المستهدفة

- معرفة وتحديد حاصل القسمة الإقليدية وباقيها.
- حصر عدد بين مضاعفين متتابعين لعدد صحيح.
- تعيين مجموعة قواسم عدد طبيعي.
- معرفة توافق عددين صحيحين.
- معرفة خواص الموافقة واستعمالها في حل مشكلات.
- استعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع لإثبات صحة خاصية متعلقة بعدد طبيعي.

تصميم الدرس

تعريف:

إقليدس (*Euclide*) أب الهندسة

الصورة من الموسوعة الحرّة ويكيبيديا

عالم إغريقي عاش في الفترة 325 ق.م – 265 ق.م بالتقريب، يعد من علماء الرياضيات الذين أسسوا لهذا العلم، ويعتبره البعض أب الهندسة، يقال أنّه درس في أكاديمية أفلاطون في أثينا باليونان، وعاش في مدينة الإسكندرية في عصر بطليموس الأول.

كانت للأعمال التي خلفها إقليدس في مجال العلوم – خاصة الرياضيات والفلك والبصريات – أهمية كبيرة في تطوّرها إلى اليوم، ويعد الكتاب الذي ألّفه في الهندسة، والذي يطلق عليه العرب اسم كتاب الأصول أو العناصر (*Les éléments*)، من أهم وأحسن الكتب التي وضعت في الرياضيات، وقد صنّفه إلى ثلاث عشرة جزء، خص منها ثلاثة أجزاء لعلم الحساب، وقدّم في الجزء السابع منها تعريف القسمة التي سميت القسمة الإقليدية نسبة له، كما وضع فيه خوارزمية لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين سميت كذلك باسمه (خوارزمية إقليدس).

وقد أكدت الأبحاث العلمية أن معظم مؤلفاته لم تصل إلى العالم المعاصر إلا عن طريق العلماء المسلمين، حيث أعدوا لها ترجمات عربية أمينة ودقيقة. ولقد حفظت هذه الترجمات العديد من مؤلفات الإغريق من الفقدان والضياع.

I. قابلية القسمة والقسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

1. قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$

نشاط

نحتاج في هذا النّشاط إلى التعريفين الآتيين:

تعريف1: نقول عن عدد طبيعي أنه تام إذا كان مساويا لمجموع كل قواسمه الموجبة ما عدا نفسه.

تعريف2: نقول عن عددين طبيعيين أنهما متحابان إذا كان مجموع القواسم الموجبة لأحدهما ما عدا نفسه مساويا للآخر والعكس.

فمثلا: العدد 6 هو عدد كامل لأن قواسمه الموجبة هي: 1 و 2 و 3 و 6 ولدينا $1+2+3=6$.

1. أثبت أن العددين 28 و 496 كاملان.
2. قارن كلا من العددين 27 و 30 بمجموع قواسمه الموجبة ما عدا نفسه، وماذا تستنتج؟
3. أثبت أن العددين 220 و 284 متحابان.

حل

1. تعلم أنّه يكون العدد الطبيعي تاما إذا كان مساويا لمجموع كل قواسمه الموجبة ما عدا نفسه، وعليه:

أولا: نبحث عن القواسم الموجبة للعدد 28 فنجد: 1 و 2 و 4 و 7 و 14 و 28

ثانيا: نتحقق من أنّ $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

ومنه فالعدد 28 هو عدد كامل.

ننتهج نفس الطريقة بالنسبة إلى العدد 496:

القواسم الموجبة للعدد 496 هي: 1 و 2 و 4 و 8 و 16 و 31 و 62 و124 و 248 و 496.

ولدينا $496 = 248 + 124 + 62 + 31 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

ومنه فالعدد 496 هو عدد كامل.

2. نبدأ بالبحث عن القواسم الموجبة للعدد 27 وهي: 1 و 3 و 9 و 27

وبما أن $13 = 9 + 3 + 1$

أي أنّ مجموع القواسم الموجبة للعدد 27 ما عدا نفسه لا يساوي 27

ومنه فالعدد 27 ليس كاملا.

- كذلك بالنسبة إلى العدد 30 فهو ليس كاملا، لأنّه لا يساوي مجموع قواسمه الموجبة ما عدا نفسه.

3. أولا: نبحث عن القواسم الموجبة لكل من العددين 220 و 284 فنجد:

القواسم الموجبة للعدد 220 هي: 1 و 2 و 4 و 5 و 10 و 11 و 20 و 22 و 44 و 55 و 110 و 220.

والقواسم الموجبة للعدد 284 هي: 1 و 2 و 4 و 71 و 142 و 284.

ثانيا: لدينا $284 = 110 + 55 + 44 + 22 + 20 + 11 + 10 + 5 + 4 + 2 + 1$

و $220 = 142 + 71 + 4 + 2 + 1$

أي أنّ مجموع القواسم الموجبة العدد 220 ما عدا نفسه يساوي 284

ومجموع القواسم الموجبة العدد 284 ما عدا نفسه يساوي 220

وبالتالي فإن العددين 220 و 284 متحابان.

تعريف : (قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$)

> a و b عددان صحيحان و b غير معدوم. القول أن العدد b يقسم العدد a يعني وجود عدد صحيح k حيث: $a = kb$.
> نقول كذلك أنّ b قاسم للعدد a أو أنّ a مضاعف للعدد b.

ترميز: نكتب $b|a$ ونقرأ b يقسم a.

أمثلة

- $48 = 8 \times 6$ ومنه $6|48$ ونقرأ 6 يقسم 48
- -6 يقسم 48 لأنّ $48 = (-8)\times(-6)$ ونكتب $(-6)|48$
- $(-65) = (-13)\times 5$ ومنه $5|(-65)$
- $(-65) = (-13)\times 5$ ومنه $(-13)|(-65)$

ملاحظة

للعددين الصحيحين a و $-a$ نفس القواسم في $\mathbb{Z}$

($a = kb$ يعني $-a = (-k)b$)

تطبيق

حلل العدد 1372 إلى جداء عوامل أولية، وعيّن كل قواسمه الموجبة.

حل

$$\begin{array}{r|l} 1372 & 2 \\ 686 & 2 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

لتحليل العدد 1372 إلى جداء عوامل أولية نبحث أولا عن الأعداد الأولية التي تقسمه بدء بالأصغر فالأكبر (انظر العمليات المقابلة)، ومنه يمكن أن $1372 = 2^2 \times 7^3$.

وعدد القواسم الموجبة للعدد 1372 هو $(2+1)(3+1)$.

وبالتالي العدد 1372 يقبل 12 قاسما موجبا.

طريقة

العدد الطبيعي الذي يحلّل إلى جداء عوامل أولية من الشّكل $a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2} \times \ldots \times a_p^{\alpha_p}$ عدد قواسمه الموجبة هو: $(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)\times\ldots\times(\alpha_p+1)$

- نرمز بـ D_{1372} لمجموعة القواسم الموجبة للعدد 1372.

لإيجاد المجموعة D_{1372} يمكن استعمال الشجرة الآتية.

$$2^0 \rightarrow \begin{cases} 2^0\times 7^0 = 1 \\ 2^0\times 7^1 = 7 \\ 2^0\times 7^2 = 49 \\ 2^0\times 7^3 = 343 \end{cases}$$

$$2^1 \rightarrow \begin{cases} 2^1\times 7^0 = 2 \\ 2^1\times 7^1 = 14 \\ 2^1\times 7^2 = 98 \\ 2^1\times 7^3 = 646 \end{cases}$$

$$2^2 \rightarrow \begin{cases} 2^2\times 7^0 = 4 \\ 2^2\times 7^1 = 28 \\ 2^2\times 7^2 = 196 \\ 2^2\times 7^3 = 1372 \end{cases}$$

كل قاسم للعدد 1372 هو من الشكل:

$$2^n \times 7^m$$

حيث $0\leq n\leq 2$ و $0\leq m\leq 3$

مجموعة القواسم الموجبة للعدد 1372 هي:

$$D_{1372}=\{1\,;2\,;4\,;7\,;14\,;28\,;49\,;98\,;196\,;343\,;686\,;1372\}$$

2. القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

نشاط

137	12
17	11
5	

لدينا من العملية المقابلة: $137=12\times 11 + 5$

حاصل قسمة 137 على 12 هو 11.

باقي قسمة 137 على 12 هو 5، (و $5<12$).

1. بإتباع نفس المنهجية أعلاه عين باقي وحاصل قسمة a على b في كل من الحالتين الآتيتين:

أ) $a=312$ و $b=46$ ، ب) $a=676$ و $b=13$.

2. احصر العدد الطبيعي a بين مضاعفين متتابعين للعدد الطبيعي b في الحالتين الآتيتين:

أ) $a=170$ و $b=29$ ، ب) $a=2007$ و $b=16$.

حل

1. أ) من عملية القسمة المقابلة نكتب:

312	46
36	6

$$312 = 46\times 6 \;+\; 36$$

حاصل قسمة 312 على 46 هو 6.

باقي قسمة 312 على 46 هو 36، (و $36<46$).

ب) كما نكتب من العملية الثانية:

676	13
26	52
0	

$$676 = 13\times 52 \;+\; 0$$

حاصل قسمة 676 على 13 هو 52.

باقي قسمة 676 على 13 هو 0.

" نقول أنّ العدد 676 مضاعف للعدد 13 أو 13 من قواسم 676"

2. لحصر عدد طبيعي a بين مضاعفين متتابعين لعدد طبيعي b، نبدأ بإيجاد العددين الطبيعيين q و r : حاصل وباقي قسمة a على b على الترتيب، مع $r<b$. ثم نحسب $q\times b$ و $(q+1)\times b$، فيكون $q\times b \leq a < (q+1)\times b$.

أ) بقسمة 170 على 29 نجد حاصل القسمة هو 5 وباقي القسمة 25.

أو $170 = 5 \times 29 + 25$

ومنه نستطيع أن نكتب $5 \times 29 \leq 170 < (5+1) \times 29$

أي $145 \leq 170 < 174$

ب) بقسمة 2007 على 16 نجد حاصل القسمة هو 125 وباقي القسمة 7.

أو $2007 = 125 \times 16 + 7$

ومنه نستطيع أن نكتب $125 \times 16 \leq 2007 < 126 \times 16$

أي $2000 \leq 2007 < 2016$

مبرهنة وتعريف

من أجل كل عدد صحيح a ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم b،
توجد ثنائية وحيدة $(q\,;\,r)$ من الأعداد الصحيحة حيث:
$a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.
تسمى عملية البحث عن الثنائية $(q\,;\,r)$ بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b، ويسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.

برهان

العدد a إما مضاعف للعدد b و إما محصور بين مضاعفين متتابعين للعدد b. أي يوجد عدد صحيح q وحيد حيث $qb \leq a < (q+1)b$

نستنتج من هذا أن $0 \leq a - qb < b$

بوضع $r = a - qb$ نحصل على $a = bq + r$ مع $0 \leq r < b$.

ملاحظة

يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b، ونحصل على $a=bq+r$ و $0\leq r<|b|$.

أمثلة

- $37=5\times7+2$ ، 7 هو حاصل قسمة 37 على 5 و 2 هو باقي قسمة 37 على 5.

  ونلاحظ أن $5\times7\leq37<(7+1)\times5$ و $35-7\times5=2$
- $95=7\times13+4$ ، 13 هو حاصل قسمة 95 على 7 و 4 هو باقي قسمة 95 على 7.

