5. الحساب التكاملي

الكفاءات المستهدفة

- حساب تكامل دالة
- حساب مساحة
- حساب القيمة المتوسطة لدالة و تفسيرها

تصميم الدرس

تعريف

I. الدوال الأصلية ومساحة حيز تحت منحن
II. خواص التكامل
III. القيمة المتوسطة لدالة على مجال
IV. ملخص الدرس
V. توظيف المعارف (تمارين + حلول وإرشادات)
VI. تقويم ذاتي (اختيار من متعدد + صحيح أم خاطئ)
VII. استعد للبكالوريا (مسائل محلولة مع سلّم التنقيط)

تعريف:

ثابت بن قرة.. إقليدس العرب

ولد ثابت بن قرة (سنة 221 هـــ = 834 م) في حران من أرض الجزيرة شمال العراق، بتركيا الآن.

برع ثابت في علم الهندسة حتى قيل عنه إنه أعظم هندسي عربي على الإطلاق، وقال عنه "يورانت ول": إنه أعظم علماء الهندسة المسلمين فقد ساهم بنصيب وافر في تقدم الهندسة، وهو الذي مهد لإيجاد علم التكامل والتفاضل، كما استطاع أن يحل المعادلات الجبرية بطرق هندسية، وتمكن من تطوير وتجديد نظرية فيثاغورس، وكانت له بحوث عظيمة وابتكارات رائدة في مجال الهندسة التحليلية.

ألف كتابا في الجبر، شرح فيه العلاقة بين الجبر والهندسة، وكيفية التوفيق بينهما، واستطاع أن يعطي حلولا هندسية لبعض المعادلات التكعيبية، وهو ما أفاد علماء الغرب فيما بعد في تطبيقاتهم وأبحاثهم الرياضية في القرن السادس عشر.

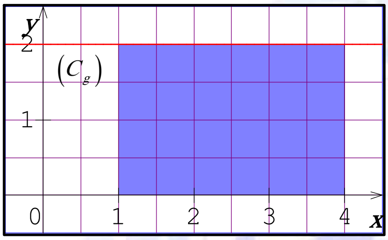
ويجدر بنا التأكيد على أن ثابت بن قرة مهد لحساب التكامل وذلك عندما وجد حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره وحين حل معادلة من الدرجة الثالثة بطريقة هندسية وذلك في كتابه مدخل إلى كتاب إقليدس.

I. الدوال الأصلية ومساحة حيز تحت منحن :

نشاط

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $g(x)=2$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

حيث $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$.



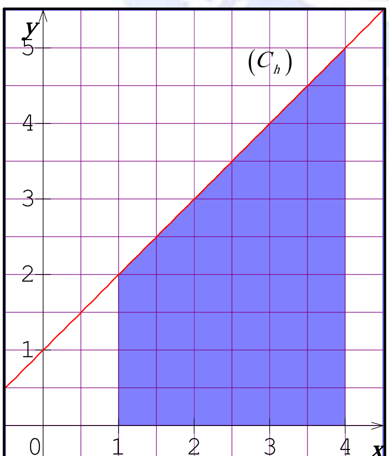
نهدف إلى حساب A مساحة الحيز المظلل في الشكل المقابل.

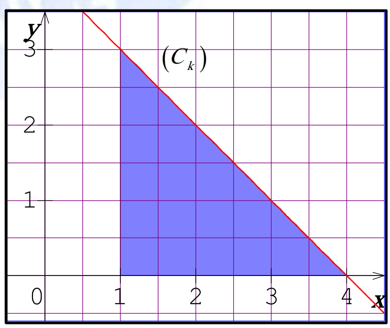
أ) أحسب بـِ cm^2 المساحة A.

ب) عين الدوال الأصلية G للدالة g على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $G(4)-G(1)$.

2. نفس السؤالين بالنسبة للدالتين h و k المعرفتين كما يلي:

$h(x)=-x+4$ ‏ $k(x)=x+1$ و الممثلتين أسفله.





3. ماذا تلاحظ في الحالات الثلاثة ؟ ضع تخمينا.

حل

1. أ) مساحة المستطيل المظلل في الرسم هي:

$A = 3\times 2\ cm^2$ أي $A = 6\ cm^2$.

ب) الدوال الأصلية للدالة g على $\mathbb{R}$ هي كل الدوال من الشكل:

$G(x) = 2x + k$ ، $k \in \mathbb{R}$ ولدينا $G(4) - G(1) = 8 - 2 = 6$.

2. أ) مساحة المثلث المظلل في الرسم هي:

$B = \frac{1}{2}\times 3\times 3\, cm^2$ أي $B = 4{,}5\, cm^2$.

الدوال الأصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ هي كل الدوال H من الشكل:

$H(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x + k$ و $k \in \mathbb{R}$ ولدينا

$H(4) - H(1) = \left(-\frac{16}{2} + 16\right) - \left(-\frac{1}{2} + 4\right) = 4{,}5$.

ب) مساحة شبه المنحرف المظلل في الرسم هي:

$C = \frac{(5+2)\times 3}{2} cm^2$ أي $C = 10{,}5\, cm^2$.

الدوال الأصلية للدالة k على $\mathbb{R}$ هي كل الدوال K من الشكل:

$K(x) = \frac{x^2}{2} + x + k$ و $k \in \mathbb{R}$ ولدينا

$K(4) - K(1) = \left(\frac{16}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = 10{,}5$.

3. نلاحظ في كل حالة من الحالات السابقة أن المساحة تحت المنحني (Γ) للدالة f ، بين العددين 1 و 4، تساوي $F(4) - F(1)$ علما أن F دالة أصلية للدالة f .

نضع مخمنة:

f دالة موجبة على مجال $[a;b]$ و F دالة أصلية لها على $[a;b]$.

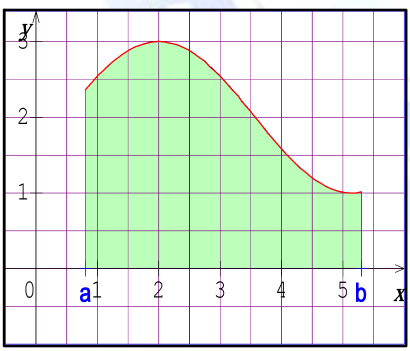
مساحة الحيز تحت المنحني الممثل للدالة f بين العددين a، b تساوي $F(b)-F(a)$.

مبرهنة (نقبلها بدون برهان)

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لـِـ f على I.

مساحة الحيز تحت المنحنى (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.

ملاحظات



- الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو الحيز المحدد بالمنحني (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.

- وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OAKB$ حيث K هي النقطة التي إحداثييها $(1;1)$.

تعريف التكامل

f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I.
يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية لـِ f
على I، التكامل من a إلى b لـِ f و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$.

