المجال المفاهيمي الرابع: العمليات المالية طويلة الأجل

الوحدة (14): الفوائد المركبة Les intérêts composes

الكفاءات المستهدفة:

- يطبق مبدأ تكافؤ رؤوس الأموال بالفوائد المركبة .

المدة اللازمة : 07 ساعات

المراجع: الكتب المدرسية المقررة .

مؤشرات التقويم الذاتي:

- يحسب القيمة المكتسبة و القيمة الحالية لمبلغ ما.
- يعوض رؤوس الأموال بفوائد مركبة.

تصميم الدرس

- الفائدة المركبة
- القيمة المكتسبة (الجملة)
- المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة
- القيمة الحالية
- استعمال القانون العام للفائدة المركبة
- تكافؤ رؤوس الأموال بالفوائد المركبة
- أنشطة الإعلام الآلي وحلولها
- أسئلة التقويم الذاتي
- أجوبة التقويم الذاتي

■ الفائدة المركبة :

نقول عن رأس مال أنه وظف بفائدة مركبة إذا أضيفت الفائدة البسيطة الناتجة في نهاية وحدة الزمن إلى رأس المال الموظف ليشكلا معا رأس مال جديد للوحدة الزمنية الموالية.

- الوحدة الزمنية المستخدمة في الأجل الطويل في غالب الأحيان هي السنة، إلا أنه يمكن استخدام وحدات زمنية أخرى كالسداسي، الثلاثي، الشهر.
- يحسب معدل الفائدة لـ 1 دج وليس لـ 100 دج كما هو الحال في الفائدة البسيطة.

■ القيمة المكتسبة (الجملة) la valeur acquise

وظف التاجر علي مبلغ 200.000 دج في صندوق التوفير والاحتياط بمعدل فائدة مركبة 10% سنويا لمدة 4 سنوات .

كيف تُحسب القيمة المكتسبة والفائدة الناتجة في نهاية المدة ؟

حساب القيمة المكتسبة لرأس المال الموظف من طرف التاجر علي:

السنوات	راس المال في بداية المدة	الفائدة الناتجة خلال السنة	رأس المال في نهاية المدة
1	200.000	200.000× 0,1 = 20.000	200.000 + 20.000 = 220.000
2	220.000	220.000× 0,1 = 22.000	220.000 + 22.000 = 242.000
3	242.000	242.000× 0,1 = 24.200	242.000 + 24.200 = 266.200
4	266.200	266.200× 0,1 = 26.620	266.200 + 26.620 = 292.820

ملاحظة

- أضفنا في نهاية السنة(1) الفائدة المتحصل عليها إلى رأس المال.
- رأس المال المتحصل عليه في نهاية السنة(1) أصبح يمثل رأس المال في بداية السنة(2) وعلى أساسه حسبت فائدة السنة(2).
- رأس المال المتحصل عليه في نهاية السنة(2) أصبح يمثل رأس المال في بداية السنة(3) وعلى أساسه حسبت فائدة السنة(3).
- رأس المال في نهاية السنة(3) أصبح يمثل رأس المال في بداية السنة(4) وعلى أساسه حسبت فائدة السنة(4).
- رأس المال في نهاية السنة(4) يعتبر القيمة المكتسبة (الجملة النهائية)

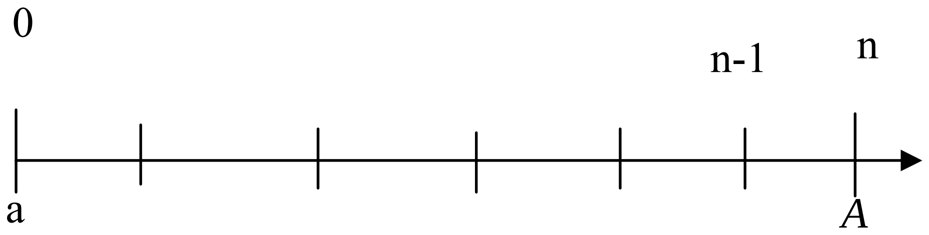
✹ استنتاج القانون العام لحساب القيمة المكتسبة:

a : رأس المال الموظف في بداية الوحدة الزمنية الأولى.

i : معدل فائدة 1 دج.

n : عدد الوحدات الزمنية.

A : القيمة المكتسبة من توظيف رأس المال لـ n وحدة زمنية.



السنوات	رأس المال في بداية السنة	الفائدة	رأس المال في نهاية السنة
1	a	$a.i$	$A_1 = a + a.i = a(1+i)$
2	$a(1+i)$	$a(1+i).i$	$A_2 = a(1+i) + a(1+i).i$ $= a(1+i)(1+i) = a(1+i)^2$
3	$a(1+i)^2$	$a(1+i)^2.i$	$A_3 = a(1+i)^2 + a(1+i)^2.i$ $= a(1+i)^2(1+i) = a(1+i)^3$
n-1	$a(1+i)^{n-2}$	$a(1+i)^{n-2}.i$	$A_{n-1} = a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-2}.i$ $= a(1+i)^{n-2}(1+i) = a(1+i)^{n-1}$
n	$a(1+i)^{n-1}$	$a(1+i)^{n-1}.i$	$A_n = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-1}.i$ $= a(1+i)^{n-1}(1+i) = a(1+i)^n$

و عليه فإن القانون العام للقيمة المكتسبة يكون على الشكل التالي:

$$\boxed{A = a(1+i)^n}$$

القيمة المكتسبة لرأس المال الموظف من طرف التاجر علي:

$$A = 200.000(1+0,10)^4$$

$$A = 200.000 \times 1,4641 = 292.82DA$$

ملاحظة

1. يمكن حساب الحد $(1+i)^n$ باستخدام الآلة الحاسبة أو الجدول المالي رقم(1)، وهو جدول يستخدم مهما كانت الوحدات الزمنية، بشرط أن يكون هناك توافق بين المعدل المطبق والوحدة الزمنية.
2. الفائدة المحصل عليها من توظيف رأس المال a لمدة n من وحدات الزمن تساوي:

$$I = A - a$$

$$I = a(1+i)^n - a$$

$$\boxed{I = a\left[(1-i)^n - 1\right]}$$

بالنسبة للتاجر علي فإن الفائدة المحققة :

$$I = 200.000[(1,10)^4 - 1] = 92.820DA$$

مستخرج من الجدول المالي:

القيمة المكتسبة لرأس مال قدره 1 دينار بعد n مدة بفوائد مركبة

الجدول (1): $A = a(1+i)^n$

n	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5
1	1,015000	1,020303	1,020000	1,022500	1,025000	1,027500	1,030000	1,032500	1,035000
2	1,030225	1,020611	1,040400	1,045506	1,050625	1,055756	1,060900	1,066056	1,071225
3	1,045678	1,018307	1,061208	1,069030	1,076891	1,084790	1,092727	1,100703	1,108718
4	1,061364	1,018584	1,082432	1,093083	1,103813	1,114621	1,125509	1,136476	1,147523
5	1,077284	1,018865	1,104081	1,117678	1,131408	1,145273	1,159274	1,173411	1,187686
6	1,093443	1,019151	1,126162	1,142825	1,159693	1,176768	1,194052	1,211547	1,229255
7	1,109845	1,019441	1,148686	1,168539	1,188686	1,209129	1,229874	1,250923	1,272279

■ المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة

1. المعدلات المتناسبة

نقول عن معدلين مرتبطين بمعدلات زمنية مختلفة أنهما متناسبين إذا تساوت نسبتهما مع النسبة بين وحداتهما الزمنية الخاصة برسملتهما.