  ونلاحظ أن $13\times7\leq95<(13+1)\times7$ و $95-13\times7=4$
- $192=12\times16$ ، 16 هو حاصل قسمة 192 على 12 و 0 هو باقي قسمة 192 على 12.

  ونلاحظ أن $16\times12\leq192<(16+1)\times12$ و $192-16\times12=0$
- $-39=5\times(-8)+1$ ، -8 هو حاصل قسمة -39 على 5 و 1 هو باقي قسمة -39 على 5.

  ونلاحظ أن $-8\times5\leq-39<(-8+1)\times5$ و $-39-(-8\times5)=1$

انتبه إلى أنّ -7 ليس هو حاصل قسمة -39 على 5 لأنّ $-39=5\times(-7)+(-4)$ و -4 عدد سالب.

كذلك فإنّ -9 ليس هو حاصل قسمة -39 على 5 لأنّ $-39=5\times(-9)+6$ و 6 ليس أصغر من القاسم 5.

تطبيق1

عين باقي قسمة العدد الصحيح a على العدد الطبيعي b ، ثم احصر العدد a بين مضاعفين متتابعين للعدد b في كل حالة من الحالات الآتية:

1. $a = 8159$ و $b = 52$. **2.** $a = 725$ و $b = 91$.

3. $a = -7361$ و $b = 47$.

حل

بالنسبة إلى الحالتين 1 و 2 يمكن إجراء عملية القسمة مباشرة ومنها:

1. $8159 = 52 \times 156 + 47$

156 هو حاصل قسمة 8159 على 52 و 47 هو باقي قسمة 8159 على 52.

$156 \times 52 \leq 8159 < 157 \times 52$ أي $8112 \leq 8159 < 8164$.

2. $725 = 91 \times 7 + 88$

7 هو حاصل قسمة 725 على 91 و 88 هو باقي قسمة 725 على 91.

$7 \times 91 \leq 725 < 8 \times 91$ أي $637 \leq 725 < 728$.

3. في هذه الحالة نبدأ بقسمة 7361 على 47 فنجد الحاصل 156، نستعمل العدد -157 فنجد $-7361 = 47 \times (-157) + 18$ (يمكن الرجوع إلى الأمثلة السابقة لمعرفة لماذا لا يمكن استعمال العدد -156 أو العدد -158) وبالتالي:

-157 هو حاصل قسمة -7361 على 47 و 18 هو باقي قسمة -7361 على 47.

$(-156) \times 47 \leq -7361 < (-157) \times 47$ أي $-7379 \leq -7361 < -7332$.

تطبيق2

a عدد صحيح باقي قسمته على 10 هو 6.

1. ما هو باقي قسمة العدد a على 5 ؟
2. ما هو باقي قسمة العدد a على 2 ؟

حل

نفرض k هو حاصل قسمة a على 10، فيكون $\boxed{a = 10k + 6}$ حيث k عدد صحيح.

$$\begin{array}{c|c} a & \underline{10} \\ 6 & k \end{array}$$

1. لتعيين باقي قسمة العدد a على 5 يمكن التفكير في كتابة العدد a على الشكل $a = 5\boxed{q} + \boxed{r}$ حيث q و r عددين صحيحين مع $0 \leq r < 5$ فيكون r هو المطلوب، وعليه:

من $a = 10k + 6$ نكتب $a = 10k + 5 + 1$ ومنه $a = 5(2k+1)+1$

وبالتالي فإنّ باقي قسمة a على 5 هو 1.

2. يمكن محاكاة الجزء (1) مع استبدال العدد 5 بالعدد 2 وعليه:

من $a = 10k + 6$ نكتب $a = 2(5k+3)$ ومنه باقي قسمة a على 2 هو 0.

II. الموافقات في :

نشاط

عين باقي قسمة كل من العددين 660 و 366 على 7. ماذا تلاحظ؟

نقول عن العددين 660 و 366 إنّهما **متوافقان بترديد 7** ذلك لأنّ لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على 7.

ونكتب $660 \equiv 366[7]$.

1. هل العددان 153 و 2008 متوافقان بترديد 5 ؟
2. هل العددان 274 و 69 متوافقان بترديد 3 ؟
3. بين أن العددين $a = 234$ و $b = 146$ متوافقان بترديد $n = 11$.
   ما هو باقي قسمة $a - b$ على n ؟
4. بين أن العددين $a = 174$ و $b = 109$ متوافقان بترديد $n = 13$.
   ما هو باقي قسمة $a - b$ على n ؟
   ضع تخمينا.

حل

1. إنّ $153 = 30 \times 5 + \mathbf{3}$ و $2008 = 401 \times 5 + \mathbf{3}$ ومنه للعددين 153 و 2008 نفس باقي القسمة على 5، والعددان 153 و 2008 متوافقان بترديد 5.

2. إنّ $274 = 91 \times 3 + \mathbf{1}$ و $69 = 23 \times 3 + \mathbf{0}$ ومنه ليس للعددين 274 و 69 نفس باقي القسمة على 3، والعددان 274 و 69 غير متوافقين بترديد 3.

3. يكفي أن نبيّن أنّ للعددين a و b نفس باقي القسمة على n .

إنّ $a=234=21\times11+\mathbf{3}$ و $b=146=13\times11+\mathbf{3}$ أي أنّ للعددين 234 و 146 نفس باقي القسمة على 11، والعددان $a=234$ و $b=146$ متوافقان بترديد $n=11$.

إنّ $a-b=88=8\times11$ وبالتالي فإنّ باقي قسمة $a-b$ على n يساوي 0 .

4. إنّ $a=174=13\times13+\mathbf{5}$ و $b=109=8\times13+\mathbf{5}$ أي أنّ للعددين 174 و 109 نفس باقي القسمة على 13، والعددان $a=174$ و $b=109$ متوافقان بترديد $n=13$.

لدينا $a-b=169=13\times13$ وبالتالي فإنّ باقي قسمة $a-b$ على n يساوي 0 .

<u>يمكن أن نضع التخمين الآتي:</u>

" إذا كان عددان a و b متوافقين بترديد n فإنّ $a-b$ مضاعف للعدد n أو باقي قسمة $a-b$ على n يساوي 0".

تعريف

n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n .

ترميز: نكتب $a\equiv b[n]$ ونقرأ a يوافق b بترديد n .

أمثلة

$92\equiv 27[5]$ ، ذلك لأنّ للعددين 92 و 27 نفس الباقي في القسمة على 5 وهو 2.

كما أنّ $12\equiv 34[11]$ ، $24\equiv 3[7]$ ، $-20\equiv 1[7]$ ، $-59\equiv -3[8]$.

ملاحظة

من أجل كل عدد صحيح x ، $x\equiv 0[1]$.

تطبيق

عين في كل حالة من الحالات الآتية $(a\equiv b\ [n])$ باقي قسمة a على n و باقي قسمة b على n ، ثم حدّد صحة أو خطأ الموافقة.

1. $262\equiv 927[5]$.
2. $-322\equiv 78[4]$
3. $471\equiv 30[8]$.
4. $158\equiv 39[17]$

حل

1. $262=5\times 52+2$ و $927=5\times 185+2$ ومنه باقي قسمة 262 على 5 هو 2، وباقي قسمة 927 على 5 هو 2، أي أنّ للعددين 262 و 927 نفس الباقي في القسمة على 5. إذن $262\equiv 927[5]$ **صحيحة.**

2. $-322=4\times(-81)+2$ و $78=4\times 19+2$ ومنه باقي قسمة -322 على 4 هو 2، وباقي قسمة 78 على 4 هو 2 أي أنّ للعددين -322 و 78 نفس الباقي في القسمة على 4. إذن $-322\equiv 78[4]$ **صحيحة.**

3. $471 = 8\times 58 + 7$ و $30 = 8\times 3 + 6$ ومنه باقي قسمة 471 على 8 هو 7، وباقي قسمة 30 على 8 هو 6، أي أنّه ليس للعددين 471 و 30 نفس الباقي في القسمة على 8. إذن $[8]\ 471 \equiv 30$ **خاطئة**، ونكتب $471 \not\equiv 30[8]$.

4. $158 = 17\times 9 + 5$ و $39 = 17\times 2 + 5$ ومنه باقي قسمة 158 على 17 هو 5، وباقي قسمة 39 على 17 هو 5، أي أنّ للعددين 158 و 39 نفس الباقي في القسمة على 17. إذن $158 \equiv 39[17]$ **صحيحة**.

مبرهنة

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. يكون للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا وفقط إذا كان $a-b$ مضاعفا للعدد n.

برهان

لإثبات صحة هذه المبرهنة نفرض **أوّلا** أنّ للعددين a و b نفس الباقي r في القسمة الإقليدية على n، ونتحقق من أنّ $a-b$ مضاعف للعدد n.
ثمّ نفرض **ثانيا** أنّ $a-b$ مضاعفا للعدد n، ونثبت أنّ للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

أوّلا:

نفرض أنّ للعددين a و b نفس الباقي r في القسمة الإقليدية على n.
إذن حسب تعريف القسمة الإقليدية يوجد عددان صحيحان q و q' بحيث $a = nq + r$ و $b = nq' + r$ مع $0 \le r < n$.

ومنه $a-b=nq+r-nq'-r=n(q-q')$

بوضع $q''=q-q'$ يكون لدينا $a-b=nq''$ مع q'' عدد صحيح.

إذن $a-b$ مضاعف للعدد n.

ثانيا:

نفرض أنّ $a-b$ مضاعفا للعدد n ، يوجد إذن عدد صحيح k حيث $a-b=kn$ أي $a=b+kn$ ..... (1)

نفرض أنّ باقي قسمة b على n هو r ، منه يوجد عدد صحيح q يحقّق $b=nq+r$ مع $0\leq r<n$.

وبالتعويض في العلاقة (1) نجد

$a=b+kn=nq+r+kn=(q+k)n+r$.

بما أن $q+k$ عدد صحيح و $0\leq r<n$ فإن r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على n. إذن للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

نتيجة

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم.

$a\equiv b\ [n]$ إذا وفقط إذا كان $n|\ a-b$

ملاحظة مهمّة

نستعمل هذه النتيجة بشكل مباشر في برهان خواص الموافقات في الدرس الخاص بهذه الخواص.

تطبيق

حدّد صحة أو خطأ كل من الموافقات الآتية، مبرّرا إجابتك.

1) $26 \equiv 11[5]$ ، 2) $-32 \equiv 18[10]$ ،

3) $478 \equiv 32[5]$ ، 4) $58 \equiv -5[7]$ ،

5) $63^2 \equiv 14[5]$ ، 6) $144 \equiv 11[19]$ ،

7) $131^2 \equiv 25[12]$ ، 8) $48^3 \equiv 36[7]$ ،

حل

للتحقق من صحة $a \equiv b[n]$ يكفي التحقق من أنّ $a-b$ مضاعفا للعدد n أو أنّ للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

1. $26-11=15$ و $15=3\times 5$. إذن $26 \equiv 11[5]$ صحيحة.
2. $-32-18=-50$ و $-50=(-5)\times 10$. إذن $-32 \equiv 18[10]$ صحيحة.
3. $478-32=446$ و $446=89\times 5+1$. إذن $478 \equiv 32[5]$ خاطئة، ونكتب $478 \not\equiv 32[5]$.