ملاحظات

- إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فإنه يوجد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل x من I، $G(x)=F(x)+k$.
لدينا: $G(b)-G(a)=\left[F(b)+k\right]-\left[F(a)+k\right]=F(b)-F(a)$
نلاحظ هكذا أن العدد $F(b)-F(a)$ مستقل عن اختيار الدالة الأصلية للدالة f على المجال I.
- عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على مجال I يشمل العددين a و b ثم نكتب:
$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$.
- يمكن تبديل المتغير x بأحد الحروف t، q،... فيكون لدينا مثلا
$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$.

مثال

$$\int_1^2 (x^2+x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=\left(\frac{1}{3}(2)^3+\frac{1}{2}(2)^2\right)-\left(\frac{1}{3}(1)^3+\frac{1}{2}(1)^2\right)$$

ومنه نجد $\int_{1}^{2}(x^2+x)\,dx=\frac{28}{6}-\frac{5}{6}=\frac{23}{6}$

نتيجة

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \le b$

(C_f) منحنى f في معلم متعامد $(O;A,B)$ F دالة أصلية لــ f على I.

مساحة الحيز تحت (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$.

تطبيق1

احسب التكاملات التالية

1) $\int_{0}^{1}\left(x^2+1\right)dx$ 2) $\int_{-1}^{1}\left(x^3-x\right)dx$ 3) $\int_{-3}^{2} x\,dx$

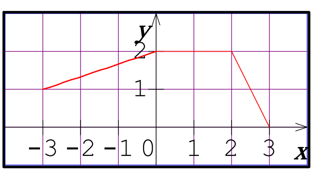
حل

1) $\int_{0}^{1}\left(x^2+1\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\left(\frac{1}{3}+1\right)-0=\frac{4}{3}$

2) $\int_{-1}^{1}\left(x^3-x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=0$

3) $\int_{-3}^{2} 2x\,dx=\left[x^2\right]_{-3}^{2}=(2)^2-(-3)^2=4-9=-5$

تطبيق2



التمثيل البياني المقابل هو لدالة f.

احسب التكاملات التالية:

1) $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$ ؛ 2) $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$ ؛ 3) $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$

حل

نلاحظ أن الدالة f موجبة على المجال $[-3;3]$.

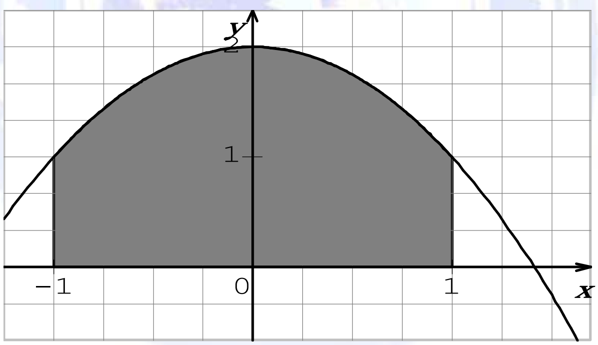
1) $\int_{-3}^{2} f(x)dx = 3\times\frac{1+2}{2}+4=\frac{17}{2}$ ؛

2) $\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{17}{2}+\frac{1\times 2}{2}=\frac{19}{2}$ ؛

3) $\int_{0}^{3} f(x)dx = 2\times 2+\frac{1\times 2}{2}=5$.

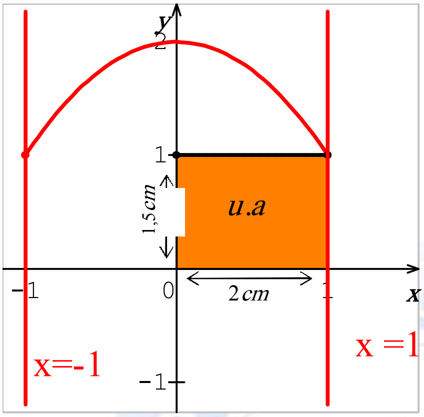
تطبيق3

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-x^2$.



1. أحسب بوحدة المساحة $(u.a)$ مساحة الحيز تحت المنحني بين العددين -1 و 1.
2. المعلم الذي مثلنا فيه الدالة f متعامد حيث الوحدات كما يلي: $2cm$ على محور الفواصل و $1,5cm$ على محور التراتيب.أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز تحت المنحني بين العددين -1 و 1.

حل



1.الدالة f موجبة على المجال $[-1;1]$ و دالة أصلية لها على $[-1;1]$هي الدالة F حيث: $F(x)=2x-\frac{1}{3}x^3$.

مساحة الحيز، بوحدة المساحة تحت المنحني بين العددين -1 و 1 هي:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\left[2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\left(2-\frac{1}{3}\right)-\left(-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{3}\,u.a$$

2. وحدة المساحة هي $2\,cm\times1,5\,cm$ أي $3\,cm^2$ وهي المستطيل الملوّن في الشكل أعلاه وبالتالي فإن مساحة الحيز بالسنتمتر المربع cm^2، تحت المنحني بين العددين -1 و 1 هي: $\frac{10}{3}\times3\,cm^2$ أي $10\,cm^2$.

ملاحظتان

- لو أُعطيت لنا الوحدة على محور الفواصل $2\,cm$ وعلى محور التراتيب $3\,cm$ فإنّ وحدة المساحة تكون في هذه الحالة $2\,cm\times3\,cm$ أي $6\,cm^2$.
- يعني الرمز $u.a$ وحدة المساحة (*unité d'aire*) وهي المستطيل الملوّن في الشكل أعلاه تتغير قيمته بالسنتمتر المربع تبعا لبعديه أي تبعا لطوله وعرضه.

II.خواص التكامل:

f و g دالتان معرفتان و مستمرتان على مجال I.

- **الخطية**

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I و من أجل كل k من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad (1)$$

$$(2) \int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx .$$

- **الترتيب**

a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$.

(1) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\geq 0$

فإن $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(2) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\leq g(x)$

فإن $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

- **علاقة شال**

من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c من I لدينا:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx .$$

تطبيق1

f و g دالتان مستمرتان على المجال $[1;3]$ حيث:

$\int_1^3 f(x)\,dx = 2$ و $\int_1^3 g(x)\,dx = -5$.

أحسب التكاملات التالية:

أ) $\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,dx$

ب) $\int_1^3 5f(x)\,dx$

جـ) $\int_1^3 [2f(x)-3g(x)]\,dx$

حل

أ) $\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_1^3 g(x)\,dx = 2-5=-3$.

ب) $\int_1^3 5f(x)\,dx = 5\int_1^3 f(x)\,dx = 5\times 2 = 10$.

جـ) $\int_1^3 [2f(x)-3g(x)]\,dx = 2\int_1^3 f(x)\,dx - 3\int_1^3 g(x)\,dx = 2(2)-3(-5)=19$.