و بصفة عامة إذا كان (i_a) هو المعدل السنوي لـ 1^{DA} ولفترة زمنية واحدة و (i_j) هو المعدل الموافق للفترة (q) و هي جزء من الفترة الزمنية الواحدة. فإن $(i_j),(i_a)$ يكونا متناسـبين إذا كان لدينا:

$$\frac{i_a}{i_j} = \frac{q}{1}$$

و منه: $$i_j = \frac{i_a}{q}$$

فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا المعدل السنوي 10% فإن:

- المعدل السداسي المتناسب هو :

$$1 \rightarrow 10\%$$

$$\tfrac{1}{2} \rightarrow i_s$$

$$i_s = \frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$$

- المعدل الثلاثي المتناسب فهو:

$$1 \rightarrow 10\%$$

$$\tfrac{1}{4} \rightarrow i_t$$

$$i_t = \frac{1}{4} \times 10\% = 2,5\%$$

- المعدل الشهري المتناسب فهو:

$$1 \rightarrow 10\%$$

$$\tfrac{1}{12} \rightarrow i_m$$

$$i_m = \frac{1}{12} \times 10\% = 0,833\%$$

و بشكل عام إذا كان المعدل السنوي i_a فإن:

ـ المعدل السداسي المتناسب : $i_s = \frac{i_a}{2}$

ـ المعدل الثلاثي المتناسب : $i_t = \frac{i_a}{4}$

ـ المعدل الشهري المتناسب: $i_m = \frac{i_a}{12}$

ملاحظة

إذا وظف رأس المال بفائدة بسيطة بمعدلين متناسبين لمدة معينة فإن القيمة المكتسبة تكون نفسها. بينما العكس في حالة التوظيف بفائدة مركبة، فإن القيمة المكتسبة تكون أكبر عندما تنخفض مدة الوحدة الزمنية.

2. المعدلات المتكافئة:

نقول عن معدلين مرتبطين بوحدات زمنية مختلفة، أنهما متكافئين إذا كانا يحققان نفس القيمة المكتسبة بفائدة مركبة لنفس رأس المال الموظف ولنفس المدة.

- إذا وظف مبلغ 1 دج بمعدل سنوي i_a فإن قيمته المكتسبة لمدة سنة تساوي: $(1+i_a)$.
- إذا وظف مبلغ 1 دج بمعدل سداسي i_s فإن قيمته المكتسبة لمدة سنة (سداسيين) تساوي: $(1+i_s)^2$.

نقول أن المعدلين i_a و i_s متكافئين إذا تساوت قيمتهما المكتسبة:

$$(1+i_a)=(1+i_s)^2$$

و بصفة عامة إذا كان (i_a) هو المعدل السنوي لـ 1دج و لفترة زمنية واحدة و (i_j) هو المعدل الموافق للفترة (q) و هي جزء من الفترة الزمنية الواحدة. فإن $(i_j),(i_a)$ يكونا متكافئين إذا كان لدينا:

$$(1+i_j)^q=(1+i_a)$$

فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا المعدل السنوي i_a فإن:

- المعدل السداسي المكافئ i_s هو:

$$(1+i_s)^2=(1+i_a)$$

$$1+i_s=\sqrt[2]{(1+i_a)}$$

$$1+i_s=\sqrt[2]{(1+i_a)}$$

$$1+i_s=(1+i_a)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{i_s=(1+i_a)^{\frac{1}{2}}-1}$$

- المعدل الثلاثي المكافئ i_t فهو:

$$(1+i_t)^4=(1+i_a)$$

$$1+i_t=\sqrt[4]{(1+i_a)}$$

$$i_t=\sqrt[4]{(1+i_a)}-1$$

$$\boxed{i_t=(1+i_a)^{\frac{1}{4}}-1}$$

- المعدل الشهري المكافئ i_m فهو:

$$(1+i_m)^{12}=(1+i_a)$$

$$1+i_m=\sqrt[12]{(1+i_a)}$$

$$i_s=\sqrt[12]{(1+i_a)}-1$$

$$\boxed{i_m=(1+i_a)^{\frac{1}{12}}-1}$$

إذا كان لدينا المعدل السنوي 10% فإن:

- المعدل السداسي المكافئ i_s هو:

$$1+i_s=(1+0,1)^{\frac{1}{2}}$$

$$1+i_s=1,0488088$$

$$i_s=1,048808-1=0,0488088$$

$$i_s=4,88\%$$

- المعدل الثلاثي المكافئ i_t فهو:

$$i_t=(1+0,1)^{\frac{1}{4}}-1$$

$$i_t=1,024112\text{-}1$$

$$i_t=0,024112$$

$$i_t=2,412\%$$

- المعدل الشهري المكافئ i_m فهو:

$$i_m=(1+0,1)^{\frac{1}{12}}-1$$

$$i_m=1,00798\text{-}1$$

$$i_m=0,00798$$

$$i_m=0,798\%$$

■ القيمة الحالية la valeur actuelle

📖 التاجر علي مدين بدين قيمته 300.000 دج يستحق الدفع في 2006/03/01.
إذا كان معدل الفائدة المركبة 7% ، فما هي قيمة هذا الدين في 2003/03/01 (تاريخ نشأة الدين)

✍ **ما هي القيمة الحالية للدين ؟**

1. تعريف القيمة الحالية:

تتمثل في المبلغ a الواجب توظيفه بفائدة مركبة لمدة n من وحدات الزمن بمعدل i للحصول على رأس مال A في نهاية المدة.

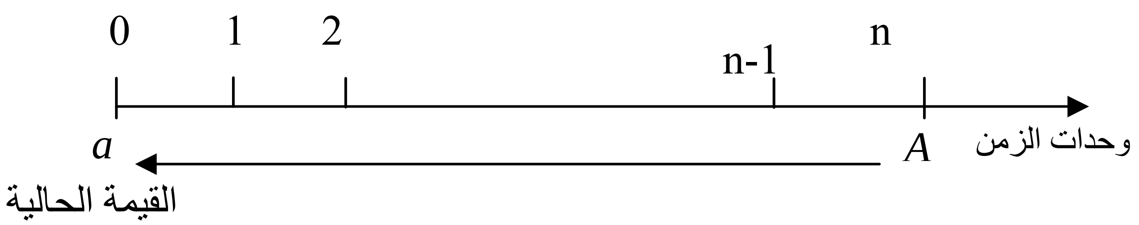
كما تعرف على أنها القيمة الأصلية لرأس مال عرفت قيمته في نهاية مدة توظيفه وعليه فإن القيمة الحالية تتحدد بطرح الفائدة المركبة من هذا المبلغ.

2. الصيغة العامة لحساب القيمة الحالية:

لدينا:

A : تمثل رأس مال يدفع في نهاية المدة n.

a : تمثل نفس رأي المال لكن مقدر في بداية المدة n .



لدينا:

$$A = a(1+i)^n$$

$$\frac{A}{(1+i)^n} = \frac{a(1+i)^n}{(1+i)^n}$$

$$a = \frac{A}{(1+i)^n}$$

$$a = A(1+i)^{-n}$$

ملاحظة

يحسب الحد $(1+i)^{-n}$ من الجدول المالي رقم (2) أو باستعمال الآلة الحاسبة.