4) $58+5=63$ و $63=9\times 7$. إذن $58 \equiv -5[7]$ صحيحة.

5) $63^2=3969$. نجد باقي قسمة 63^2 على 5 هو 4، وبما أن باقي قسمة العدد 14 على 5 هو كذلك 4. فإن $63^2 \equiv 14[5]$ صحيحة.

6) $144-11=133$ و $133=19\times 7$. إذن $144 \equiv 11[19]$ صحيحة.

7) $131^2=1430\times 12+1$ و $25=2\times 12+1$، للعددين 131^2 و 25 نفس الباقي في القسمة على 12. إذن $131^2 \equiv 25[12]$ صحيحة.

8) $48^{3}=15798\times7+6$ و $36=5\times7+1$، ليس للعددين 48^3 و 36 نفس الباقي في القسمة على 7. إذن $48^3\equiv36[7]$ خاطئة، ونكتب $48^3\not\equiv36[7]$.

خاصية

n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $(n\geq2)$.

كل عدد صحيح a يوافق، بترديد n، باقي قسمته على n.

برهان

لاحظ أنّ هذا البرهان يعتمد على النتيجة الواردة في الصفحة 19.

a عدد صحيح و r باقي قسمته على n.

لإثبات أنّ $a\equiv r[n]$ يكفي أن نثبت أنّ $a-r$ مضاعف للعدد n.

نعلم أن $a=nq+r$ حيث q عدد صحيح و $0\leq r<n$.

ومنه $a-r=nq$. وبالتالي $a-r$ مضاعف للعدد n، أي $a\equiv r[n]$.

ملاحظة

إذا كان $a\equiv r[n]$، نقول عن r أنّه باقي قسمة a على n في حالة إذا كان $0\leq r<n$.

فمثلا $16\equiv6[5]$ و 6 ليس باقي قسمة 16 على 5 لأن $6\geq5$، أما باقي قسمة 16 على 5 فهو 1 لأن $16\equiv1[5]$ و $0\leq1<5$.

III. خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$:

نشاط

تذكر أنّ $a \equiv b[n]$ يعني أن للعددين الصحيحين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

الجدول أدناه هو جزء من ورقة حساب في مجدول، يمكن استغلاله لملاحظة بعض خواص الموافقة.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	p									
2	5	2									
3	a	b	C	d	$a+c$	$b+d$	$a\times c$	$b\times d$	a^p	b^p	
4	38	23	22	57	60	80	836	1311	1444	529	
5	3	3	2	2	0	0	1	1	4	4	باقي القسمة على n

لإنجاز ورقة الحساب هذه، باستعمال مجدول إكسل *(Excel)*، واستغلالها لملاحظة بعض خواص الموافقة يمكن إتباع الخطوات الآتية:

- احجز في السطرين الأول والثالث التسميات n، p، a، b، c، d، $a+c$، $b+d$، $a\times c$، $b\times d$، $a\wedge p$ (a أس p)، $b\wedge p$ في الخلايا المناسبة كما هو في الشكل.
- احجز عدد طبيعي n في الخلية A2 (5 مثلا)، وعدد طبيعي p في الخلية B2 (2 مثلا). أحجز في الخليتين A4 و B4 عددين a ، b بشرط أن يكون لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n (38 و 23 مثلا). وفي الخليتين C4 و D4 عددين آخرين c ، d بشرط أن يكون لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n (22 و 57 مثلا).

- لتعيين المجموع $a+c$ في الخلية E4 احجز فيها A4+C4= ثم عمّم الخلية E4 بالسحب إلى الخلية F4 لإظهار المجموع $b+d$ (هناك طرائق أخرى)
- بالنسبة إلى $a\times c$ و $b\times d$ يمكن محاكاة ما سبق.

للتعميم بالسحب في مجدول: انقر على الخلية المراد تعميم محتواها حرك المؤشر على النقطة أسفل إطار الخلية فيتحول إلى **+** ثم انقر على يسار الفأرة مع السحب إلى الخلية المستهدفة.

a+c	*b+d*
60	

- لتعيين $a^{\wedge}p$ في الخلية I4 احجز فيها (PUISSANCE(A4;B2= إما بالكتابة مباشرة، أو باستعمال الأيقونة $\boxed{\text{Formules}}$ في أعلى المجدول التي تساعدك على حجز هذه الصيغة وصياغات أخرى، والرمز B2 يثبت الخلية B2 عند التعميم بالسحب للصيغة (PUISSANCE(A4;B2= إلى الخلية J4، (ويمكن تثبيت خلية باللمسة F4 من لوحة المفاتيح)، ثمّ عمّم بالسحب محتوى الخلية I4 إلى الخلية J4 تحصّل على $b^{\wedge}p$.
- لتعيين باقي قسمة a على n في الخلية A5 مثلا، أحجز في هذه الخلية الصيغة (MOD(A4;A2= والتي تعني باقي قسمة A4 على A2.
- انقر على الخلية A5 ثمّ عمّم بالسحب إلى الخلية J5 تحصل على بواقي قسمة الأعداد الموجودة في السطر الرابع على n.

1. غيّر الأعداد الصحيحة a، b، c، d والعددين الطبيعيين n، p وفق الشروط المحددة سابقا، ولاحظ نواتج مختلف العمليات.
2. ماذا تلاحظ بالنسبة إلى باقي قسمة كل من $a+c$ و $b+d$ على n ؟ نفس السؤال بالنسبة إلى العددين $a\times c$ و $b\times d$ وكذا العددين a^p و b^p.
3. خمِّن بعض خواص الموافقة بترديد n.

حل

1. بعد إنجاز ورقة الحساب وتغيير الأعداد الصحيحة a، b، c، d والعددين الطبيعيين n، p ، تلاحظ أن نتائج العمليات تحسب تبعا لهذا التغيير تلقائيا وآليا.
2. نلاحظ أنّ للعددين $a+c$ و $b+d$ نفس الباقي في القسمة على n كما أنّ للعددين $a\times c$ و $b\times d$ نفس الباقي في القسمة على n. وكذلك بالنسبة إلى العددين a^p و b^p .
3. يمكن تخمين بعض من خواص الموافقة الواردة في الجزء الآتي.

خاصية1

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، ومن أجل كل عدد صحيح a لدينا: $a \equiv a\ [n]$.

برهان

طريقة: نعتمد في برهان هذه الخاصية والخواص الموالية لها على الخاصية الواردة تحت عنوان نتيجة في الصفحة 19.

لدينا $a-a=0\times n$ و منه $a-a$ مضاعف للعدد n،

وبالتالي فإنّ $a \equiv a\ [n]$.

خاصية2

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم.

إذا كان $a \equiv b\ [n]$ فإن $b \equiv a\ [n]$.

برهان

إذا كان للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n فإن للعددين b و a نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n .

خاصية3 (خاصية التعدي)

n عدد طبيعي غير معدوم، a ، b و c أعداد صحيحة.

إذا كان $(a \equiv b\ [n]$ و $b \equiv c\ [n])$ فإن $a \equiv c\ [n]$.

برهان

لدينا فرضا a و b و c أعداد صحيحة حيث $(a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n])$.

لكن هذا يعني أنّ:

$a - b = kn$ و $b - c = k'n$ مع k و k' عددان صحيحان

بجمع هاتين المساويتين طرفا لطرف نجد:

$$a - b + (b - c) = k\,n + k'\,n$$

ومنه $a - c = (k + k')n$ ، وبما أن $k + k'$ عدد صحيح فإنّ $a \equiv c[n]$.

خاصية4 (خاصية التلاؤم مع الجمع)

n عدد طبيعي غير معدوم، و a و b و c و d أعداد صحيحة.

إذا كان $(a \equiv b\ [n]$ و $c \equiv d\ [n])$ فإن $a + c \equiv b + d\ [n]$.

برهان

لدينا من الفرض a و b و c و d أعداد صحيحة مع $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$

وهذا يعني $a-b=kn$ و $c-d=k'n$ مع k و k' عددان صحيحان

بجمع هاتين المساويتين طرفا لطرف نجد:

$$(a+c)-(b+d)=(k+k')n$$

وبما أنّ $k+k'$ عدد صحيح فإنّ $a+c \equiv b+d[n]$.

خاصية5 (خاصية التلاؤم مع الضرب)

n عدد طبيعي غير معدوم، و a و b و c و d أعداد صحيحة.

إذا كان $(a \equiv b\ [n]$ و $c \equiv d\ [n])$ فإن $ac \equiv bd\ [n]$.

برهان

لدينا من الفرض a و b و c و d أعداد صحيحة حيث $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$

وهذا يعني $a-b=kn$ .....(*)

و $c-d=k'n$ .....(**) مع k و k' عددين صحيحين

لإثبات أنّ $ac \equiv bd\ [n]$ يكفي إثبات أنّ الفرق $ac-bd$ مضاعف للعدد n وعليه:

نعلم أنّ $c-bd=ac-bd$ نضيف للطرف الأيمن من هذه المساواة المقدار ad ونطرحه في نفس الوقت فنحصل على الكتابة

$$ac-bd=ac-ad+ad-bd$$

ومنه بأخذ كل من a و d عاملا مشتركا كما هو موضح فيما يأتي:

$$ac-bd=ac-ad+ad-bd=a(c-d)+d(a-b)$$

بتعويض العلاقتين (*) و(**) في هذه المساواة نجد

$$ac-bd= ak'n+dkn=\left(ak'+dk\right)na$$

بما أن $ak'+dk$ عدد صحيح فإن $ac\equiv bd[n]$.

ملاحظة

تعمّم الخاصية السابقة إلى جداء عدة أعداد صحيحة.

خاصية6

n و p عددان طبيعيان غير معدومين. a و b عددان صحيحان.

إذا كان $a\equiv b\ [n]$ فإن $a^p\equiv b^p\ [n]$.

أنظر برهان لهذه الخاصية في الصفحة 38 حيث استعملنا الاستدلال بالتراجع.

تطبيق1

لتكن الأعداد الصحيحة: $a=255$ ، $b=837$ ، $c=3691$.

1. عين باقي قسمة كل من الأعداد a و b و c على العدد11.
2. باستعمال الموافقات عين باقي قسمة كل من $a+b$ ، $a\times c$ ، $a+b+c$ ، a^2 ، $a\times b\times c$ على العدد 11.

حل

1. بإجراء عمليات القسمة (يمكن استعمال آلة حاسبة) نجد أنّ باقي قسمة كل من الأعداد a و b و c على العدد11 هي 2 ، 1 ، 6 على الترتيب.

2. لدينا: $a\equiv 2[11]$ و $b\equiv 1[11]$ ، وبتطبيق خاصية الجمع نجد $a+b\equiv 3[11]$، ومنه باقي قسمة $a+b$ على 11 هو 3.

- لدينا $a\equiv 2[11]$ و $c\equiv 6[11]$ ، وبتطبيق خاصية الضرب نجد $a\,c\equiv 12[11]$.

وبما أن $12\equiv 1\ [11]$ ، فإنه بالتعدي نجد $a\,c\equiv 1[11]$، ومنه باقي قسمة $a\,c$ على 11 هو 1.

- لدينا: $a\equiv 2[11]$ و $b\equiv 1[11]$ و $c\equiv 6[11]$ بتطبيق خاصية الجمع نجد $a+b+c\equiv 9[11]$، ومنه باقي قسمة $a+b+c$ على 11 هو 9.