تطبيق2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$ ، $f(x)\leq 1$. استنتج أن $\int_0^1 f(x)\,dx \leq 1$.

حل

من أجل كل x من $[0;1]$، $1+x^2 \geq 1$ و منه من أجل كل x من المجال $[0;1]$ لدينا $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$.

نستنتج أن $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 1\, dx$ و بما أن $\int_0^1 1\, dx = [x]_0^1 = 1$ فإن $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 1$.

تطبيق3

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـــ: $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.

عين اتجاه تغير المتتالية (u_n).

حل

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left[\frac{x^{n+1}}{1+x^2} - \frac{x^n}{1+x^2} \right] dx$$

أي $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1} - x^n}{1+x^2} \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^n (x-1)}{1+x^2} \right] dx$.

من أجل كل x من $[0;1]$ لدينا : $x^n \geq 0$ و $x-1 \leq 0$ إذن $x^n(x-1) \leq 0$

نستنتج أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $\frac{x^n(x-1)}{1+x^2} \leq 0$ لأن $1+x^2$ عدد موجب تماما و منه $\int_0^1 \left[\frac{x^n(x-1)}{1+x^2} \right] dx \geq 0$ أي من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$

لدينا $u_{n+1} - u_n \leq 0$ أي (u_n) متناقصة.

تطبيق4

f دالة معرفة على $[-1;2]$ بـِ $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\in[-1;1] \\ 2x-1 & ,x\in[1;2] \end{cases}$.

أحسب $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

حل

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{2} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} x^2\,dx+\int_{1}^{2}(2x-1)\,dx$$

لدينا $\int_{-1}^{1} x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$ و

$\int_{1}^{2}(2x-1)\,dx=\left[x^2-x\right]_{1}^{2}=2-0=2$ إذن $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$.

تطبيق5

نعتبر دالتين f و g المعرفتين على المجال $[0;1]$ كما يلي:

$f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2$.

أ) مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين (C_f) و (C_g).

ب) بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$، $f(x)\geq g(x)$

ج)تحقق أن الدالة $x\mapsto F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0;1]$.

د) نسمي (D) الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g).

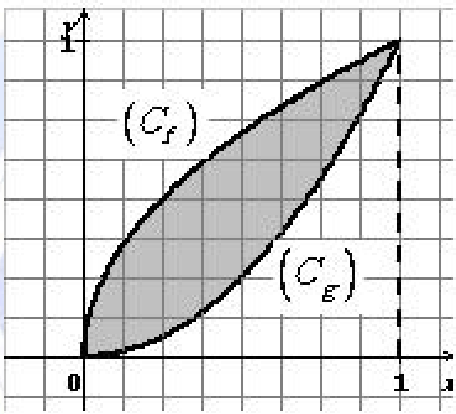
A_1 هي مساحة الحيز تحت (C_f) و A_2 مساحة الحيز تحت (C_g) بين العددين 0 و 1 و لتكن A مساحة (D).

عبّر عن A بدلالة A_1 و A_2 . استنتج أن $A=\int_0^1\left[f(x)-g(x)\right]dx$

ثم أحسب A بوحدة المساحة.

حل

أ) تمثيل المنحنيين (C_f) و (C_g) على شاشة حاسبة بيانية .



ب) في المجال $[0;1]$: (C_f) فوق (C_g) (انظر السؤال أ)) إذن من أجل كل x من $[0;1]$، $f(x)\geq g(x)$.

ج) من أجل كل x من $]0;1]$:

$$F'(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{2}{3}x.\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{x}{3}.\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{1}{3}\sqrt{x}=\sqrt{x}$$

إذن F دالة أصلية للدالة f على $]0;1]$.

د) $A=A_1-A_2=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\left[f(x)-g(x)\right]dx$

أي $\frac{1}{3}u.a = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = A = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right]dx$.

تطبيق6

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[-1;2]$ كما يلي:

$f(x) = x^2$ و $g(x) = -x+2$.

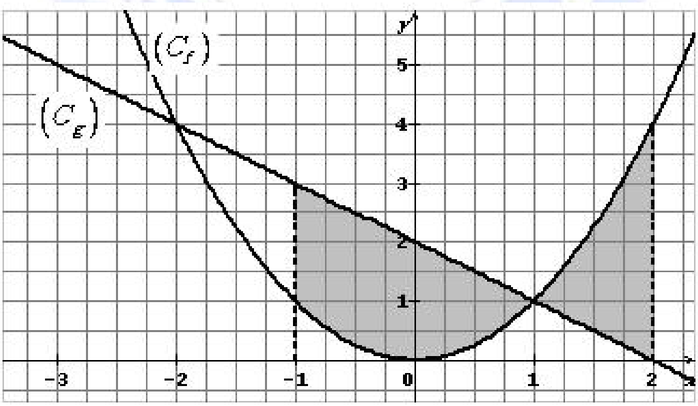
(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المعلم المتعامد $(O;I,J)$.

أ) مثل بيانيا المنحنيين (C_f) و (C_g).

ب)احسب المساحة A للحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f)،(C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=2$.

حل

أ) تمثيل المنحنيين (C_f) و (C_g).



ب)

•في المجال $[-1;1]$: (C_g) فوق (C_f)

إذن المساحة A_1 للحيز المحدد بالمنحنى (C_g) من الأعلى وبالمنحنى (C_f) من الأسفل وبالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=1$ هي :

$$A_1=\int_{-1}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]dx=\int_{-1}^{1}\left[(-x+2)-x^2\right]dx$$

أي $A_1=\int_{-1}^{1}\left(-x^2+x-2\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{1}=\frac{10}{3}$.

●في المجال $[1;2]$: (C_f) فوق (C_g)

إذن المساحة A_2 للحيز المحدد بالمنحنى (C_f) من الأعلى وبالمنحنى (C_g) من الأسفل وبالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$ هي :

$$A_2=\int_{1}^{2}\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_{1}^{2}\left[x^2-(-x+2)\right]dx$$

أي $A_1=\int_{-1}^{1}\left(x^2+x-2\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{1}=\frac{11}{6}$.

نستنتج أن $A=A_1+A_2=\frac{10}{3}+\frac{11}{6}=\frac{31}{6}u.A$.

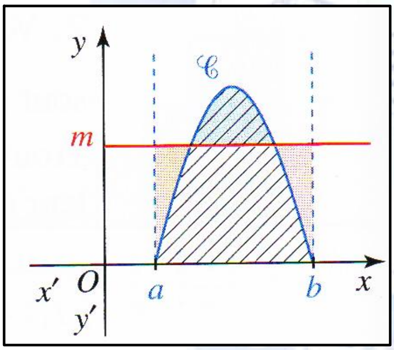
III.القيمة المتوسطة لدالة على مجال:

تعريف

f دالة مستمرة على مجال I . a ، b عددان حقيقيان من I و $a<b$.
القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي:
$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

التفسير الهندسي

نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a;b]$.
ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;I,J)$.