مستخرج من الجدول المالي:

القيمة الحالية لجملة قدرها 1 دينار بعد n مدة بفوائد مركبة

الجدول رقم(2): $a=A(1+i)^{-n}$

n	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
1	0,985222	0,980392	0,980392	0,977995	0,975610	0,973236	0,970874
2	0,970662	0,961169	0,961169	0,956474	0,951814	0,947188	0,942596
3	0,956317	0,942322	0,942322	0,935427	0,928599	0,921838	0,915142
4	0,942184	0,923845	0,923845	0,914843	0,905951	0,897166	0,888487
5	0,928260	0,905731	0,905731	0,894712	0,883854	0,873154	0,862609

- حساب القيمة الحالية لدين التاجر علي في 2003/03/01:

المدة n: من 2003/03/01 إلى 2006/03/01 تساوي 03 سنوات.

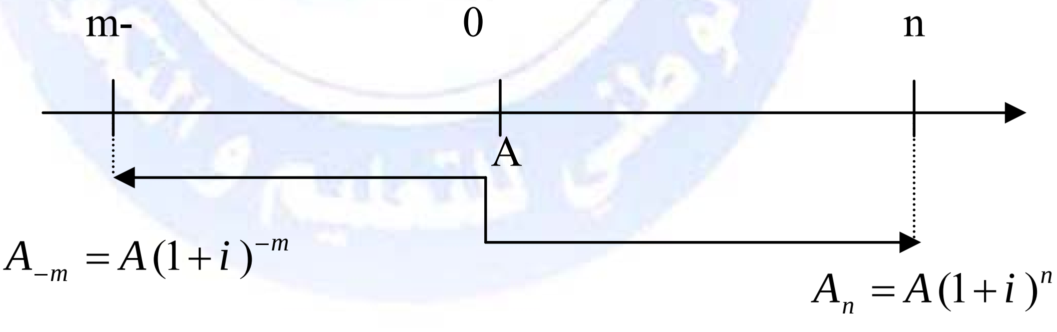
$$a = A(1+i)^{-n}$$
$$a = 300.000(1,07)^{-3}$$
$$a = 300.000 \times 0,816297$$
$$a = 244.889,36 \text{ DA}$$

3. تقييم رأس مال يدفع في أي تاريخ كان:

إذا كان لدينا:

A: رأس مال يدفع في التاريخ صفر (0).

- ما هي قيمته (A_n) في التاريخ n.
- ما هي قيمته (A_{-m}) في التاريخ -m



استنتاج:

$$A_n = A_{-m}(1+i)^{m+n}$$

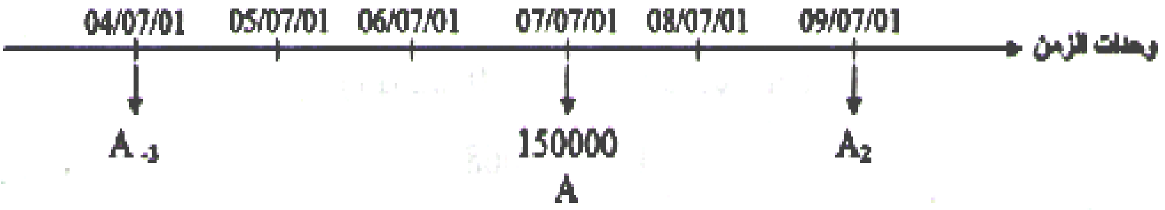
مثال:

شخص مدين بدين قيمته الاسمية 150.000 دج يستحق الدفع في 2007/07/01 تضمن العقد إمكانيتين لتسديد الدين.

1. التسديد المسبق في 2004/07/01
2. تأجيل التسديد إلى 2009/07/01

إذا كان معدل الفائدة المركبة 6% سنويا. أحسب المبلغ في الحالتين.

لتحديد قيمة الدين في التاريخين 2004/07/01 و2009/07/01 نستعين في توضيح ذلك بمحور الزمن التالي:


04/07/01
05/07/01
06/07/01
07/07/01
08/07/01
09/07/01
وحدات الزمن
A-3
150000
A
A2

1. قيمة الدين في التاريخ 2004/07/01:

$$A_{-3} = A(1+i)^{-3}$$

$$A_{-3} = 150.000(1,06)^{-3} = 125.942,89 DA$$

2. قيمة الدين في التاريخ 2009/07/01:

يمكن تحديده بطريقتين:

أ ـ انطلاقًا من A_{-3}:

$$A_2 = A_{-3}(1+i)^5$$

$$A_2 = 125.942,89(1,06)^5 = 168.539,99 DA$$

أ ـ انطلاقًا من A:

$$A_2 = A(1+i)^2$$

$$A_2 = 150.000(1,06)^2 = 168.539,99 DA$$

■ استعمال القانون العام للفائدة المركبة

يسمح القانون العام للفائدة المركبة، والذي يتكون من أربعة عناصر، حساب العنصر الرابع بمعلومية العناصر الثلاثة الأخرى.

ملاحظة

يتم الحساب باستعمال الآلة الحاسبة أو الجداول المالية.

1. حساب القيمة المكتسبة (A):

مثال:

أودع شخص في البنك مبلغ 30.000 دج بمعدل فائدة مركبة 4,3% سنويا لمدة 10 سنوات.

المطلوب: حساب القيمة المكتسبة.

لدينا:

$$A = a(1+i)^n$$
$$A = 30.000(1,043)^{10}$$
$$A = 30.000 \times 1,5235022$$
$$A = 45.705,06\ DA$$

✱ حساب القيمة المكتسبة في حالة شمول وحدات الزمن على عدد صحيح وكسور من وحدات الزمن.

مثال:

وظف شخص في البنك رأس مال قيمته 100.000 دج بمعدل فائدة مركبة 6% سنويا لمدة 5 سنوات و4 أشهر.

لدينا:

$$n = 5\frac{4}{12}$$

يتم تحديد القيمة المكتسبة $A_{5\frac{4}{12}}$ باستخدام الحلين:

■ الحل الأول: الحل العقلاني

يقوم على أساس استعمال الفائدة المركبة للجزء الصحيح من n وطريقة الفائدة البسيطة للجزء الكسري من n.

ـ حساب القيمة المكتسبة في نهاية مدة 5 سنوات:

$$A_5 = a(1+i)^5$$

$$A_5 = 100.000(1,06)^5$$

$$A_5 = 100.000 \times 1,338225578$$

$$A_5 = 133.822,5578\ DA$$

ـ حساب الفائدة البسيطة لـ 4 أشهر:

$$I_{\frac{4}{12}} = 133.822,5578 \times \frac{4}{12} \times \frac{6}{100} = 2.676,451155 DA$$

$$\boldsymbol{A_{(5\frac{4}{12})} = 133.822,5578\ DA + 2.676,451155\ DA}$$

$$\boldsymbol{A_{(5\frac{4}{12})} = 136.499,009\ DA}$$

وبشكل عام: نضع n على الشكل التالي:

$$n = k + \frac{p}{q}$$

حيث:

k : يمثل الجزء الصحيح (السنوات)

$\frac{p}{q}$: يمثل الجزء الكسري (الأشهر)

ـ حساب القيمة المكتسبة في نهاية السنة (k) :

$$A_k = a(1+i)^k$$

ـ حساب الفائدة البسيطة للقيمة المكتسبة A_k خلال المدة $(\frac{p}{q})$:

$$I_{\frac{p}{q}} = A_k \times i \times \frac{p}{q}$$

ـ القيمة المكتسبة في نهاية المدة (n) :

$$A_n = A_k + I_{\frac{p}{q}}$$

$$A_n = A_k + \times A_k\, i \times \frac{p}{q}$$

$$A_n = A_k\,(1 + i \times \frac{p}{q})$$

$$\boldsymbol{A_n = a(1+i)^k.(1+\frac{p}{q}i)}$$

■ الحل الثاني: الحل التجاري

يقوم على أساس استخدام طريقة الفائدة المركبة لكل من الجزء الصحيح من n والجزء الكسري من n.