- لدينا: $a\equiv 2[11]$ وبتطبيق الخاصية السادسة (خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$) نجد $a^2\equiv 2^2[11]$ أي $a^2\equiv 4[11]$، ومنه باقي قسمة a^2 على 11 هو 4.

- لدينا: $a\equiv 2[11]$ و $b\equiv 1[11]$ و $c\equiv 6[11]$. بتطبيق خاصية الضرب نجد $a\times b\times c\equiv 1\times 2\times 6[11]$ أي $a\times b\times c\equiv 12[11]$. بما أن $12\equiv 1\ [11]$ ، فإنه بالتعدي نجد $a\times b\times c\equiv 1[11]$ ، ومنه باقي قسمة $a\times b\times c$ على 11 هو 1.

تطبيق2

a و b عددان صحيحان حيث $a\equiv 3\ [5]$ و $b\equiv 4\ [5]$.

1. بين أن العدد $2a+b$ يقبل القسمة على 5.
2. عين باقي قسمة العدد $2a^2+b^2$ على 5.
3. تحقق أن $b\equiv -1\ [5]$، واستنتج باقي قسمة b^{2007} و b^{1428} على 5.

حل

1. لإثبات أنّ $2a+b$ يقبل القسمة على 5، باستعمال الموافقات، يكفي أن نثبت أنّ $2a+b\equiv 0\ [5]$.

لدينا $\begin{cases} a\equiv 3\ [5] \\ b\equiv 4\ [5] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2a\equiv 6\ [5] \\ b\equiv 4\ [5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a\equiv 1\ [5] \\ b\equiv 4\ [5] \end{cases}$ لأن $6\equiv 1\ [5]$.

بتطبيق خاصية الجمع نجد $2a+b\equiv 5\ [5]$

وبما أن $5\equiv 0\ [5]$ فإن $2a+b\equiv 0\ [5]$ (حسب خاصية التعدي)

أي باقي قسمة $2a+b$ على 5 هو 0، ومنه العدد $2a+b$ يقبل القسمة على 5.

2. لتعيين باقي قسمة العدد $2a^2+b^2$ على 5، باستعمال الموافقات، يكفي تعيين العدد r حيث $2a^2+b^2\equiv r\ [5]$ و $0\leq r<5$.

لدينا $\begin{cases} a\equiv 3\ [5] \\ b\equiv 4\ [5] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2a^2\equiv 2\times 9\ [5] \\ b^2\ \equiv 16\ \ [5] \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2a^2\equiv 3\ [5] \\ b^2\ \equiv 1\ [5] \end{cases}$ لأن $18\equiv 3\ [5]$ و $16\equiv 1\ [5]$.

بتطبيق خاصية الجمع نجد: $2a^2+b^2\equiv 4\ [5]$، ومنه باقي قسمة العدد $2a^2+b^2$ على 5 هو 4.

3. واضح أنّ $4\equiv -1\ [5]$، ولدينا بالفرض $b\equiv 4\ [5]$، ومنه، باستعمال خاصية التعدي، نجد $b\equiv -1\ [5]$.

بتطبيق الخاصية السادسة من خواص الموافقات نجد $b^{2007}\equiv(-1)^{2007}\ [5]$

و $b^{1428}\equiv(-1)^{1428}\ [5]$ أي $b^{2007}\equiv -1[5]$ و $b^{1428}\equiv 1[5]$.

وبما أن $-1\equiv 4\ [5]$ فإن $b^{2007}\equiv 4[5]$. نستنتج أن باقي قسمة b^{2007} على 5 هو 4 و باقي قسمة b^{1428} على 5 هو 1.

IV. الاستدلال بالتراجع:

نشاط

قديمًا كان اليونانيون يتقنون التعامل مع المربع التام لعدد طبيعي وقد توصلوا إلى النتيجة الآتية:

كلّما جمعنا أعدادا فردية متتابعة بدء من 1 نحصل على مربع تام لعدد طبيعي، وهكذا:

1 مربع العدد 1

$1+3=4$ و 4 هو مربع العدد 2

$1+3+5=9$ و 9 هو مربع العدد 3

$1+3+5+7=16$ و 16 هو مربع العدد 4 ، ... إلخ

1. أنجز ورقة الحساب المقابلة، في مجدول إكسل (*Excel*)، بإتباع الخطوات الآتية:

- احجز في العمود A بدء من الخلية A2 متتالية من الأعداد الطبيعية من 1 إلى n (في المثال أخذنا $n=10$).
- احجز في الخلية B2 الصيغة $=2\times A2\text{-}1$ ثم عمّم بالسحب إلى الخلية B11، تحصل على متتالية من الأعداد الفردية (من 1 إلى 19).
- احجز في الخلية $C2$ العدد 1 وفي الخلية $C3$ الصيغة =B2+B3 وفي الخلية $C4$

مجموع الأعداد الفردية من 1 إلى العدد المقابل لناتج المجموع

	A	B	C
1	*n*	*2n-1*	المجموع
2	*1*	*1*	*1*
3	*2*	*3*	*4*
4	*3*	*5*	*9*
5	*4*	*7*	*16*
6	*5*	*9*	*25*
7	*6*	*11*	*36*
8	*7*	*13*	*49*
9	*8*	*15*	*64*
10	*9*	*17*	*81*
11	*10*	*19*	*100*

الصيغة =B4+C3 ثم عمّم بالسحب محتوى الخلية $C4$ إلى الخلية $C11$.

2. احسب المجاميع الآتية: $S=1+3+5+7+9+11+13$.

$S'=1+3+5+7+9+...+21+23$.

$S''=1+3+5+7+9+...+47+49$.

ماذا تلاحظ ؟

3. خمِّن حساب المجموع $1+3+5+...+(2n-1)$ بدلالة n.

4. بفرض أنّ التّخمين السابق صحيح من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$

أثبت صحته من أجل العدد الطبيعي $n+1$.

نقول أن هذه الخاصية وراثية.

نقول عن خاصية $P(n)$ متعلقة بالعدد الطبيعي n أنها **وراثية** إذا كانت صحيحة من أجل العدد الطبيعي $n+1$ كلما كانت صحيحة من أجل العدد الطبيعي n.

حل

2. حدّد الخانات A11 ، B11 ، C11 دفعة واحدة وعمّم محتواها إلى أسفل، ولاحظ أنّ الناتج في كل حالة هو:

$$S=1+3+5+7+9+11+13=49=7^2$$

$$S'=1+3+5+...+21+23=144=12^2$$

$$S''=1+3+5+...+47+49=625=25^2$$

3. تخمين ناتج المجموع $1+3+5+...+(2n-1)$ بدلالة n.

عند تتبع علاقة الحدّ الأخير بالناتج في كل من S وS' وS'' نجد:

$1+3+5+7+9+11+13 \;=7^{2}$ مع $13=2\times\mathbf{7}-1$

أي:

$$1+3+5+7+9+11+13=1+3+5+7+9+11+(2\times7-1)=7^{2}$$

و $12^{2}\;=1+3+5+7+9+...+21+23$ مع $23=2\times\mathbf{12}-1$

و $25^{2}\;=1+3+5+7+9+...+47+49$ مع $49=2\times\mathbf{25}-1$

نلاحظ أنّ الحد الأخير في كل مجموع هو ضعف الجذر التربيعي للناتج منقوصا منه واحد.

ومنه يمكن أن نضع التّخمين الآتي: $1+3+5+...+(2\boldsymbol{n}-1)\;=\;n^{2}$

4. نفرض أنّ التّخمين السابق صحيح من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq1$ ونثبت صحته من أجل العدد الطبيعي $n+1$، أي نثبت أنّ

$$1+3+5+...+(2n-1)+(2(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})-1)=(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^{2}$$

والذي معناه $1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1)=(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^{2}$

لدينا $1+3+5+...+(2\boldsymbol{n}-1)\;=\;n^{2}$ من الفرضية السابقة، ثم نظيف $(2n+1)$ إلى كل من الطرفين فنجد:

$$1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1)=\;n^{2}\;+(2n+1)$$
$$1+3+5+...+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^{2}$$

وبالتالي فقد أثبتنا أنّه إذا كانت الخاصية $1+3+5+...+(2\boldsymbol{n}-1)\;=\;n^{2}$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq1$ فإنها صحيحة من أجل $(n+1)$. **نقول أن هذه الخاصية وراثية.**

الخاصية الوراثية:

نقول عن خاصية $P(n)$ متعلقة بالعدد الطبيعي n أنها **وراثية** إذا كانت صحيحة من أجل العدد الطبيعي $n+1$ كلّما كانت صحيحة من أجل العدد الطبيعي n.

مبدأ الاستدلال بالتراجع

مُسلَّمة: $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من n_0 أو يساويه يكفي أن:

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$ صحيحة.
2. نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من n_0 أو يساويه، ثمّ نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$ صحيحة.

المخطط الآتي يوضح مرحلتي مبدأ الاستدلال بالتراجع والخلاصة:

- ففي المرحلة الأولى نتحقق من صحة $P(n_0)$ (الخاصية عند n_0).
- وفي المرحلة الثانية نفترض صحة $P(n)$ (أي الخاصية من أجل عدد كيفي n) ونتحقق من صحة $P(n+1)$ (أي الخاصية من أجل $n+1$).
- عندها يمكن، حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع، استخلاص أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من n_0 أو يساويه.

المرحلة $_1$	المرحلة $_2$	الخلاصة
$P(n_0)$ صحيحة	إذا كانت $P(n)$ صحيحة فإنّ $P(n+1)$ صحيحة	من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من n_0 أو يساويه $P(n)$ صحيحة.

ملاحظة

المرحلة الأولى هي مرحلة التجريب أي نتحقق فيها من صحة الخاصية بأصغر عدد طبيعي n يفترض أنّه يحقق هذه الخاصية، وذلك بتعويض هذا العدد الطبيعي في الخاصية والتأكد بالحساب المباشر من صحة الخاصية وهي عملية ضرورية ولازمة لا يمكن الاستغناء عنها، لأنه يمكن لخاصية خاطئة أن تكون وراثية دون أن تحقق شرط التجريب.

فمثلا الخاصية " 3^n مضاعف للعدد 5 من أجل كل عدد طبيعي n " خاطئة من أجل $n = 0$ رغم أنها وراثية.

بالفعل:

إذا كان 3^n مضاعفا للعدد 5 أي $3^n = 5k$ حيث k عدد صحيح.

لدينا إذن $3^{n+1} = 3 \times 3^n = 3(5k) = 5(3K)$ ومنه 3^{n+1} هو الآخر مضاعف للعدد 5.

وبما أنّ شرط التجريب لم يتحقق لا يمكننا الحكم على صحة الخاصية " 3^n مضاعف للعدد 5 من أجل كل عدد طبيعي n " بل نحكم بأنّها ليست صحيحة.

مثال

لنثبت صحة الخاصية الآتية باستعمال الاستدلال بالتراجع.

" من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ "

المرحلة $_1$ (مرحلة التجريب)

من أجل $n=1$ لدينا: $\frac{1\times 2}{2}=1$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

المرحلة $_2$ (الوراثة)

نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ أي:

$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

لنبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$

أي نبرهن صحة المساواة: $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

لدينا:

$$1+2+3+...+n+(n+1)=(1+2+3+...+n)+(n+1)$$

$$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

و منه $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

الخلاصة

" من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ "

تطبيق1

أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد n^3-n مضاعف للعدد 3.