$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ يعني

$$m(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

نعلم أن $\int_a^b f(x)\,dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت (C) بين a و b .
$m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و m (القيمة المتوسطة). و هكذا فإن m ، القيمة المتوسطة للدالة f على $[a;b]$ هي " ارتفاع " المستطيل الذي قاعدته $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b .

تطبيق1

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-1$.

أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;2]$.

حل

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;2]$ هي العدد الحقيقي m حيث:

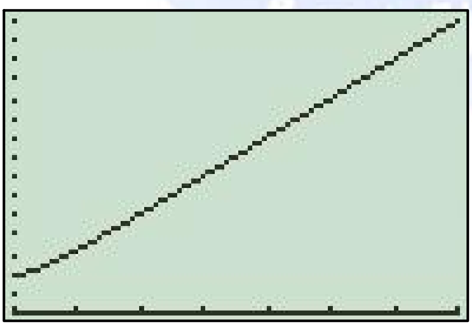
$$m=\frac{1}{2-1}\int_1^2(2x-1)\,dx=\left[x^2-x\right]_1^2=(4-2)-(1-1)=2$$

تطبيق2

ورشة تصنع أدوات يتم تجميعها وفق مجموعات تضم مائة قطعة. يتراوح الإنتاج اليومي للورشة بين 100 و 800 قطعة. نفرض أن الربح بآلاف الدنانير، بدلالة الكمية المُنْتَجَة q هو f حيث : $f(q)=2q-1+\frac{1}{q^2}$

و $1\le q\le 8$.

1. عين دالة أصلية F للدالة f على المجال $[1;8]$.



2. أُعطي التمثيل البياني لهذه الدالة على شاشة حاسبة بيانية في الشكل المقابل.

أحسب بالدينار DA الربح المتوسط B_m المحقق من أجل كل مجموعة تتكوّن من 100 قطعة.

حل

1.الدالة f مستمرة على $]0;+\infty[$ ومنه على $[1;8]$.

دالة أصلية للدالة f على $[1;8]$ هي الدالة F حيث:

$$F(q)=q^2-q-\frac{1}{q}$$

2. B_m هو القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;8]$. و منه:

$$B_m=\frac{1}{8-1}\int_1^8 f(q)\,dq=\frac{1}{7}\left[q^2-2q-\frac{1}{q}\right]_1^8=8{,}125$$

ومنه فالربح المتوسط المحقق من أجل 100 قطعة هو $8125\,DA$.

الدالة الأصلية لدالة والتي تنعدم من أجل قيمة

تعريف

f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I.

الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I والتي تنعدم من أجل a هي

الدالة $F:x\mapsto\int_a^x f(t)\,dt$.

مثال

لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$.

نرمز بالرمز F إلى الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة1

إذن حسب التعريف أعلاه F تحقق:

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x\left[t^2+\frac{1}{t^2}\right]dt$$

ومنه لدينا: $F(x)=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{1}{t}\right]_1^x=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)$

وبالتالي: $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}+\frac{2}{3}$.

تطبيق1

نعتبر الدالة F المعرفة كما يلي: $F(t)=\int_0^x \sqrt{t^4+1}\,dt$.

عين مجموعة تعريف الدالة F ثم ادرس اتجاه تغيرها.

حل

الدالة F هي الدالة الأصلية للدالة $t\mapsto\sqrt{t^4+1}$ و التي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغير.

ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F'(x)=\sqrt{x^4+1}$.

بما أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F'(x)>0$ فإن الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

تطبيق2

f هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالشكل $f(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

أ) بين أن f متزايدة على $]0;+\infty[$.

ب)عين إشارة الدالة f .

حل

أ) f هي الدالة الأصلية للدالة $t\mapsto\frac{1}{t}$ والتي تنعدم من أجل القيمة1 للمتغير

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{x}$ و $f'(x)>0$

إذن f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

ب) من أجل $x\geq 1$: $\frac{1}{t}>0$ ومنه $\int_1^x \frac{1}{t}dt\geq 0$ أي $f(x)\geq 0$

من أجل $0<x\leq 1$: $\frac{1}{t}>0$ ومنه $\int_1^x \frac{1}{t}dt\leq 0$ أي $f(x)\leq 0$

تطبيق3

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+1}{2x^2}$

1. عيّن الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$
2. عيّن الدالة الأصلية للدالة f والتي تأخذ القيمة $\frac{3}{2}$ من أجل $x=1$

حل

1. الدوال الأصلية للدالة f هي F حيث: $F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{x}+c$

وحيث أنّ $F(1)=0$ فإنّه بالتعويض نجد $\frac{1}{2}\times 1-\frac{1}{1}+c=0$ ومنه $c=\frac{1}{2}$

وبالتالي إذا رمزنا للدالة الأصلية المطلوبة بـ: G فإنّ $G(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$

2. بنفس الكيفية إذا رمزنا للدالة الأصلية المطلوبة بـ H فإنّ H تحقق

$H(1)=\frac{3}{2}$ و $H(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{x}+c$ ومنه $H(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{x}+2$.

IV. ملخص الدرس:

1. معنى التكامل

f دالة مستمرة على مجال I يشمل a و b، F دالة أصلية لـــ: f على I.

التكامل من a إلى b لـــ: f هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ حيث $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

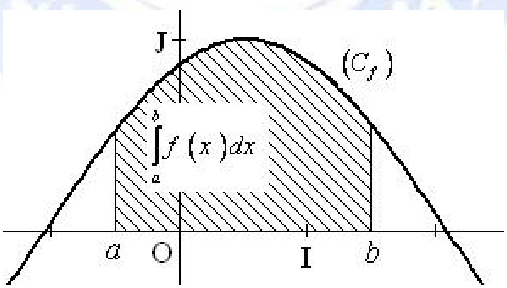
2. مساحة حيز تحت منحن

f دالة مستمرة موجبة على مجال I يشمل a و b حيث $a \leq b$.

F هي دالة أصلية لـــ: f على I.

(C_f) هو المنحني الممثل لـــ: f في معلم متعامد $(O; I, J)$

مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)\,dx$.



3. علاقة شال

f دالة مستمرة على مجال I. من أجل كل أعداد حقيقية α، β و γ من I

لدينا: $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

4. خواص التكامل

f و g دالتان مستمرتان على مجال I .