- حساب القيمة المكتسبة في نهاية $5\frac{4}{12}$ سنوات

$$A_{5\frac{4}{12}} = 100.000(1+0,06)^5(1+0,06)^{\frac{4}{12}}$$

$$A_{5\frac{4}{12}} = 100.000 \times 1,338225578 \times 1,019612822$$

$$A_{5\frac{4}{12}} = 136.447,1959\ DA$$

وبشكل عام :

$$A_{k+\frac{p}{q}} = a(1+i)^k(1+i)^{\frac{p}{q}}$$

ملاحظة

الحل الأكثر استخداماً في العمليات التجارية هو الحل التجاري ولذلك سنستعمله في حل تطبيقات الفوائد المركبة إذا لم يكن هناك إشارة إلى استخدام طريقة أخرى.

2. حساب المعدل (i):

مثال: وظف تاجر في صندوق التوفير والاحتياط مبلغ 60.000 دج لمدة 4 سنوات فبلغت قيمته المكتسبة في نهاية المدة 78.061,386570 دج.

أحسب المعدل i ؟

يمكن تحديد المعدل انطلاقاً مـن العلاقـة : $A=a(1+i)^{n}$ أو

$a=A(1+i)^{-n}$

ـ باستخدام الآلة الحاسبة:

نحسب المعدل انطلاقًا من العلاقة: $A=a(1+i)^{n}$

$$(1+i)^{n}=\frac{A}{a}$$

$$(1+i)=\sqrt[n]{\frac{A}{a}}$$

$$(1+i)=(\frac{A}{a})^{\frac{1}{n}}$$

$$(1+i)=(\frac{78.061,38657}{60.000})^{\frac{1}{4}}$$

$$(1+i)=(1,30102311)^{\frac{1}{4}}$$

$$1+i=1,068$$

$$i=1,068-1=0,068$$

$$i=6,8\%$$

ـ انطلاقًا من العلاقة: $a=A(1+i)^{-n}$

$$(1+i)^{-n}=\frac{a}{A}$$

$$(1+i)^{-4}=\frac{60.000}{78.061,38657}=0,768625855$$

$$(1+i)=(0,768625855)^{-1/4}=\frac{1}{(0,768625855)^{1/4}}=1,068$$

$$i=1,068-1=0,068=6,8\%$$

ـ باستخدام الجداول المالية:

انطلاقًا من العلاقة: $A=a(1+i)^{n}$

$$(1+i)^{n} = \frac{A}{a}$$

$$(1+i)^{4} = \frac{78.0681,38657}{60.000}$$

$$(1+i)^{4} = 1,30102311$$

بالكشف في الجدول المالي رقم (1) أمام n =4 والقيمة المكتسبة لـ 1 دج تساوي 1,30102311، نجد أن هذه القيمة المكتسبة تقابل المعدل i المحصور بين المعدلين 6,5% و 7% . وعليه لإيجاد المعدل المطلوب، نستخدم طريقة الحصر وفق الخطوات التالية:

$$(1+i)^{4} = 1,30102311$$
$$(1,065)^{4} = 1,286466$$

الفرق الحقيقي $\delta = 0,01455711$

$$(1,07)^{4} = 1,310796$$
$$(1,065)^{4} = 1,286466$$

الفرق الجدولي: $\square = 0,02433$

وعليه المعدل المطلوب:

$$i = 6,5\% + 0,5\% \times \frac{\delta}{\square}$$

$$i = 6,5\% + 0,5\% \times \frac{0,01455711}{0,02433}$$

$$i = 6,5\% + 0,3\% = 6,8\%$$

- يمكن تحديد المعدل انطلاقًا من العلاقة: $a = A(1+i)^{-n}$

$$(1+i)^{-n} = \frac{a}{A}$$

$$(1+i)^{-4} = \frac{60.000}{78.061,38657} = 0,768625855$$

بالكشف في الجدول المالي رقم (2) امام n =4 والقيمة الحالية لـ 1 دج تساوي 0,768625855 نجد أن هذه القيمة الحالية تقابل المعدل i المحصور بين المعدلين 6,5% و 7% . وعليه لإيجاد المعدل المطلوب، نستخدم طريقة الحصر وفق الخطوات التالية:

$$(1,065)^{-4} = 0,777323 \qquad\qquad (1,065)^{-4} = 0,777323$$
$$(1+i)^{-4} = 0,768625855 \qquad\qquad (1,07)^{-4} = 0,762895$$
$$\delta = 0,008697145 \qquad\qquad \Delta = 0,014428$$

وعليه فإن المعدل المطلوب:

$$i = 6,5\% + 0,5\% \times \frac{\delta}{\Delta}$$

$$i = 6,5\% + 0,5\% \times \frac{0,008697145}{0,014428}$$

$$i = 6,5\% + 0,3\% = 6,8\%$$

3. حساب المدة (n):

مثال: وظف تاجر في البنك مبلغ 80.000 دج بمعدل 5% سنويا، فبلغت قيمته المكتسبة 108.523,328 دج في نهاية المدة n.

أحسب المدة n ؟

يمكن تحديد n انطلاقًا من العلاقة : $A = a(1+i)^n$

ـ باستخدام اللوغاريتم (Log) والآلة الحاسبة:

من أجل حساب المدة (n) نعتمـد علـى خـواص المعـادلات اللوغاريتمية

كما يلي:

إذا كان لدينا المعادلة : $a = b^n$ فإذا أدخلنا اللوغاريتم العشري على الطرفين فإن نتيجة المساواة لا تتغير: $\log(a) = \log(b)^n$.

و من خواص المعادلات اللوغاريتمية فإن: $\log(a) = n.\log(b)$

و منه : $n = \dfrac{\log(a)}{\log(b)}$

إذا طبقنا هذه الخاصية على قانون الجملة فإن المدة (n) تحسب كما يلي:

$$A = a(1+i)^n$$

$$\frac{A}{a} = (1+i)^n$$

$$\log(\frac{A}{a}) = \log(1+i)^n$$

$$\log(\frac{A}{a}) = n.\log(1+i)$$

$$n = \frac{\log(\frac{A}{a})}{\log(1+i)}$$

$$A = a(1+i)^n$$

$$108.523,3287 = 80.000(1+0,05)^n$$

$$108.523,3287 = 80.000(1.05)^n$$

$$\frac{108.523,3287}{80.000} = (1,05)^n$$

$$\log(1,356541609) = \log(1,05)^n$$

$$\log(1,356541609) = n.\log(1,05)$$

$$n = \frac{\log(1,356541609)}{\log(1,05)}$$

$$n = \frac{0,132433116}{0,021189299} = 6,25$$

n=6,25 أي 6 سنوات وثلاثة أشهر

ملاحظة

بإتباع نفس الخطوات $a = A(1+i)^{-n}$ انطلاقًا من العلاقة n يمكن تحديد المعتمدة في تحديد n من العلاقة $A = a(1+i)^n$.