حل

الخاصية "n^3-n مضاعف للعدد 3" متعلقة بالعدد الطبيعي n. يمكن استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات صحّتها.

المرحلة1

من أجل $n=0$ ، نعوّض فنجد $0^3-0=0=3\times 0$ ، أي 0^3-0 مضاعف للعدد 3. نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

المرحلة2

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$. أي: n^3-n مضاعف للعدد 3.

نضع $n^3-n=3k$ حيث k عدد طبيعي.

ونبرهن على أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ ، أي نبرهن على أنّ $\left[(n+1)^3-(n+1)\right]$ مضاعف للعدد 3.

لدينا:

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=n^3-n\ +\ 3n^2+3n$$

$$(n+1)^3-(n+1)=3k\ +\ 3n^2+3n\ =3(k+n^2+n)$$

وبما أن $3(k+n^2+n)$ مضاعف للعدد 3 لأنّ $k+n^2+n$ عدد طبيعي.

نستنتج أن $(n+1)^3-(n+1)$ مضاعف للعدد 3.

الخلاصة

من أجل كل عدد طبيعي n، n^3-n مضاعف للعدد 3.

تطبيق2

نرمز بِـ $P(n)$ إلى الخاصية الآتية:

" العدد 3 يقسم العدد 4^n+1 من أجل كل عدد طبيعي n ".

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، إذا كانت $P(n)$ صحيحة تكون $P(n+1)$ صحيحة.
2. هل يمكننا استنتاج أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n؟ اشرح.

حل

1. نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n ، أي أن العدد 3 يقسم العدد 4^n+1. يمكننا أن نعبر عن ذلك بوضع $4^n+1=3k$ حيث k عدد صحيح.

ملاحظة مهمّة يسمى هذا الفرض فرضية التراجع

لنبرهن على أن $P(n+1)$ صحيحة، أي نبرهن على أن العدد 3 يقسم العدد $4^{n+1}+1$.

لدينا $4^{n+1}+1=4\times4^n+1=4\times(4^n+1)-3$

وبما أن $4^n+1=3k$ (حسب فرضية التراجع) نستنتج أن: $4^{n+1}+1=4(3k)-3$ ومنه $4^{n+1}+1=3(4k-1)$.

لدينا إذن $4^{n+1}+1=3k'$ مع $k'=4k-1$ وهو عدد صحيح.

نستنتج أن 3 يقسم العدد $4^{n+1}+1$.

خلاصة:

إذن فرضنا أنّ الخاصية P صحيحة من أجل n ثمّ برهنا انطلاقا من هذا الفرض أنّها صحيحة من أجل العدد $n+1$ فالخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

2. لا يمكننا استنتاج أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n، لأن وراثية الخاصية غير كافية ولابد من تفحص صحتها من أجل $n=0$.

من أجل $n=0$ لدينا $4^0+1=2$، وبما أنّ العدد 3 لا يقسم العدد 2، فإنّ الخاصية $P(n)$ غير محققة من أجل $n=0$.
وبالتالي فالخاصية $P(n)$ غير صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

تطبيق$_3$ (برهان صحة الخاصية 6 الواردة في الصفحة 27)

n و p عددان طبيعيان غير معدومين. a و b عددان صحيحان.
إذا كان $a \equiv b\ [n]$ فإن $a^p \equiv b^p\ [n]$.

تحليل التطبيق

مطلوب منا إثبات صحة أنّه إذا كان $a \equiv b\ [n]$ فإن $a^p \equiv b^p\ [n]$، من أجل ذلك نفترض أنّ $a \equiv b\ [n]$ صحيحة ونتأكد من صحة " $a^p \equiv b^p\ [n]$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p " وهي خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي p، وهذا ما يجعلنا نفكر في الاستدلال بالتراجع على p.

حل

نفرض أنّ $a \equiv b\ [n]$ صحيحة، ونتأكد من صحة $a^p \equiv b^p\ [n]$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p .

المرحلة $_1$ (مرحلة التجريب)

من أجل $p=1$ نعوّض فنجد $a^1 \equiv b^1\ [n]$ ، أي $a \equiv b\ [n]$ وهي صحيحة.

المرحلة $_2$

*فرضية التراجع

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل العدد الطبيعي p حيث $p \geq 1$ أي $a^p \equiv b^p\ [n]$ ،

*برهان التراجع

نبرهن على أنّ $a^{p+1} \equiv b^{p+1}\ [n]$

لدينا $a^p \equiv b^p\ [n]$ (حسب فرضية التراجع)

و $a \equiv b\ [n]$ (من المعطيات)

بتطبيق الخاصية5 (خاصية التلاؤم مع الضرب) نجد

$a^p \times a \equiv b^p \times b\ [n]$ أي $a^{p+1} \equiv b^{p+1}\ [n]$.

الخلاصة

$a^p \equiv b^p\ [n]$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p

نستنتج مما سبق صحة الخاصة6.

V. ملخص:

قابلية القسمة

a و b عددان صحيحان مع b غير معدوم.

- b يقسم a يعني وجود عدد صحيح k حيث: $a = kb$.
- b قاسم a يعني a مضاعف b.
- للعددين الصحيحين a و $-a$ نفس القواسم في $\mathbb{Z}$.
- يمكن حساب عدد القواسم الموجبة لعدد طبيعي بعد تحليله إلى جداء عوامل أولية.

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$

من أجل كل عدد صحيح a وكل عدد طبيعي غير معدوم b.

- توجد ثنائية وحيدة $(q\,;\,r)$ من الأعداد الصحيحة حيث:
- القسمة الإقليدية للعدد الصحيح a على العدد الطبيعي b غير المعدوم هي عملية البحث عن الثنائية $(q\,;\,r)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق الشرطين: $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

يسمى q حاصل القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b ويسمى r باقي هذه القسمة.

- يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b، فنحصل على $a = bq + r$ و $0 \leq r < |b|$.

الموافقات في $\mathbb{Z}$

n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان.

- a و b متوافقان بترديد n ($a \equiv b[n]$) يعني أن للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

- يكون للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا وفقط إذا كان $a-b$ مضاعفا للعدد n.
- يقرأ الرمز $n|a-b$ العدد n يقسم العدد $a-b$.
- يكون العددان الصحيحان a و b متوافقان بترديد n (أي $a \equiv b\ [n]$) إذا وفقط إذا كان $n|a-b$

- يكون العدد الطبيعي r باقي القسمة الإقليدية للعدد الصحيح a على العدد الطبيعي غير المعدوم n إذا وفقط إذا كان a يوافق r ، بترديد n.

أي كل عدد صحيح a يوافق، بترديد n ، باقي قسمته على n.

خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$

n عدد طبيعي غير معدوم. a و b عددان صحيحان.

- $a \equiv a\ [n]$.
- إذا كان $a \equiv b\ [n]$ فإن $b \equiv a\ [n]$.
- إذا كان $(a \equiv b\ [n]$ و $b \equiv c\ [n])$ فإن $a \equiv c\ [n]$.
- إذا كان $(a \equiv b\ [n]$ و $c \equiv d\ [n])$ فإن $a+c \equiv b+d\ [n]$.
- إذا كان $(a \equiv b\ [n]$ و $c \equiv d\ [n])$ فإن $ac \equiv bd\ [n]$.

- إذا كان $a \equiv b\ [n]$ فإن $ka \equiv kb\ [n]$ حيث k عدد صحيح.
- إذا كان $a \equiv b\ [n]$ فإن $a^p \equiv b^p\ [n]$، مع p عدد طبيعي غير معدوم.

الاستدلال بالتراجع

نعتبر فيما يلي n و n_0 عددان طبيعيان و $P(n)$ خاصية تتعلق بالعدد الطبيعي n .

- نقول عن الخاصية $P(n)$ إنّها **وراثية** إذا فرضنا أنّها صحيحة من أجل الرتبة n وأمكن البرهان انطلاقا من هذا الفرض على أنّها من صحيحة أجل الرتبة $n+1$.
- للبرهان على صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من n_0 أو يساويه نتبع مرحلتين:

1. **المرحلة الأولى ونسميها مرحلة التجريب** نتأكد فيها من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$ صحيحة، وذلك بتعويض n_0 وإجراء الحسابات المباشرة.
2. **المرحلة الثانية وفيها نضع فرضية التراجع التي ننطلق منها لبرهان الخاصية** أي نتأكد من أنّ $P(n)$ وراثية: نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من n_0 أو يساويه، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي من أجل $n+1$.

- يمكن لخاصية خاطئة أن تكون وراثية دون أن تحقق شرط التجريب (انظر التطبيق2).

VI. توظيف المعارف:

أ. تمارين

1. اكتب العدد 35 على شكل جداء عوامل أولية، واستنتج تحليلا إلى جداء عوامل أولية لكل من الأعداد الآتية: 7×35 و 35^2 و 35^3.
ما هو عدد القواسم الموجبة لكل عدد؟

2. 1. عيّن مجموعة القواسم الموجبة للعدد 45.
2. عيّن كل القواسم الموجبة الزوجية للعدد 90.
3. عيّن كل القواسم الموجبة للعدد 90 والتي هي مضاعفة للعدد 5.

3. عيّن الأعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون العدد $n+3$ قابلا للقسمة على 7.

4. عيّن الأعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون العدد $2n+3$ يقسم للعدد 6.

5. عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق المعادلة $x^2-y^2=15$ .....$(*)$.

6. نعتبر الموافقة الآتية $37\equiv x\,[4]$ .... $(*)$
1. عين خمسة أعداد صحيحة x تحقق الموافقة $(*)$.
2. ما هو العدد الطبيعي x الأصغر تماما من 4 ويحقق $(*)$ ؟

7. n عدد طبيعي أكبر من 2 أو يساويه. في كل حالة من الحالات الآتية، عين قيم العدد n التي تحقق الموافقة المقترحة.

أ) $64 \equiv 0[n]$ ب) $10 \equiv 1[n]$ جـ) $27 \equiv 5[n]$

8. x عدد صحيح، باقي قسمته على 7 هو 2. عين باقي القسمة على 7 لكل من الأعداد الصحيحة الآتية : $x+5$ ، $x-5$ ، $9x$ ، $-15x$ ، x^3.

9. أ) بيّن أنّ : $6^{2008} \equiv 1[7]$

ب) استنتج أنّ العدد $8^{2008} - 6^{2008}$ يقبل القسمة على 7.

10. برهن على أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

11.

1. كيف يمكن اختيار العدد الطبيعي n حتى يكون $\frac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا.
2. عين الأعداد الطبيعية a حيث من بين قواسم العدد a قاسمين أوليين فقط هما 2 و 3 ، وعدد قواسم a^2 هو ثلاث مرات عدد قواسم العدد a.

12. الباقيان للقسمة الإقليدية لكل من العددين m و n على 17 هما 8 و 12 على الترتيب. عين بواقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $m+n$ ، $m \times n$ و m^2 على 17.

إرشاد: انظر التمرين 8 وحلّه.

13. أعط حصرا للعدد 326 بمضاعفين متتابعين للعدد 27. ثم احصره بمضاعفين متتابعين للعدد 12.

14. عين باقي قسمة العدد 12^{1527} على 5.

15. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، يكون $3^{2n}-2^{n}\equiv 0[7]$

16. n عدد طبيعي. جِدْ، تبعا لقيم n، باقي قسمة n^2 على 4.

17.

1. أ) ما هو باقي قسمة 1999 على 7؟

ب) ما هو باقي قسمة 2007 على 7؟

2. ليكن العدد الطبيعي n حيث $n\equiv 5[7]$.

أ) عيّن باقي قسمة العدد n^3 على 7.

ب) بيّن أنّ $n^3+1\equiv 0[7]$.

3. m عدد طبيعي حيث $m\equiv 4[7]$، بيّن أنّ $m^3-1\equiv 0[7]$.

4. بيّن، بدون حساب، أنّ 1999^3+2007^3 يقبل القسمة على 7.

18. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بِ $u_0=0,5$ و $u_{n+1}=[u_n]^2$.

1. برهن على أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<1$.

2. استنتج تغيرات المتتالية (u_n).

19. أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7.

20. 1. برهن على أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، فإنّ العدد n^2-n يقبل القسمة على 2.

2. برهن على أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإنّ العدد $n\left(n^2-1\right)$ مضاعف للعدد 6 .

21.

1. عين باقي القسمة الإقليدية على 5 للعدد 2^k من أجل القيم من 1 إلى 8 للعدد الطبيعي k .
2. برهن على أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{4n} على 5 هو 1.

استنتج باقي قسمة 17^{4n} على 5.

3. برهن على أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $2^{4n+3}+17^{4n+2}+3$ يقبل القسمة على 5.

ب. حلول للتمارين

1.

إنّ $35=5\times 7$

ومنه $7\times 35=7\times(5\times 7)=5\times 7^2$

و $35^2=(7\times 5)^2=5^2\times 7^2$

و $35^3=(7\times 5)^3=5^3\times 7^3$

عدد القواسم الموجبة للعدد 7×35 هو $(1+1)(2+1)$ أي 6، وبطريقة مماثلة نجد عدد القواسم الموجبة كل من 35^2، 35^3 هي على الترتيب 9 ، 16.

.2

1. تعيين مجموعة القواسم الموجبة للعدد 45

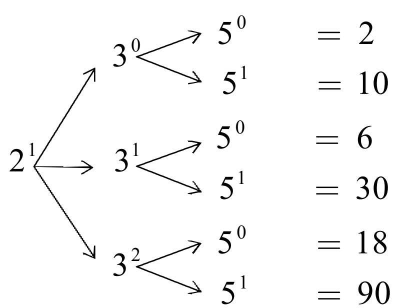
نكتب 45 على شكل جداء عوامل أولية. إنّ $45 = 3^2 \times 5$

ومنه عدد القواسم الموجبة للعدد 45 هو 6، ومجموعة القواسم الموجبة للعدد 45 هي: $D_{45} = \{1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 45\}$

2. تعيين القواسم الموجبة الزوجية للعدد 90

إنّ $90 = 2 \times 45$ ومنه $90 = 2 \times 3^2 \times 5$

يمكن الحصول على القواسم الموجبة الزوجية للعدد 90 باستعمال الشجرة، أو بضرب قواسم العدد 45 في 2



القواسم الموجبة الزوجية للعدد 90 هي

$2 ; 6 ; 10 ; 18 ; 30 ; 90$

3. تعيين القواسم الموجبة للعدد 90 والتي هي مضاعفة للعدد 5.

بمحاكاة الشجرة أعلاه نجد القواسم الموجبة للعدد 90 والتي هي مضاعفة للعدد 5 هي $5 ; 10 ; 15 ; 30 ; 45 ; 90$

.3

$n+3$ يقبل القسمة على 7 معناه يوجد عدد صحيح k حيث $n+3 = 7k$ ومنه $n = 7k-3$ و k عدد صحيح.

.4

يكون العدد $2n+3$ قاسما للعدد 6 إذا كان مساويا لإحدى القيم: -6 ، -3 ، -2 ، -1 ، 1 ، 2 ، 3 ، 6

من $2n+3=-6$ نجد $n=-\frac{9}{2}$ وهو مرفوض

من $2n+3=-3$ نجد $n=-3$ وهو مقبول

يمكن أنّ تقدّم البحث عن القيم الممكنة للعدد n بالجدول الآتي:

$2n+3$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
n	$-\frac{9}{2}$	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
	مرفوض	مقبول	مرفوض	مقبول	مقبول	مرفوض	مقبول	مرفوض

وبالتالي $2n+3$ يقسم 6 من أجل $n=0$ أو $n=-1$ أو $n=-2$ أو $n=-3$.

.5

المعادلة $x^2-y^2=15$ .....$(*)$ تكتب $(x-y)(x+y)=15$

العددان $x+y$ و $x-y$ هما مجموع عددين صحيحين وفرقهما، فهما عددان صحيحان.

العدد 15 يكتب على شكل جدا عددين صحيحين كما يأتي:

$15=15\times1$ أو $15=5\times3$ أو $15=(-15)(-1)$ أو $15=(-5)(-3)$

ومنه يمكن كتابة المعادلة $(*)$على الشكل $\begin{cases}x-y=a\\x+y=b\end{cases}$ حيث $15=a\times b$

كما يمكن تقديم الحل باستعمال الجدول الآتي:

$x-y$	1	15	3	5	-1	-15	-3	-5
$x+y$	15	1	5	3	-15	-1	-5	-3
x	8	8	4	4	-8	-8	-4	-4
y	7	-7	1	-1	-7	7	-1	1

ومنه ثنائيات الأعداد الصحيحة التي تحقق المعادلة $(*)$هي:

$$(8;7),\ (8;-7),\ (4;1),\ (4;-1),\ (-8;-7),\ (-8;7),\ (-4;-1),\ (-4;1)$$

.6

$x \equiv 37[4]$ معناه $37-x$ مضاعف للعدد 4

1. لتعيين خمسة أعداد صحيحة x تحقق الموافقة $(*)$ يكفي أخذ خمسة مضاعفات للعدد 4 مثل 0 ; 4 ; 8 ; 12 ; 40 ونحسب قيم x الموافقة بحل المعادلة $37-x=...$ بعد تعويض الطرف الثاني بأحد المضاعفات المختارة، فنجد 37 ; 33 ; 29 ; 25 ; -3.
2. العدد الطبيعي x الأصغر تماما من 4 ويحقق $(*)$ هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 37 على 4 وبالتالي $x=1$.

.7

أ) $64 \equiv 0[n]$ معناه 64 مضاعف للعدد n، وقيم n هي: 64,32,16,8,4,2

ب) $10 \equiv 1[n]$ معناه $10-1$ مضاعف للعدد n، وقيم n هي قواسم العدد 9 ماعدا 1 وهي: 3 , 9

جـ) $27 \equiv 5[n]$ معناه $27-5$ مضاعف للعدد n، ومنه قيم n هي قواسم العدد 22 الأكبر من 1 وهي 2 , 11 , 22

.8

• لدينا $x\equiv 2[7]$ و $5\equiv 5[7]$ ومنه $x+5\equiv 2+5[7]$ أي $x+5\equiv 7[7]$

لكن $7\equiv 0[7]$ ومنه $x+5\equiv 0[7]$ وباقي قسمة $x+5$ على 7 هو 0

بالمثل نجد:

• $x-5\equiv 2-5[7]$ أي $x-5\equiv -3[7]$ لكن $-3\equiv 4[7]$ وبالتالي فإنّ $x-5\equiv 4[7]$ ، وباقي قسمة $x-5$ على 7 هو 4

• $9x\equiv 9\times 2[7]$ ومنه $9x\equiv 4[7]$ ، وباقي قسمة $9x$ على 7 هو 4

• $-15\equiv 6[7]$ ومنه $-15x\equiv 6\times 2[7]$ ، أي $-15x\equiv 5[7]$ وباقي قسمة $-15x$ على 7 هو 5

• $x^3\equiv 2^3[7]$ ومنه $x^3\equiv 1[7]$ ، وباقي قسمة x^3 على 7 هو 1

.9

أ) إن $6\equiv -1[7]$ ومنه $6^{2008}\equiv (-1)^{2008}[7]$ ، وبالتالي $6^{2008}\equiv 1[7]$

ب) إن $8\equiv 1[7]$ ومنه $8^{2008}\equiv 1^{2008}[7]$ ، أي $8^{2008}\equiv 1[7]$

وبالتالي فإنّ $8^{2008}-6^{2008}\equiv 1-1[7]$ أي $8^{2008}-6^{2008}\equiv 0[7]$

والعدد $8^{2008}-6^{2008}$ يقبل القسمة على 7 .

.10

نبرهن بالتراجع صحة $0^2+1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

المرحلة1: من أجل $n=0$ لدينا $0^2=\dfrac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$ وهي محققة

المرحلة$_2$: نفرض أن الخاصية صحيحة من عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$

أي $0^2+1^2+2^2+.......+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ولنبرهن صحة

الخاصية من أجل $n+1$ أي نبرهن

$$0^2+1^2+2^2+.....+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

لدينا

$$0^2+1^2+2^2+.....+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$0^2+1^2+2^2+.....+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$0^2+1^2+2^2+.....+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$0^2+1^2+2^2+.....+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$0^2+1^2+2^2+.....+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$$0^2+1^2+2^2+.....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

.11

.1 إنّ $\dfrac{n+2}{n-1}=1+\dfrac{3}{n-1}$ (يمكن التّحقق من صحة المساواة بسهولة)

ومنه يكون $\dfrac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا إذا كان $\dfrac{3}{n-1}$ عددا صحيحا، أي إذا

كان $n-1$ قاسما للعدد 3 .

ومنه $n-1=1$ وبالتالي $n=2$

أو $n-1=3$ ومنه $n=4$

أو $n-1=-1$ ومنه $n=0$

أو $n-1=-3$ ومنه $n=-2$ وهو مرفوض لأنّه عدد غير طبيعي.

وبالتالي قيم n هي 0 و 2 و 4

2. بما أن من بين قواسم العدد a قاسمين أوليين فقط هما 2 و 3 فإن a يكتب على شكل $a=2^n\times 3^m$ حيث m و n عددان طبيعيان غير معدومين.

ويكون $a^2=\left(2^n\times 3^m\right)^2$ أي $a^2=2^{2n}\times 3^{2m}$

وعدد قواسم a هو $(n+1)(m+1)$

وعدد قواسم a^2 هو $(2n+1)(2m+1)$

بما أن عدد قواسم a^2 هو ثلاث مرات عدد قواسم a فإن:

$$(2n+1)(2m+1)=3(n+1)(m+1)$$

$$4nm+2n+2m+1=3nm+3n+3m+3$$

$$nm-n-m+1=3$$

$(n-1)(m-1)=3$ معناه $\left[\begin{cases}(n-1)=3\\(m-1)=1\end{cases}\right.$ أو $\left.\begin{cases}(n-1)=1\\(m-1)=3\end{cases}\right]$

أي: ($n=4$ و $m=2$) أو ($n=2$ و $m=4$)

ومنه العددين هما: $a=2^4\times 3^2$ أو $a=2^2\times 3^4$

$a=144$ أو $a=324$

.13

إنّ $326 = 12 \times 27 + 2$

• ومنه $12 \times 27 < 326 < 13 \times 27$

وبالتالي $324 < 326 < 351$

• كما أنّ $12 \times 27 < 326 < 12 \times 28$

وبالتالي $324 < 326 < 336$

.14

إن $12 \equiv 2[5]$ ومنه $12^{1527} \equiv 2^{1527}[5]$

وبدراسة بواقي قسمة قوى العدد 2 على 5 نجد $2^4 \equiv 1[5]$

نكتب $1527 = 4 \times 381 + 3$ و $2^{1527} = 2^{4\times381+3} = (2^4)^{381} \times 2^3$

ومنه $12^{1527} \equiv (1)^{381} \times 3[5]$

أي $12^{1527} \equiv 3[5]$ وباقي قسمة العدد 12^{1527} على 5 هو 3.