- من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

- k عدد ثابت. لكينا: $\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

حذار!! من هذا الخطأ: $\longleftarrow$ $\int_a^b f(x)\times g(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \times g(x)dx$

مثلا هذا التكامل صحيح

$$\int_a^b x^3 \times x^2\, dx = \int_a^b x^5\, dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_a^b = \frac{b^6-a^6}{6}$$

بينما التكامل التالي خاطئ

$$\int_a^b x^3\, dx \times \int_a^b x^2\, dx = \int_a^b x^3\, dx \times x^2 dx = \int_a^b x^5\, dx \left[\frac{x^6}{6}\right]_a^b = \frac{\left(b^6-a^6\right)}{6}$$ و

صوابه هو:

$$\int_a^b x^3\, dx \times \int_a^b x^2\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_a^b \times \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{\left(b^4-a^4\right)\left(b^3-a^3\right)}{12}$$

a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \le b$.

إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\ge 0$ فإن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

وإذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x)\le g(x)$ فإن

$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

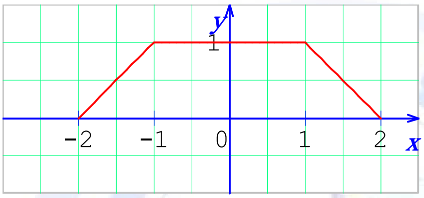
V. توظيف المعارف:

أ. تمارين

تكامل دالة

1. التمثيل البياني (C) التالي هو لدالة f معرفة على $[-2;2]$

في معلم متعامد ومتجانس.



احسب التكاملات التالية:

1) $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$ ؛

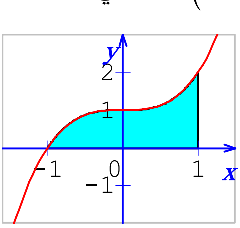
2) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ ؛ 3) $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$ ؛ 4) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

2. احسب التكاملات التالية:

1) $\int_{1}^{2} \left(x^2 + x - 2\right) dx$ 2) $\int_{-1}^{0} \left(-3x^2 + 2x\right) dx$

3) $\int_{-2}^{2} -x^3\,dx$ 4) $\int_{1}^{3} \left(x^3 + 2x + 2\right) dx$

3. يعطى التمثيل البياني (C) للدالة f في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ كما في الشكل المقابل، حيث f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x) = x^3 + 1$



1) عين إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

2) احسب بوحدة المساحة $(u.a)$ المساحة A للحيز تحت المنحني بين العددين -1 و 1.

3) احسب بـــ cm^2 هذه المساحة إذا علمت أن: $\left\|\vec{i}\right\| = 1\,cm$ و $\left\|\vec{j}\right\| = 0{,}5\,cm$.

4. احسب التكاملات التالية:

1) $\int_{1}^{2}\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)dx$ 2) $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1-t^3+t^4}{t^2}\right)dt$

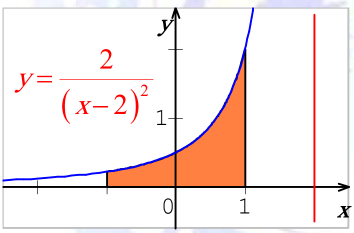
3) $\int_{0}^{1}\frac{1}{(x+1)^3}dx$ 4) $\int_{0}^{1}\frac{-2}{(x-2)^3}dx$

5. احسب التكاملات التالية:

1) $\int_{0}^{1}(x-1)^4\,dx$ 2) $\int_{1}^{2}2x(x^2-1)\,dt$

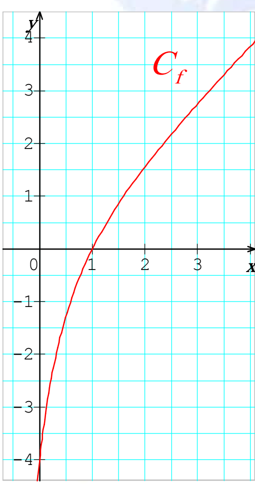
3) $\int_{0}^{1}x^2(x^3+2)\,dx$ 4) $\int_{3}^{4}\frac{x}{(x^2-2)^3}dx$

6. احسب المساحة A مساحة الحيز الملون في الشكل المقابل:



7. لتكن الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=x-\frac{4}{(x+1)^2}$

C_f تمثيلها البياني في الشكل المقابل:



1) احسب $I=\int_{1}^{3}f(x)\,dx$ و فسر بيانيا هذه النتيجة.

2) احسب $J=\int_{0}^{3}f(x)\,dx$.

8. نعتبر الدالة f المعرفة على $[2;4]$ كما

يلي: $f(x)=\dfrac{-4x-2}{(x^2+x-2)^2}$.

احسب $I=\int_2^4 f(x)\,dx$.

.9 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$f(x)=x(x^2+x-2)$. (C) هو المنحني البياني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس.

احسب المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x=-2$ ، $x=0$ ، $x=1$ ، $x=\frac{3}{2}$ و $y=0$.

خواص التكامل

.10 f و g دالتان عدديتان لمتغير حقيقي x حيث:

$$\int_0^2 f(x)\,dx=3 \quad \text{و} \quad \int_0^2 g(x)\,dx=-2$$

احسب $\int_0^2 \left[2f(x)-3g(x)\right]dx$.

.11 عين بدون حساب ،إشارة كل من التكاملات التالية:

1) $I=\int_{-3}^{-2} x^2\,dx$ ؛ 2) $J=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx$ ؛

3) $K=\int_{-6}^{1}(x^2-2x+3)\,dx$ ؛ 4) $L=\int_{-5}^{1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+1}dx$.

.12 f دالة معرفة على $[0;4]$ وتحقق: $x^2\le f(x)\le x^2+x$.

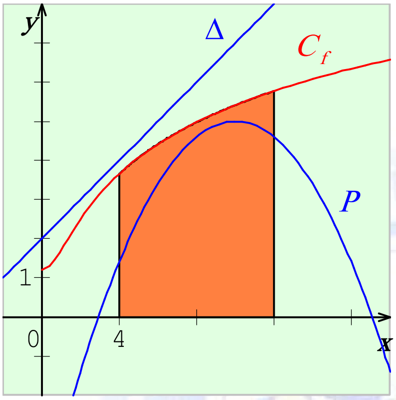
عين حصرا للتكامل $\int_0^4 f(x)\,dx$.

.13 الدالة f معرفة مستمرة على $[0;3]$ كما يلي:

من أجل $x\in[0;1]$ ، $f(x)=x^3$ و من أجل $x\in[1;3]$ ، $f(x)=x+1$

احسب $\int_0^3 f(x)\,dx$.

14. لدينا في الشكل المقابل:



- C_f منحنى الدالة f المعرّفة و المستمرة على $[0;+\infty[$.
- القطع المكافئ P الذي معادلته $y=-\frac{1}{10}x^2+2x-5$
- المستقيم Δ الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x+2$

نعتبر المساحة A ، مساحة الحيز من المستوي المعرّف بالنقط $M(x;y)$ بحيث: $4\le x\le 12$ و $0\le y\le f(x)$

استنتج حصرا للمساحة A .