ـ باستخدام الجدول المالي:

لدينا: $(1,05)^n = 1,356541609$

بالكشف في الجدول المالي رقم (1) أمام القيمة المكتسبة لـ 1 دج تساوي 1,356541609 وبمعدل 5% نجد أن هذه القيمة المكتسبة تقابل n المحصورة بين المدتين 6 سنوات و7 سنوات.

إيجاد n المطلوبة نستخدم طريقة الحصر كما يلي:

$(1,05)^n = 1,35641609$

$(1,05)^6 = 1,340096$

$\delta = 0,016445609$

$(1,05)^7 = 1,407100$

$(1,05)^6 = 1,1340096$

$\square = 0,067004$

وعليه فإن n:

$$n = 6 + 1 \times \frac{0,016445609}{0,067004}$$

$n = 6,25$ أي 6 سنوات وثلاثة اشهر

ملاحظة

يمكن تحديد n انطلاقًا من العلاقة $a = A(1+i)^{-n}$ بإتباع نفس الخطوات المعتمدة في تحديد n من العلاقة $A = a(1+i)^n$.

تكافؤ رؤوس الأموال بالفوائد المركبة :

اتفق التاجر علي في 2005/03/01 مع دائنه على استبدال دينه البالغ 300.000 دج بدين آخر قيمته الاسمية B بمعدل 7% سنويا يستحق الدفع في 2008/03/01.

كيف تُحسب القيمة الاسمية للدين الجديد

1. تعريف التكافؤ:

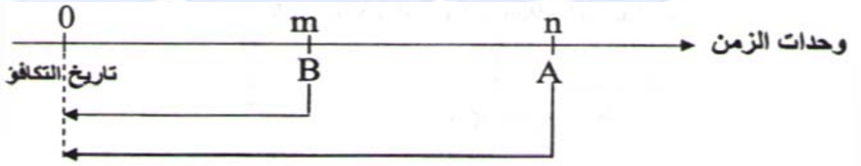
يتعلق الأمر بالاتفاق بين الدائن والمدين على استبدال دين معين بدين آخر أو بتعديل مواعيد استحقاق مجموعة من الديون بمواعيد أخرى تناسب الظروف التجارية والمالية للمدين، بشرط مراعاة عدم وقوع أضرار على الطرفين من جراء هذه التسوية.

إن استبدال الديون يتم على أساس تكافؤ القيم في تاريخ معين أي تكافؤ قيم الديون القديمة من قيم الديون الجديدة في تاريخ معين يطلق عليه تاريخ التكافؤ.

2. معادلة تكافؤ رأسمالين:

إذا كان لدينا:

- رأس مال قيمته الاسمية A يستحق في نهاية المدة n وبمعدل i.
- رأس مال قيمته الاسمية B يستحق في نهاية المدة m وبمعدل i.



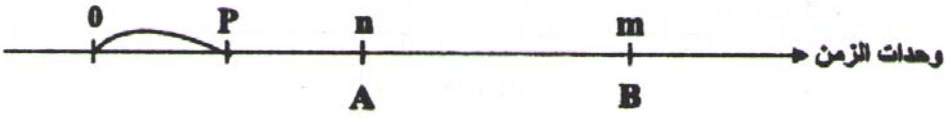
يكون الرأسمالين A وB متكافئين بفائدة مركبة إذا تساوت قيمتيهما الحالية في تاريخ التكافؤ.

لدينا في الزمن صفر (تاريخ التكافؤ) القيمة الحالية لـ A تساوي القيمة الحالية لـB وعليه فإن معادلة التكافؤ تكون على الشكل:

$$a = A(1+i)^{-n}$$
$$b = B(1+i)^{-m}$$

$$A(1+i)^{-n} = B(1+i)^{-m}$$

بشكل عام وبفائدة مركبة : يمكن أن يتحقق التكافؤ في أي تاريخ كان وليس بالضرورة في الزمن صفر فقط.



يعبر عن التكافؤ في الزمن صفر (تاريخ التكافؤ) بالمعادلة:

$$A(1+i)^{-n} = B(1+i)^{-m}$$

بضرب الطرفين بـ $(1+i)^p$ حيث p يعبر عن عدد وحدات الزمن يمكن أن تكون موجبة أو سالبة أو معدومة.

$$A(1+i)^{-n}(1+i)^p = B(1+i)^{-m}(1+i)^p$$

ومنه:

$$A(1+i)^{-n+p} = B(1+i)^{-m+p}$$

$$A(1+i)^{-(n-p)} = B(1+i)^{-(m-p)}$$

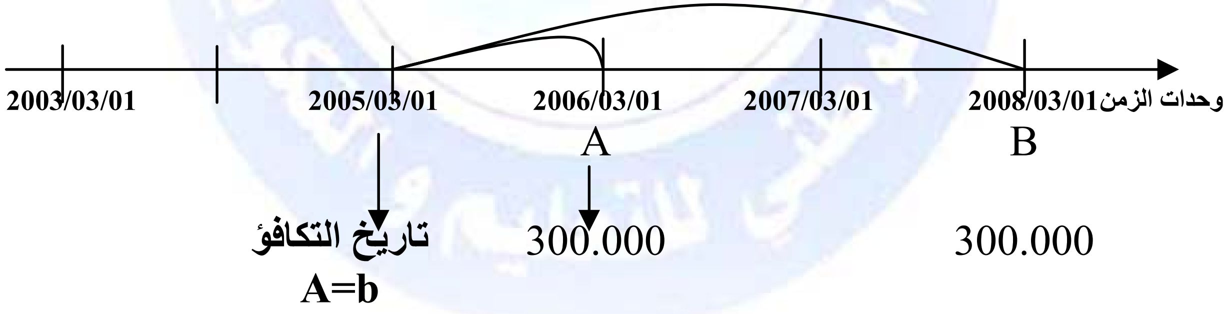
تعبر هذه المعادلة الأخيرة عن تحقق التكافؤ في الزمن p.

بالنسبة لدين التاجر علي: يتم حساب القيمة الاسمية للدين الثاني من خلال تطبيق قواعد التكافؤ بين رؤوس الأموال.