.15

من أجل كل عدد طبيعي n، لدينا:

$3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$ و $9 \equiv 2[7]$ ، وعليه $3^{2n} \equiv 2^n[7]$

ومنه نجد $3^{2n} - 2^n \equiv 2^n - 2^n[7]$ ، وبالتالي $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

.16

كل عدد طبيعي n يكتب $n = 2p$ أو $n = 2p+1$ حيث p عدد طبيعي.

إذا كان $n = 2p$ فإنّ $n^2 = 4p^2$

إذا كان $n = 2p+1$ فإنّ $n^2 = 4p^2 + 4p + 1$ أي $n^2 = 4(p^2 + p) + 1$

ومنه إذا كان $n = 2p$ (n زوجي) فإن باقي قسمة n^2 على 4 هو 0.

وإذا كان $n=2p+1$ (n فردي) فإن باقي قسمة n^2 على 4 هو 1.

ملاحظة

يمكن إنجاز ورقة الحساب الآتية في مجدول والتحقق من أجل أعداد طبيعية معينة بإتباع الخطوات الآتية:

	A	B	C	D
1	a	a^2	4	r
2	1	1		1
3	2	4		0
4	3	9		1
5	4	16		0
6	5	25		1
7	6	36		0
8	7	49		1
9	8	64		0

- احجز في العمود A بدء من الخلية A2 متتالية من الأعداد الطبيعية من 1 إلى n (في المثال أخذنا $n=8$).
- احجز في الخلية B2 الصيغة =A2^2 ثم عمّم بالسحب إلى الخلية B9، تحصل على متتالية مربعات الأعداد من 1 إلى 8.
- احجز في الخلية C1 العدد 4 وفي الخلية D2 الصيغة =MOD(B2;C1) ثم عمّم بالسحب محتوى الخلايا B2 , C2 , D2 دفعة واحدة إلى السطر 9.

17.

1. أ) $1999=285\times7+4$ وباقي قسمة 1999 على 7 هو 4.

ب) $2007=286\times7+5$ وباقي قسمة 2007 على 7 هو 5.

2. أ) لدينا $n\equiv5[7]$ ، ومنه $n^3\equiv5^3[7]$

وبما أنّ $5^3\equiv6[7]$ فإنّ $n^3\equiv6[7]$ ، ومنه باقي قسمة n^3 على 7 هو 6.

ب) لنبيّن أنّ $n^3+1\equiv0[7]$

بما أنّ $n^3\equiv6[7]$ فإنّ $n^3+1\equiv6+1[7]$ ، ومنه $n^3+1\equiv0[7]$

3. لدينا $m\equiv4[7]$ ومنه $m^3\equiv4^3[7]$

وبما أنّ $4^3\equiv1[7]$ فإنّ $m^3\equiv1[7]$

ومنه $m^3-1\equiv 1-1[7]$ أي $m^3-1\equiv 0[7]$

.4

• بيّنا في الجزء (2− ب) أنّه إذا كان $n\equiv 5[7]$ فإنّ $n^3+1\equiv 0[7]$

وعليه بما أنّ $2007\equiv 5[7]$ إذن $2007^3+1\equiv 0[7]$ ...... (I)

• بيّنا في الجزء (3) أنّه إذا كان $m\equiv 4[7]$ فإنّ $m^3-1\equiv 0[7]$

وعليه بما أنّ $1999\equiv 4[7]$ فإنّ $1999^3-1\equiv 0[7]$ ...... (II)

من (I) و (II) وبالجمع نجد : $1999^3+2007^3\equiv 0[7]$

ومنه العدد 1999^3+2007^3 يقبل القسمة على 7.

.18

المتتالية (u_n) معرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1}=[u_n]^2$ وبحدّها الأوّل u_0 حيث $u_0=0.5$.

.1 نبرهن، تراجعيا، على أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

المرحلة$_1$: من أجل $n=0$ لدينا $u_0=0.5$ و $0<u_0<1$ محققة.

المرحلة$_2$: نفرض أن $0<u_n<1$ من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$

ولنبرهن على أن $0<u_{n+1}<1$

لدينا $0<u_n<1$ (من الفرضية السابقة) وبالضرب في u_n حيث $0<u_n$

نجد: $0<u_n\times u_n<u_n$ أي $0<[u_n]^2<u_n$

وبما أنّ $u_{n+1}=[u_n]^2$ فإنّ $0<u_{n+1}<u_n$

وبما أنّ $0<u_n<1$ من الفرضية السابقة فإنّ $0<u_{n+1}<u_n<1$

و بالتالي : $0<u_{n+1}<1$

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$

2. تم البرهان على أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} < u_n$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

.19

المرحلة$_1$: من أجل $n = 0$ نجد: $2^{3\times 0} - 1 = 0$ و 0 مضاعف للعدد 7

المرحلة$_2$: نفرض أن $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7 من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي: $2^{3n} - 1 = 7k$ حيث k عدد صحيح، ومنه $2^{3n} = 7k + 1$

ونبرهن على أن $2^{3(n+1)} - 1$ مضاعف للعدد 7.

لدينا $2^{3(n+1)} - 1 = 2^3 \times 2^{3n} - 1$ وبما أنّ $2^{3n} = 7k + 1$

فإنّ $2^{3(n+1)} - 1 = 8(7k+1) - 1$

$$2^{3(n+1)} - 1 = 8 \times 7k + 7$$

$2^{3(n+1)} - 1 = 7(8k+1)$ مع $8k + 1$ عدد صحيح.

ومنه $2^{3(n+1)} - 1$ مضاعف للعدد 7.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7.

ملاحظة : توجد عدّة طرائق لحل مثل هذا النوع من التمارين، سنعرض اثنين منها:

طريقة1

باستعمال الاستدلال بالتراجع والموافقة.

يكفي إثبات صحة الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n، $2^{3n} - 1 \equiv 0[7]$ "

مرحلة$_1$: من أجل $n=0$ لدينا: $2^{3\times 0}-1=0$ و $0\equiv 0[7]$ ومنه الخاصية محققة.

مرحلة$_2$: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$ أي $2^{3n}-1\equiv 0[7]$

ونبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي: $2^{3(n+1)}-1\equiv 0[7]$

لدينا $2^{3n}-1\equiv 0[7]$ **(من الفرضية السابقة)**

أي $2^{3n}\equiv 1[7]$ $\cdots\cdots(\mathrm{I})$

إن $2^{3(n+1)}-1=2^3\times 2^{3n}-1$ $\cdots\cdots(\mathrm{II})$

وبما أن $2^3\equiv 1[7]$ $\cdots\cdots(\mathrm{III})$

من (I) , (II) , (III) نجد $2^3\times 2^{3n}-1\equiv 1\times 1-1[7]$

ومنه $2^{3(n+1)}-1\equiv 0[7]$

الخلاصة: "من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{3n}-1\equiv 0[7]$".

طريقة2

لو لم يشترط الاستدلال بالتراجع، يمكن برهان صحة الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n، $2^{3n}-1\equiv 0[7]$" كما يأتي باستعمال خواص الموافقة.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $2^{3n}-1=\left(2^3\right)^n-1$

وبما أن $2^3\equiv 1[7]$

فإن $2^{3n}-1\equiv (1)^n-1[7]$

ومنه $2^{3n}-1\equiv 0[7]$

.20

.1 n^2-n يقبل القسمة على 2 معناه $n^2-n\equiv 0[2]$

انطلاقا من معرفتنا أن أي عدد طبيعي n يكون إما زوجيا أو فرديا نميّز حالتين. وإما $n\equiv 1[2]$

•الحالة الأولى وهي لما يكون n زوجيا أي $n\equiv 0[2]$ نجد $n^2\equiv 0[2]$ ومنه $n^2-n\equiv 0[2]$.

• الحالة الثانية وهي لما يكون n فرديا أي لما $n\equiv 1[2]$ نجد $n^2\equiv 1[2]$ ومنه $n^2-n\equiv 1-1[2]$ أي $n^2-n\equiv 0[2]$.

نلاحظ في كل من الحالتين الأولى والثانية أنّ $n^2-n\equiv 0[2]$ من أجل كل عدد طبيعي n، أي n^2-n يقبل القسمة على 2.

.2 $n(n^2-1)$ مضاعف للعدد 6 معناه $n(n^2-1)\equiv 0[6]$

يمكن البرهان بنفس المنوال السابق الذي نلخصه في الجدول الآتي:

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$n^2\equiv$	0	1	4	3	4	1	$[6]$
$n^2-1\equiv$	-1	0	3	2	3	0	$[6]$
$n(n^2-1)\equiv$	0	0	0	0	0	0	$[6]$

نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $n(n^2-1)\equiv 0[6]$ ، ومنه n^2-n مضاعف للعدد 6.

21.

1. يمكن تقديم الإجابة من خلال جدول كما يأتي:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
2^k	2	4	8	16	32	64	128	256
باقي قسمة 2^k على 5	2	4	3	1	2	4	3	1

يمكن توظيف خواص الموافقة لتسهيل الحساب، فمثلا: $2^3 \equiv 3[5]$ ومنه $2^4 \equiv 2\times 3[5]$ أي $2^4 \equiv 1[5]$ و $2^5 \equiv 2[5]$، وهكذا ...

ملاحظة

لقد طبقنا هنا **الخاصية5** (خاصية التلاؤم مع الضرب)

n عدد طبيعي غير معدوم، و a و b و c و d أعداد صحيحة.

إذا كان $(a \equiv b\ [n]$ و $c \equiv d\ [n])$ فإن $ac \equiv bd\ [n]$.

من ملاحظة نتائج الحسابات في الجدول أعلاه يمكن تخمين أن بواقي قسمة 2^k على 5 هي: 1 ، 3 ، 4 ، 2. لنبرهن ذلك كما يلي مستعينين بخواص الموافقات.

لدينا من الجدول $2^4 \equiv 1[5]$ منه $2^{4k} \equiv 1^k[5]$ حسب الخاصية 6 الواردة في الصفحة 29 من أجل كل عدد طبيعي k.

نضرب الطرفين في العدد 2 في كل مرّة فنحصل على:

- لدينا بداية $2^{4k} \equiv 1^k[5]$ من أجل كل عدد طبيعي k .
- من $2^{4k} \equiv 1^k[5]$ ينتج $2\times 2^{4k} \equiv 2\times 1^k[5]$ أي $2^{4k+1} \equiv 2[5]$
- من $2^{4k+1} \equiv 2[5]$ ينتج $2\times 2^{4k+1} \equiv 2\times 2[5]$ أي $2^{4k+2} \equiv 4[5]$

• من $2^{4k+2} \equiv 4[5]$ ينتج $2 \times 2^{4k+2} \equiv 2 \times 4[5]$ أي $2^{4k+3} \equiv 3[5]$

من المؤكد الآن أن البواقي الممكنة للقسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5 هي 1 ، 3 ، 4 ، 2 وذلك تبعا لتغيّر العدد الطبيعي n .