القيمة المتوسطة

15. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2+1}{2x^2}$

1) احسب $\int_1^4 f(x)\,dx$.

2) استنتج القيمة المتوسطة m للدالة f على المجال $[1;4]$.

16. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2-3x$

أحسب القيمة المتوسطة m للدالة f على المجال $[-1;3]$.

17. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2$

أحسب القيمة المتوسطة m للدالة f على المجال $[-1;1]$.

فسر بيانيا النتيجة.

تمارين لتعمق

.18 نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $F(x)=\int_0^x \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{1+t^2}\,dt$

ادرس اتجاه تغير الدالة F .

.19 f دالة معرفة على $[0;1]$ كما يلي: $f(x)=\frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}$

1) احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $[0;1]$.

2) شكل جدول تغيرات f .

3) ارسم (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$

4) احسب المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=1$ و $y=0$.

.20 1) احسب التكامل $I_1=\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx$.

2) ليكن $I_2=\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx$. احسب I_1+I_2. استنتج قيمة I_2

3) عين حصرا للتكامل $I_2=\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,dx$

.21 احسب التكاملات التالية:

1) $\int_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx$ 2) $\int_{-1}^{3} |x-2|\,dx$

3) $\int_{-2}^{2}\left(|x|+x\right)dx$

22. نعتبر المتتالية (u_n) حيث $u_n=\int_{n}^{n+1}\frac{1}{(3x+4)^2}dx$.

1)احسب u_n بدلالة n .

2)احسب المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ بدلالة n .احسب $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$.

3)فسّر بيانيا S_n .

23. لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث:

$$f(x)=\frac{2x^3+3x^2+4}{x^2}$$

نرمز بالرمز (C) إلى التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x^2}$

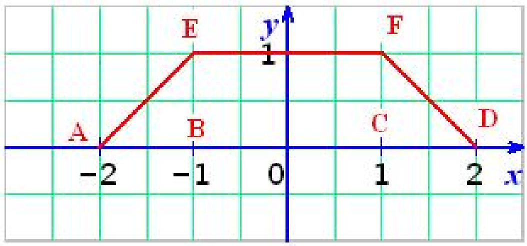
2) احسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المحدد بالمنحني (C) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=1$ و $x=\lambda$ حيث λ عدد حقيقي أكبر من 1.

عين λ إذا علمت أنّ $S(\lambda)=\lambda^2$.

ب. حلول التمارين

تكامل دالة

.1 نعتبر النقط $A(-2;0)$ ، $B(-1;0)$ ، $C(1;0)$ ، $D(2;0)$ ،
$E(-1;1)$ و $F(1;1)$.



1) الدالة f مستمرة و موجبة على المجال $[-2;2]$ إذن العدد
$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$ يعبر عن مساحة الحيز المستوي المحدد بـــ: (C) و
المستقيمات التي معادلاتها $x=-2$ ، $x=-1$ و $y=0$ أي مساحة
المثلث ABE إذن $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\times AB\times BE = \frac{1}{2}$.

2) الدالة f مستمرة و موجبة على المجال $[-1;1]$ إذن العدد
$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ يعبر عن مساحة الحيز المستوي المحدد بـــ: (C) و
المستقيمات التي معادلاتها $x=-1$ ، $x=1$ و $y=0$ أي مساحة
المستطيل $BCFE$ إذن $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = BC\times BE = 2$.

3) الدالة f مستمرة و موجبة على المجال $[1;2]$ إذن العدد $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$

يعبر عن مساحة الحيز المستوي المحدد بـــ: (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x=1$ ، $x=2$ و $y=0$ أي مساحة المثلث CDF

إذن $\int_{1}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\times CD\times CF = \frac{1}{2}$.

4) الدالة f مستمرة و موجبة على المجال $[-2;2]$ إذن العدد $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ يعبر عن مساحة الحيز المستوي المحدد بـــ: (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x=-1$ ، $x=1$ و $y=0$ أي مساحة شبه المنحرف $ADFE$ إذن $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{(AD+EF)\times EB}{2} = 3$.

لاحظ أن: $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$

2. حساب التكاملات المطلوبة

1) $\int_{1}^{2}\left(x^2+x-2\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right) = \frac{11}{6}$

2) $\int_{-1}^{0}\left(-3x^2+2x\right)dx = \left[-x^3+x^2\right]_{-1}^{0} = 0-(1+1) = -2$

3) $\int_{-2}^{2} -x^3\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2} = -\frac{1}{4}\left[x^4\right]_{-2}^{2} = -\frac{1}{4}\left(2^4-2^4\right) = 0$

4)

$$\int_{1}^{3}\left(x^3+2x+2\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4+x^2+2x\right]_1^3 = \left(\frac{3^4}{4}+3^2+6\right)-\left(\frac{1}{4}+1+2\right) = 32$$

3. 1) $f(x)\geq 0$ من أجل $x\geq -1$ و $f(x)\leq 0$ من أجل $x\leq -1$

لأن (C) فوق محور الفواصل من أجل $x \geq -1$ و تحت (C) من أجل $x \leq -1$.

2) f مستمرة و موجبة على المجال $[1;2]$ إذن:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(x^3 + 1\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_{-1}^{1} = 2\ u.a$$

3) $1\ u.a = 0,5 \times 1\ cm^2$ أي $1\ u.a = 0,5\ cm^2$ إذن $A = 2 \times 0,5\ cm^2$

أي $A = 1\ cm^2$.

.4

1) $$\int_1^2 \left(\frac{x^2 - 2}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) dx = \left[x + \frac{2}{x} \right]_1^2 = 0$$

2) $$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1 - t^3 + t^4}{t^2} \right) dt = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{t^2} - t + t^2 \right) dt = \left[-\frac{1}{t} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_{-2}^{-1} = \frac{13}{3}$$

3) $$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3} dx = \left[-\frac{1}{2(x+1)^2} \right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

4) $$\int_0^1 \frac{-2}{(x-2)^3} dx = \left[\frac{1}{(x-2)^2} \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

.5

1) $$\int_0^1 (x-1)^4\, dx = \left[\frac{(x-1)^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

2) $\int_1^2 2x\left(x^2-1\right)dt=\left[\frac{\left(x^2-1\right)^2}{2}\right]_1^2=\frac{9}{2}$ (لاحظ أن الدالة

$x \mapsto 2x\left(x^2-1\right)$ هي من الشكل $u'\times u$)