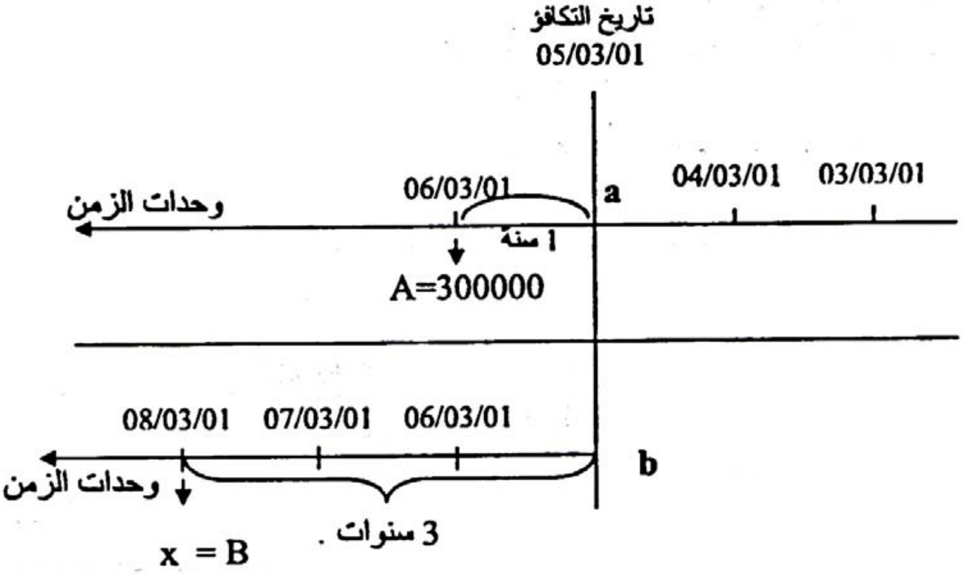
لدينا:

- القيمة الاسمية للدين الأول تساوي 300.000 دج يستحق في 2005/03/01.
- القيمة الاسمية للدين الثاني B تستحق في 2008/03/01.
- تاريخ التكافؤ 2005/03/01.

في تاريخ التكافؤ: القيمة الحالية للدين الأول a تساوي القيمة الحالية للدين الثانيb .


وحدات الزمن
2003/03/01
2005/03/01
2006/03/01
2007/03/01
2008/03/01
A
B
تاريخ التكافؤ
A=b
300.000
300.000

يمكن أن يعبر أيضا عن التكافؤ بالشكل التالي:


تاريخ التكافؤ
05/03/01
06/03/01
a
04/03/01
03/03/01
وحدات الزمن
1 سنة
A=300000
08/03/01
07/03/01
06/03/01
b
وحدات الزمن
3 سنوات
x = B

تحسب المدة من تاريخ التكافؤ إلى تاريخ الاستحقاق

- مدة الدين الأول: من 2005/03/01 إلى 2006/03/01 تساوي 1 سنة.
- مدة الدين الثاني: من 2005/03/01 إلى 2008/03/01 تساوي 3 سنوات.

تكون معادلة التكافؤ على الشكل:

القيمة الحالية (a) = القيمة الحالية (b) في 2005/03/01.

أي a=b

$$A(1+i)^{-n} = B(1+i)^{-m}$$

$$A(1,07)^{-1} =$$

$$300.000(1,07)^{-1} = B(1,07)^{-3}$$

$$280.373,83 = B \times 0,8162978$$

$$B = \frac{280.373,83}{0,8162978}$$

$$B = 343.470,03\ DA$$

أنشطة الإعلام الآلي:

جدول حساب القيمة الجملة (القيمة المكتسبة) بالفائدة المركبة.

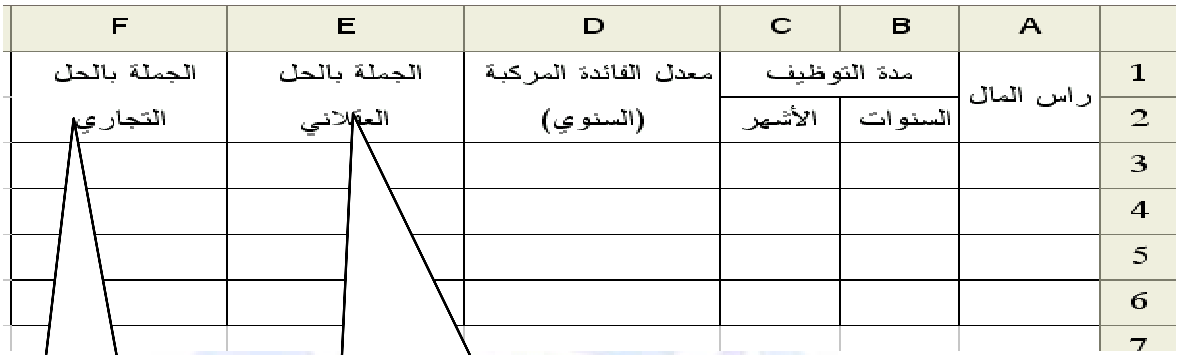
رأس المال	مدة التوظيف		معدل الفائدة المركبة (السنوي)	الجملة بالحل العقلاني	الجملة بالحل التجاري
	السنوات	الأشهر			
5.000	3		6%		
150.000	3		5%		
100.000	8	5	6%		
43.280	6		5%		
20.000	15	9	10%		
55.000	5	10	12%		
100.000	3		6%		

العمل المطلوب:

باستخدام المجدول Excel وصيغه اتمم الجدول

■ الحلول المقترحة لأنشطة الإعلام الآلي :

1. كتابة صيغة حساب القيمة المكتسبة في الخلايا المناسبة:

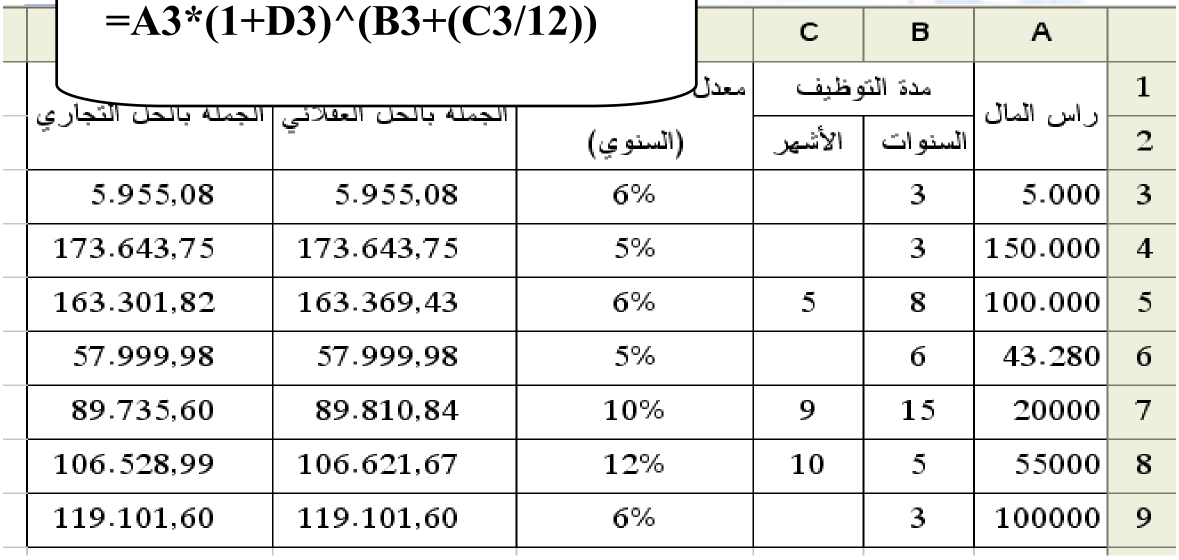


	A	B	C	D	E	F
1	راس المال	مدة التوظيف		معدل الفائدة المركبة	الجملة بالحل	الجملة بالحل
2		السنوات	الأشهر	(السنوي)	العقلاني	التجاري
3						
4						
5						
6						
7						

=A3*(1+D3)^B3*(1+D3*C3/12)

=A3*(1+D3)^(B3+(C3/12))

2. الحل النهائي المقترح يظهر كما يلي:



	A	B	C			
1	راس المال	مدة التوظيف		معدل		
2		السنوات	الأشهر	(السنوي)	الجملة بالحل العقلاني	الجملة بالحل التجاري
3	5.000	3		6%	5.955,08	5.955,08
4	150.000	3		5%	173.643,75	173.643,75
5	100.000	8	5	6%	163.369,43	163.301,82
6	43.280	6		5%	57.999,98	57.999,98
7	20000	15	9	10%	89.810,84	89.735,60
8	55000	5	10	12%	106.621,67	106.528,99
9	100000	3		6%	119.101,60	119.101,60

أسئلة التقويم الذاتي :

التمرين (1):

أودع تاجر مبلغ 30.000 دج في صندوق التوفير والاحتياط بمعدل فائدة مركبة 8% سنويا لمدة 5 سنوات.