2. لإثبات أنّ باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{4n} على 5 هو 1 يكفي أن نبرهن على أن $2^{4n} \equiv 1[5]$

لدينا $2^{4n} \equiv (2^4)^n$

وبما أن $2^4 \equiv 1[5]$ فإن $2^{4n} \equiv (1)^n [5]$ أي $2^{4n} \equiv 1[5]$

وباقي قسمة 2^{4n} على 5 هو 1

• استنتج باقي قسمة 17^{4n} على 5:

لدينا $17 \equiv 2[5]$ ومنه $17^{4n} \equiv 2^{4n}[5]$

وبخاصية التعدي نجد $17^{4n} \equiv 1[5]$

وباقي قسمة 17^{4n} على 5 هو 1.

3. لدينا $2^{4n+3} + 17^{4n+2} + 3 = 2^3 \times 2^{4n} + 17^2 \times 17^{4n} + 3$

و $2^3 \equiv 3[5]$ ، $2^{4n} \equiv 1[5]$ ، $17^2 \equiv 4[5]$ ، $17^{4n} \equiv 4[5]$

ومنه $2^{4n+3} + 17^{4n+2} + 3 \equiv 3 \times 1 + 4 \times 1 + 3[5]$

$2^{4n+3} + 17^{4n+2} + 3 \equiv 10[5]$ أي $2^{4n+3} + 17^{4n+2} + 3 \equiv 0[5]$

وبالتالي فإنّ $2^{4n+3} + 17^{4n+2} + 3$ يقبل القسمة على 5.

VII. تقويم ذاتي:

أ. اختيار من متعدد

في كل من الحالات الآتية أربعة اقتراحات، واحد منها فقط صحيح عيّنه.

1) مجموعة القواسم الموجبة للعدد 24 هي:

أ) $\{0;1;2;3;4;6;8;12;24\}$.

ب) $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12\}$

جـ) $\{1;2;3;4;6;8;12;24\}$.

د) $\{2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24\}$

2) أ) $136 \equiv 36[7]$.   ب) $-136 \equiv -60[9]$

جـ) $17 \equiv 0[-17]$.   د) $2008 \equiv 608[100]$

3) أ) $100 \not\equiv 0[4]$.   ب) $36 \not\equiv 1[5]$.

جـ) $21 \not\equiv -21[6]$.   د) $121 \not\equiv -1[3]$.

4) باقي قسمته العدد الطبيعي $2015^{2015} + 2009^{2009}$ على 8 هو:

أ) 1   ب) 0

جـ) 7   د) 3

5) $P(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n.

أ) الخاصية $P(n)$ محققة دوما.

ب) إذا وجد عدد طبيعي n_0 حيث $P(n_0)$ محققة، فإنه من أجل كل عدد طبيعي n، الخاصية $P(n)$ تكون صحيحة.

ج) $P(3)$ محققة، ومن أجل كل عدد طبيعي k حيث $k \geq 3$، $P(k+1)$ تنتج من الخاصية $P(k)$. إذن من أجل كل $n \geq 3$ ، $P(n)$ صحيحة.

د) إذا كانت الخاصيتان $P(0)$ و $P(1)$ فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $P(n)$.

ب. صحيح أم خاطئ

في كل حالة مما يأتي خمسة نصوص، ميّز بين الصحيحة منها والخاطئة.

1) نعتبر العدد الطبيعي $a = 9720$

أ) العدد a يحلّل إلى جداء عوامل أوّلية على الشّكل: $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 9$.

ب) عدد قواسم العدد a هو 40.

ج) العدد 100 يقسم a.

د) العدد 19440 مضاعف للعدد a.

ه) العدد 1 هو باقي قسمة العدد a على 5.

2) a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي أكبر من 2 حيث $a \equiv b[n]$

أ) $a - b \equiv 0[n]$.

ب) $a + 111 \equiv b + 111[n]$.

ج) $a^2 \equiv ab[n]$.

د) $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n}[n]$.

ه) $a = nk + b$ مع k عدد صحيح.

3)

أ) $a \equiv 4[5]$ إذن $4-a$ مضاعف للعدد 5 .

ب) إذا كان $a \equiv 1[6]$ فإن a^6 يقبل القسمة على 6.

ج) بما أن $42 \equiv 0[6]$ فإن $21 \equiv 0[6]$

د) إذا كان b قاسما للعدد a فإنه يكون قاسما للعدد a^2 .

ه) إذا كان r باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b فإن r^2 هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a^2 على b.

أ. أجوبة اختيار من متعدد

1) جـ.

2) د.

3) د.

4) بـ.

5) جـ.

ب. أجوبة صحيح أم خاطئ

الحالة	النصوص الصحيحة	النصوص الخاطئة
1)	أ. د.	بـ. جـ. هـ.
2)	أ. بـ. جـ. هـ.	د.
3)	أ. د.	بـ. جـ. هـ.

VIII. استعد للبكالوريا:

1.التمرين الثاني من الموضوع الأول (دورة جوان2009) (05 نقاط)

ليكن العدد الطبيعي $a=25$

1. أ) تحقق من أنّ: $a \equiv 1\ [3]$

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $4+2a^2$ على 3.

جـ) بيّن أنّ: $a^{360}-5 \equiv 2[3]$

2. أ) ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة العدد 5^n على 3.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $5^n+a^2 \equiv 0\ [3]$

حل	السلّم
1. أ) $a = 25 = 8\times 3 + 1$ وبالتالي فإنّ: $a \equiv 1\ [3]$	0,5
ب) لدينا $a \equiv 1\ [3]$. بتطبيق خواص الموافقة نجد:	
$a^2 \equiv 1\ [3]$ ومنه $2a^2 \equiv 2\ [3]$ و $2a^2+4 \equiv 2+4\ [3]$	4×0,25
أي $2a^2+4 \equiv 0\ [3]$	
ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد $2a^2+4$ على 3 هو 0	
جـ) لدينا $a \equiv 1\ [3]$ ومنه $a^{360} \equiv 1\ [3]$	0,25
وبما أن $-5 \equiv 1[3]$	0,25
وبالتالي فإنّ: $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$	0,5
2. أ) دراسة بواقي قسمة العدد 5^n على 3	
لدينا: $5^0 \equiv 1\ [3]$ ، $5^1 \equiv 2\ [3]$ ، $5^2 \equiv 1\ [3]$	
من أجل كل عدد طبيعي k: $5^{2k} \equiv 1\ [3]$ و $5^{2k+1} \equiv 2\ [3]$	
وبواقي قسمة 5^n على 3 هي 1 و 2 على الترتيب.	0,5×3
ب) تعيين قيم n بحيث: $5^n + a^2 \equiv 0\ [3]$	
نضع $5^n + a^2 \equiv 0\ [3]$ وحيث أنّ $a^2 \equiv 1\ [3]$	0,25×4
إذن $5^n \equiv 2\ [3]$	
ومنه حسب أ) نجد $n = 2k+1$ حيث k عدد طبيعي.	

2.التمرين الثالث من الموضوع الثاني (دورة جوان2009) (05 نقاط)

1. أُدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9

2. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد:

$\left(1429^{2009} + 2008^{1430}\right)$ على 9.

3. بيّن أنّ العدد A حيث: $A = 7^{3n} + 7^{3n+1} + 7^{3n+2} + 6$ يقبل القسمة على 9 من أجل كل عدد طبيعي n.

حل	السلّم
1. دراسة بواقي قسمة العدد 7^n على 3 $7^0 \equiv 1\,[9]$ ، $7^1 \equiv 7\,[9]$ ، $7^2 \equiv 4\,[9]$ ، $7^3 \equiv 1\,[9]$ من أجل كل عدد طبيعي k : $7^{3k} \equiv 1\,[9]$ و $7^{3k+1} \equiv 7\,[9]$ و $7^{3k+2} \equiv 4\,[9]$	$3\times0{,}5$
ومنه بواقي قسمة 7^n على 3 هي: 1 من أجل $n = 3k$ و 7 من أجل $n = 3k+1$ و 4 من أجل $n = 3k+2$ مع k عدد طبيعي.	0,25 + 0,25 + 0,25
2. تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد: $\left(1429^{2009} + 2008^{1430}\right)$ على 9.	
• $1429 \equiv 7\,[9]$ و $2009 = 3\times669 + 2$ أي $2009 = 3\times k+2$ مع $k = 669$ ومنه $1429^{2009} \equiv 7^{3\times k+2}\,[9]$ وبالتالي فإنّ $1429^{2009} \equiv 4\,[9]$	0,75
• $2008 \equiv 1\,[9]$ ومنه $2008^{1430} \equiv 1\,[9]$	0,5
إذن $1429^{2009} + 2008^{1430} \equiv 5\,[9]$ وباقي قسمة العدد $\left(1429^{2009} + 2008^{1430}\right)$ على 9 هو 5	0,5
3. بيّن أنّ العدد A حيث: $A = 7^{3n} + 7^{3n+1} + 7^{3n+2} + 6$ يقبل القسمة على 9 من أجل كل عدد طبيعي n. من السؤال 1) لدينا، من أجل كل عدد طبيعي n ، $A \equiv 1+7+4+6\,[9]$ أي $A \equiv 18\,[9]$	0,5
ومنه $A \equiv 0\,[9]$	0,25

إذن A يقبل القسمة على 9

0,25

3. تمرين مع إرشادات

1. عين كل الأعداد الصحيحة قواسم العدد 6.

2. عين الأعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون $(n-4)$ قاسما للعدد 6.

3. عين الأعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون $(n+2)$ قاسما للعدد 6.

4. نعتبر العدد الناطق a حيث $a=\frac{n+2}{n-4}$.

- تحقق أنه من أجل كل عدد صحيح n يختلف عن 4، $a=1+\frac{6}{n-4}$.
- استنتج الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها a عددا صحيحا.

5. نعتبر العدد الناطق b حيث $b=\frac{n-4}{n+2}$.

- تحقق أنه من أجل كل صحيح n يختلف عن -2، $b=1-\frac{6}{n+2}$.
- استنتج الأعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون b عددا صحيحا.

إرشادات لحل التمرين

1. يمكن البدء بتحليل العدد 6 إلى جداء عوامل أولية، وتعيين عدد القواسم الموجبة، ولا تنس تعيين D_6 مجموعة قواسم العدد 6 في $\mathbb{Z}$.
2. $(n-4)$ قاسم للعدد 6 يعني أن $(n-4)$ ينتمي إلى D_6
3. $(n+2)$ قاسم للعدد 6 يعني أن $(n+2)$ ينتمي إلى D_6
4. للتحقق من صحة المساواة $\frac{n+2}{n-4}=1+\frac{6}{n-4}$ يمكن الانطلاق من طرف والحصول على الآخر، أو حساب الفرق بين الطرفين والحصول على صفر، وهناك طرائق أخرى.

يكون $1+\frac{6}{n-4}$ عددا صحيحا إذا كان $(n-4)$ قاسما للعدد 6

5. للتحقق من صحة المساواة $\frac{n-4}{n+2}=1-\frac{6}{n+2}$ انظر إرشاد (4).

يكون $1-\frac{6}{n+2}$ عددا صحيحا إذا كان $(n+2)$ قاسما للعدد 6 .