العمل المطلوب:

أحسب القيمة المكتسبة في الحالات التالية

1. إذا كانت الرسملة سنوية (تضاف الفائدة في نهاية كل سنة).
2. إذا كانت الرسملة لكل سداسي (تضاف الفائدة في نهاية كل سداسي).

- بمعدل سداسي متناسب.
- بمعدل سداسي متكافئ.

التمرين (2):

بهدف توظيف مبلغ 1.000.000 دج تحصلت مؤسسة "م.ف" على المعلومات الخاصة بمختلف صيغ التوظيف المطبقة في بنكين متنافسين كما يلي:

ـ عرض البنك الأول:

حصول المؤسسة في نهاية مدة معينة (n) من التوظيف وبمعدل فائدة مركبة 8% سنويا على قيمة مكتسبة 2.158.924,997 دج.

ـ عرض البنك الثاني:

حصول المؤسسة في مدة 10 سنوات من التوظيف وبمعدل فائدة مركبة (i) على قيمة مكتسبة 1.967.151,357 دج.

العمل المطلوب:

1. حدّد مدة التوظيف (n) الخاصة بعرض البنك الأول.
2. حدّد معدل التوظيف (i) الخاص بعرض البنك الثاني.
3. بعد المفاضلة بين العرضين تم قبول عرض البنك الأول. في نهاية مدة 6 سنوات من التوظيف قررت المؤسسة استرجاع أموالها وهذا لأسباب مالية فوافق البنك على ذلك بشرط أن يدفع لها فقط مبلغ 1.543.301,526 دج.

-ما هو معدل الفائدة المركبة الذي أعتمده البنك في هذه الحالة ؟

التمرين (3):

تحصلت مؤسسة "ع.ف" على قرض بمعدل 6% سنويا يسدد على الشكل التالي:

- 150.000 دج في نهاية السنة الثالثة.
- 200.000 دج في نهاية السنة الخامسة.
- 160.000 دج في نهاية السنة السادسة.

العمل المطلوب:

1. حدّد مبلغ القرض (في تاريخ إبرام عقد القرض).

2. لقد نص عقد القرض على إمكانية تسديد القرض دفعة واحدة في نهاية السنة الرابعة، ما هو المبلغ الذي سوف يسدد في هذه الحالة ؟

التمرين (4)

اقترض شخص مبلغ 100.000 دج يسدده بعد 8 سنوات مع الأخذ بعين الاعتبار رسملة سنوية للفوائد المركبة بمعدل سنوي 6%. اقترح هذا الشخص تسديد مبلغ 70.000 دج فقط في نهاية السنة 8 والباقي يسدده سنتين من بعد بمعدل سنوي 7%.

العمل المطلوب:

1. أحسب المبلغ الذي كان سيسدده الشخص في نهاية السنة الثامنة.
2. أحسب المبلغ الذي سدده هذا الشخص في نهاية السنة العاشرة.

التمرين(5):

وظف شخص بتاريخ N/01/01 مبلغ 1.200.000 دج بفائدة مركبة. سنتين بعد هذا التوظيف سحب مبلغ 800.000 دج. و سنتين بعد هذا السحب الأول بلغ رصيد حسابه البنكي 616.092 دج.

العمل المطلوب:

1. حساب معدل الفائدة السنوي المطبق.
2. إذا وظف المبلغ لمدة معينة وتحصل على قيمة مكتسبة قدرها 1.653.345 دج فما هي مدة التوظيف؟

التمرين(6)

قام السيد "حسين" بتوظيف مبلغ (a) لدى أحد البنوك بفائدة مركبة لمدة 5 سنوات. وقد قام هذا الشخص بحساب رصيده في نهاية السنة الرابعة فبلغ 185.220 دج، كما حسب رصيده في نهاية السنة الخامسة فبلغ 194.481 دج.

العمل المطلوب:

1. ما هو معدل الفائدة المطبق لدى البنك؟
2. ما هو المبلغ الموظف (a) ؟

أجوبة التقويم الذاتي:

حل التمرين (1):

1. حساب القيمة المكتسبة في حالة الرسملة سنوية:

$$A = a(1+i)^n$$

$$A = 30.000(1+0,08)^5$$

$$A = 30.000(1,08)^5$$

$$A = 30.000 \times 1,469328$$

$$A = 44.079,84\ DA$$

2. حساب القيمة المكتسبة في حالة الرسملة سداسية:

لدينا: 5 سنوات أي 10 سداسيات

أ ـ حساب القيمة المكتسبة بالمعدل السداسي المتناسب:

معدل سنوي 8% ← $4\% = \frac{8\%}{2}$ معدل سداسي متناسب.

$$A = a(1+i)^n$$

$$A = 30.000(1+0,04)^{10}$$

$$A = 30.000(1,04)^{10}$$

$$A = 30.000 \times 1,480244$$

$$A = 44.407,32\ DA$$

ب ـ حساب القيمة المكتسبة بالمعدل السداسي المكافئ:

$$1+i_s = (1+i_a)^{\frac{1}{2}}$$

$$1+i_s = (1+0,08)^{\frac{1}{2}}$$

$$i_s = (1,08)^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$i_s = 1,03923 - 1 = 0,03923$$

$$i_s = 3,923\%$$

$$A = a(1+i)^n$$

$$A = 30.000(1+0,03923)^{10}$$

$$A = 30.000(1,03923)^{10}$$

$$A = 30.000 \times 1,469321226$$

$$A = 44.079,63\ DA$$

حل التمرين (2):

1. حساب مدة التوظيف n الخاصة بعرض البنك الأول:

باستخدام اللوغاريتم العشري

$$A = a(1+i)^n$$

$$2.158.924,997 = 1.000.000(1+0,08)^n$$

$$2.158.924,997 = 1.000.000(1,08)^n$$

$$\frac{2.158.924,997}{1.000.000} = (1,05)^n$$

$$(1,05)^n = 2,158924997$$

$$\log(1,05)^n = \log 2,158924997$$

$$n \log 1,05 = \log 2,158924997$$

$$n = \frac{\log 2,158924997}{\log 1,05} = 10$$ سنوات

2. تحديد معدل التوظيف الخاص بعرض البنك الثاني:

$$A = a(1+i)^n$$

$$1.967.151,357 = 1.000.000(1+i)^{10}$$

$$\frac{1.967.151,357}{1.000.000} = (1+i)^6$$

$$\sqrt[10]{\frac{1.967.151,357}{1.000.000}} = (1+i)$$

$$i = \sqrt[10]{\frac{1.967.151,357}{1.000.000}} - 1$$

$$i = \sqrt[10]{1,967151357} - 1$$

$$i = (1,967151357)^{\frac{1}{10}} - 1$$

$$i = 1,07 - 1$$

$$i = 0,07$$

$$i = 7\,\%$$

3. تحديد معدل الفائدة الذي أعتمده البنك الأول بعد 6 سنوات من التوظيف

$$i = \sqrt[6]{\frac{1.543301,526}{1.000.000}} - 1$$

$$i = \sqrt[6]{1,543301526} - 1$$

$$i = (1,543301526)^{\frac{1}{6}} - 1$$

$$i = 1,075 - 1$$

$$i = 0,075$$

$$i = 7,5\,\%$$

حل التمرين (3):

1. تحديد مبلغ القرض a:

$$a = 150.000(1,06)^{-3} + 200.000(1,06)^{-5}$$
$$+ 160.000(1,06)^{-6}$$
$$a = (150.000 \times 0,839619) + (200.000 \times 0,747258)$$
$$+ (160.000 \times 0,7049605)$$
$$a = 125.942,85 + 149.451,6 + 112.793,68$$
$$a = 388.188,13\ DA$$

2. حساب مبلغ الدفع الوحيد في نهاية السنة الرابعة:

$$A_4 = 150.000(1,06) + 200.000(1,06)^{-1}$$
$$+ 160.000(1,06)^{-2}$$
$$A_4 = (150.000 \times 1,06) + (200.000 \times 0,943396)$$
$$+ (160.000 \times 0,889996)$$
$$A_4 = 159.000 + 188.679,2 + 142.399,36$$
$$A_4 = 490.078,56\ DA$$

أو:

$$A_4 = 388.188,13(1,06)^4$$
$$A_4 = 388.188,13 \times 1,26247696$$
$$A_4 = 490.078,57\ \text{DA}$$

حل التمرين (4):

1. تحديد المبلغ الذي كان سيسدده الشخص في نهاية السنة الثامنة:

$$A_8=100.000(1,06)^8$$

$$A_8=159.384,80\ DA$$

2. المبلغ المسدد في نهاية السنة العاشرة:

$$A_{10}=(A_8-70.000)(1,07)^2$$

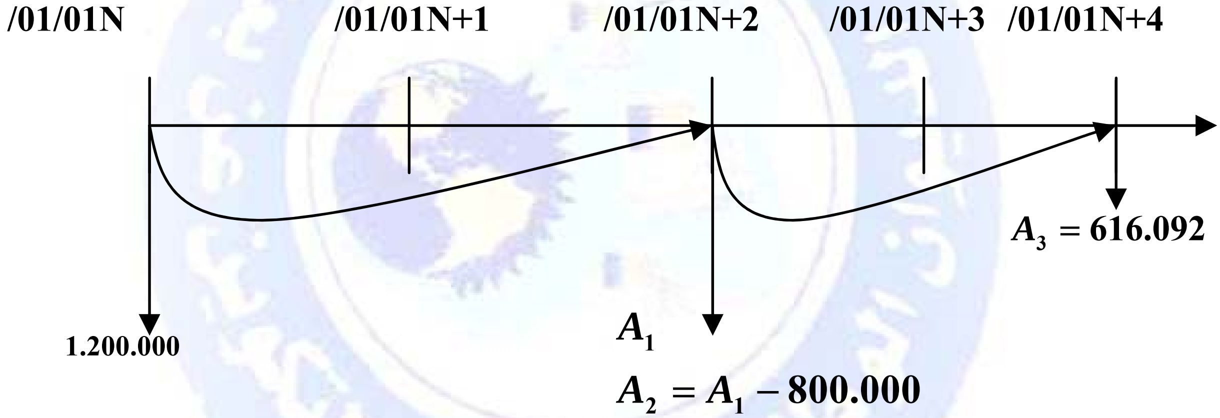
$$A_{10}=(159.384,80-70.000)(1,07)^2$$

$$A_{10}=89.384,8\times 1,1449$$

$$A_{10}=102.336,65\ DA$$

حل التمرين (5):

1. حساب المعدل:



/01/01N
/01/01N+1
/01/01N+2
/01/01N+3
/01/01N+4
1.200.000
A_1
$A_2 = A_1 - 800.000$
$A_3 = 616.092$

$$A_1 = 1200000(1+i)^2$$

$$A_2=A_1-800000$$

$$A_2=1200000(1+i)^2-800000$$

$$A_3=A_2(1+i)^2$$

$$616092=(1200000(1+i)^2-800000)(1+i)^2$$

$$616092=1200000(1+i)^4-800000(1+i)^2$$

$$1200000(1+i)^4-800000(1+i)^2-616092=0$$

نضع $x = (1+i)^2$

يكون لدينا معادلة من الدرجة الثانية نحلها باستخدام المميز (Δ):

$$1200000x^2 - 800000x - 616092 = 0$$

بقسمة الطرفين على 100000 نحصل:

$$12x^2 - 8x - 6{,}16092 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4a.c$$

$$\Delta=(8)^2-(4\times12\times(-6{,}16092))$$

$$\Delta=359{,}72416$$

$$\sqrt{\Delta} = 18{,}966395$$

و منه:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-8)-18{,}966395}{2\times12} = --0{,}456933$$

x_1 سالب و عليه فهو مرفوض لأن المعدل لا يكون سالباً.

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-(-8)+18{,}966395}{2\times12} = 1{,}1235997916$$

x_2 موجب و عليه فهو مقبول.

و منه لدينا: $x = (1+i)^2$

$$(1+i)^2 = 1,1235997916$$

$$i = \sqrt{1,1235997916} - 1$$

$$i = 1,0599999999 - 1$$

$$i \approx 0,06$$

$$i = 6\%$$

2. حساب مدة التوظيف:

$$A = a(1+i)^n$$

$$1.653.345 = 1.200.000(1,06)^n$$

$$(1,06)^n = \frac{1.653.345}{1.200.000}$$

$$(1,06)^n = 1,3777875$$

باستخدام اللوغاريتم العشري نجد:

$$n = \frac{\log(1,3777875)}{\log(1,06)} = 5,5$$

أي مدة التوظيف هي 5 سنوات و 6 أشهر

حل التمرين (6):

1. حساب المعدل:

لدينا: $A_4 = 185.220\ DA, \quad A_5 = 194.481\ DA$

$$A_4 = a(1+i)^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$A_5 = a(1+i)^5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

بقيمة (2) على (1):

$$\frac{A_5}{A_4}=\frac{a(1+i)^5}{a(1+i)^4}=(1+i)$$

$$\frac{A_5}{A_4}=(1+i)\Rightarrow(1+i)=\frac{194481}{185220}=1,05$$

$$(1+i)=1,05\Leftrightarrow i=1,05-1=0,05=5\%$$

2. حساب المبلغ الموظف a:

$$A_4=a(1+i)^4$$

$$a=A_4(1+i)^{-4}\Rightarrow a=185220(1,05)^{-4}$$

$$a=185220\times0,822702=152.380,95\text{DA}$$