يمكن أيضا حساب التكامل كما يلي:

$$\left(\int_1^2 2x\left(x^2-1\right)dt=\int_1^2\left(2x^3-2x\right)dt=\left[\frac{x^4}{2}-x^2\right]_1^2=\frac{9}{2}\right).$$

3) $\int_0^1 x^2\left(x^3+2\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^1 3x^2\left(x^3+2\right)dx=\frac{1}{3}\left[\frac{\left(x^3+2\right)^2}{2}\right]_0^1=\frac{5}{6}$

4) $\int_3^4 \frac{x}{\left(x^2-2\right)^3}dx=\left[-\frac{1}{4\left(x^2-2\right)^2}\right]_3^4=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\left(x^2-2\right)^2}\right]_3^4=\frac{3}{784}$

.6

$$A=\int_{-1}^1 \frac{2}{\left(x-2\right)^2}dx=2\int_{-1}^1 \frac{1}{\left(x-2\right)^2}dx=\left[-\frac{1}{x-2}\right]=\frac{3}{4}$$

.7

1) $I=\int_1^3\left[x-4\frac{1}{\left(x+1\right)^2}\right]dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{4}{x+1}\right]_1^3=3$.

I يعبر عن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني C_f و المستقيمات التي معادلاتها $x=1$ ، $x=3$ و $y=0$ لأن الدالة f مستمرة و موجبة على المجال $[1;3]$.

2) $I=\int_0^3\left[x-4\frac{1}{\left(x+1\right)^2}\right]dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{4}{x+1}\right]_0^3=\frac{3}{2}$

.8

$$I=\int_{2}^{4} f(x)\,dx=-2\int_{2}^{4}\frac{2x+1}{\left(x^{2}+x-2\right)^{2}}\,dx=-2\left[-\frac{1}{x^{2}+x-2}\right]_{2}^{4}$$

أي $I=2\left[\frac{1}{x^{2}+x-2}\right]_{2}^{4}=-\frac{7}{18}$.

.9

نعين أولا إشارة $f(x)$:

x	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2+x-2	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

- $x\mapsto F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto f(x)=x^3+x^2-2x$
- في المجال $[-2;0]$ لدينا $f(x)\geq 0$ نسمي عندئذ A_1 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمستقيمات التي معادلاتها $x=-2$ ، $x=0$ ، $y=0$.

لدينا $A_1=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_{-2}^{0}=F(0)-F(-2)=\frac{8}{3}u.a$

- في المجال $[0;1]$ لدينا $f(x)\leq 0$ نسمي عندئذ A_2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=1$ ، $y=0$.

لدينا $A_2=-\int_{0}^{1} f(x)\,dx=-\left[F(x)\right]_{0}^{1}=-F(1)+F(0)=\frac{5}{12}u.a$

• في المجال $\left[1;\frac{3}{2}\right]$ لدينا $f(x)\geq 0$ نسمي عندئذ A_3 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمستقيمات التي معادلاتها $x=1$ ، $x=\frac{3}{2}$ ، $y=0$.

لدينا $A_3=\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_1^{\frac{3}{2}}=F\left(\frac{3}{2}\right)-F(1)=\frac{67}{192}u.a$.

نستنتج أن $A=A_1+A_2+A_3=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}+\frac{67}{192}=\frac{659}{192}u.a$

أي $A\simeq 3,43u.a$.

خواص التكامل

.10 $\int_0^2\left[2f(x)-3g(x)\right]dx=\int_0^2 2f(x)\,dx-\int_0^2 3g(x)\,dx$

أي $\int_0^2\left[2f(x)-3g(x)\right]dx=2\int_0^2 f(x)\,dx-3\int_0^2 g(x)\,dx$

أي $\int_0^2\left[2f(x)-3g(x)\right]dx=2\times 3-3\times(-2)=12$

.11 1)من أجل كل x من المجال $[-3;-2]$ لدينا: $x^2\geq 0$ إذن $I\geq 0$.

2) من أجل كل x من المجال $[-1;1]$ لدينا: $1-x^2\geq 0$ إذن $J\geq 0$.

3) $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$x^2-2x+3>0$ ، لدينا عندئذ $x^2-2x+3>0$ من أجل كل x من $[-6;1]$.نستنتج أن $K>0$.

4)نعيّن أولا إشارة $\frac{x^2+4x-5}{x^2+1}$:

x	$-\infty$ $\quad -5 \quad$ 1 $\quad +\infty$		
x^2+4x-5	$+$ 0	$-$ 0	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+1}$	$+$ 0	$-$ 0	$+$

من أجل كل x من المجال $[-5;1]$ لدينا: $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+1} \leq 0$ إذن $L \leq 0$.

.12 $\displaystyle\int_0^4 x^2\,dx \leq \int_0^4 f(x)\,dx \leq \int_0^4 \left(x^2+x\right)dx$

أي $\displaystyle\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^4 \leq \int_0^4 f(x)\,dx \leq \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^4$

أي $\displaystyle\frac{88}{3} \leq \int_0^4 f(x)\,dx \leq \frac{64}{3}$.

.13 $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$ (علاقة شال)

أي $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^3 (x+1)\,dx$

أي $\displaystyle\frac{25}{4} = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^3 (x+1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^3$

.14 من أجل كل x من المجال $[4;12]$ لدينا:

$$-\frac{1}{10}x^2+2x-5 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x+2$$

إذن $\int_0^4\left(-\frac{1}{10}x^2+2x-5\right)dx\le\int_0^4 f(x)dx\le\int_0^4\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx$

أي $-\frac{184}{30}\le\int_0^4 f(x)dx\le 12$.

.15 1) $\int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right]_1^4=\frac{15}{8}$.

2) $m=\frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)\,dx=\frac{1}{3}\times\frac{15}{8}=\frac{5}{8}$

.16 $m=\frac{1}{4}\int_{-1}^3 f(x)\,dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^3(2-3x)\,dx=\frac{1}{4}\left[2x-\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^3=-1$.

.17 $m=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 x^2\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1=\frac{2}{3}$

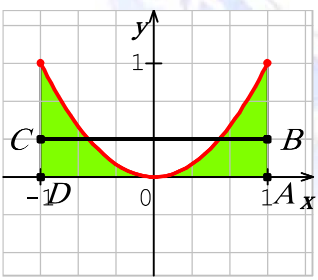
مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C)

والمستقيمات التي معادلاتها $x=-1$ ، $x=1$

و $y=0$ تساوي مساحة المستطيل $ABCD$

الذي بعداه 2 و $\frac{1}{3}$ علما أن $A(1;0)$ ،

$B\left(1;\frac{1}{3}\right)$ ، $C\left(-1;\frac{1}{3}\right)$ و $D(-1;0)$.



تمارين لتعمق

.18 F هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{1+x^2}$ حيث $F(0)=0$ ،

لدينا عندئذ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $F'(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{1+x^2}$.

بأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $F'(x)>0$ فإن F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

.19 1) حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{4\sqrt{x^2+x+1}+(4x+2)\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}}{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}$$

أي

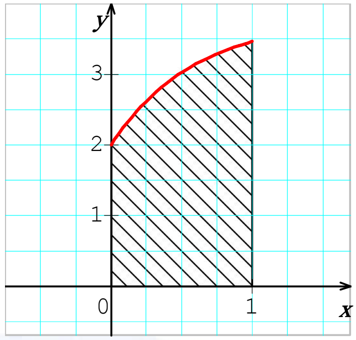
$$f'(x)=\frac{4\sqrt{x^2+x+1}+\frac{(2x+1)^2}{\sqrt{x^2+x+1}}}{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}$$

إذن من أجل كل x من المجال $[0;1]$ لدينا $f'(x)>0$.

2)جدول تغيرات f :

x	0 $\qquad\qquad$ 1
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	2 $\nearrow$ $2\sqrt{3}$

3)إنشاء (C_f)



4)حساب A :

$$A=\int_0^1\frac{2(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=2\int_0^1\frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=2\left[2\sqrt{x^2+x+1}\right]_0^1$$

أي $A=4\left[\sqrt{x^2+x+1}\right]_0^1=4\left(\sqrt{3}-1\right)u.a$.

$1u.a=1\times 2cm^2$ أي $1u.a=2cm^2$ ومنه $A=8\left(\sqrt{3}-1\right)cm^2$.

$A\simeq 5{,}86\,cm^2$.

.20 1)حساب I_1 :

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{(1+x)^2}dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)^2}\right]_0^1=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\right]_0^1=\frac{3}{16}$$

2)حساب I_1+I_2 :

$$I_1+I_2=\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}dx+\int_0^1\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\int_0^1\frac{x+x^3}{\left(1+x^2\right)^3}dx$$

أي $$I_1+I_2=\int_0^1\frac{x\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}dx=\int_0^1\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

أي $I_1+I_2=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+x^2}\right]_0^1=\frac{1}{4}$.

استنتاج I_2 :

$I_1 + I_2 = \frac{1}{4}$ و $I_1 = \frac{3}{16}$ إذن $I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{1}{16}$

3) من أجل كل x من $[0;1]$ لدينا $0 \le x^2 \le 1$ و $1 \le 1 + x^2 \le 2$ إذن

$1 \le (1+x^2)^3 \le 8$ و منه $\frac{1}{8} \le \frac{1}{(1+x^2)^3} \le 1$ و $\frac{x^2}{8} \le \frac{x^2}{(1+x^2)^3} \le x^2$.

نستنتج: $\int_0^1 \frac{x^2}{8}\,dx \le \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,dx \le \int_0^1 x^2\,dx$

أي $\left[\frac{x^3}{24}\right]_0^1 \le \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,dx \le \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$ أي $\frac{1}{24} \le \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,dx \le \frac{1}{3}$

.21 1) نكتب $|x^2 - 1|$ بدون رمز القيمة المطلقة:

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad -1$	1	$2 \quad +\infty$
$\lvert x^2-1\rvert$	x^2-1	$1-x^2$	x^2-1

$$\int_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx = \int_{-2}^{-1} (x^2-1)\,dx + \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx + \int_{1}^{2} (x^2-1)\,dx$$

$$\int_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2} = 4$$

2) $|x-2|$ بدون رمز القيمة المطلقة:

x	$-\infty \quad -1 \quad 2$	$3 \quad +\infty$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$x-2$

$$\int_{-1}^{3} |x-2|\,dx = \int_{-1}^{2} (-x+2)\,dx + \int_{2}^{3} (x-2)\,dx$$

$$\int_{-1}^{3}|x-2|\,dx=\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{3}=5$$

3) $|x|+x$ بدون رمز القيمة المطلقة:

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad 0$	$2 \quad +\infty$
$\lvert x\rvert+x$	0	$2x$

$$\int_{-2}^{2}(|x|+x)\,dx=\int_{-2}^{0}0\,dx+\int_{0}^{2}2x\,dx=0+\left[x^2\right]_0^2=4$$

.22

(1

- تذكر أن بصفة عامة $\int_a^b k\,f(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$ ، k ثابت.

إذن $\frac{1}{3}\int_n^{n+1}\frac{3}{(3x+4)^2}dx$ $u_n=\int_n^{n+1}\frac{1}{3}\times\frac{3}{(3x+4)^2}dx=$.

- تذكر أيضا أن $x\mapsto -\frac{1}{u(x)}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$.

إذن $u_n=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3x+4}\right]_n^{n+1}$ أي $u_n=\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{3(n+1)+4}\right)-\left(-\frac{1}{3n+4}\right)\right]$

أي $u_n=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3n+7}+\frac{1}{3n+4}\right)$ أي $u_n=\frac{1}{(3n+7)(3n+4)}$.

2) $S_n=\int_0^1\frac{1}{(3x+4)^2}dx+\int_1^2\frac{1}{(3x+4)^2}dx+\ldots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{(3x+4)^2}dx$

وباستعمال علاقة شال نجد: $S_n=\int_0^n\frac{1}{(3x+4)^2}dx$

إذن

$$S_n=\frac{1}{3}\int_0^n\frac{3}{(3x+4)^2}dx=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3x+4}\right]_0^n=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3n+4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{n}{3n+4}$$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{3n}\right)=\frac{1}{3}$.

3) لدينا $S_n=\int_0^n\frac{1}{(3x+4)^2}dx$ و $n\geq 0$

ولدينا من أجل كل x ينتمي إلى $[0;n]$ ، $\frac{1}{(3x+4)^2}>0$

إذن S_n يعبر عن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني الذي يمثل الدالة $x\mapsto\frac{1}{3x+4}$ و المستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=n$ و $y=0$.

.23

1)عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x^2}$.

$$f(x)=\frac{2x^3+3x^2+4}{x^2}=\frac{2x^3}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}=2x+3+\frac{4}{x^2}$$

إذن: $(a;b;c)=(2;3;4)$.

.2

●حساب المساحة $S(\lambda)$:

$$S(\lambda)=\int_1^\lambda f(x)dx=\int_1^\lambda\left(2x+3+\frac{4}{x^2}\right)dx$$

$$S(\lambda)=\left[x^2+3x-\frac{4}{x}\right]_1^{\lambda}=\left[\lambda^2+3\lambda-\frac{4}{\lambda}\right]-\left[1^2+3-\frac{4}{1}\right]$$

أي $S(\lambda)=\left(\lambda^2+3\lambda-\frac{4}{\lambda}\right)u.a$

•تعيين λ حتى يكون $S(\lambda)=\lambda^2$:

$S(\lambda)=\lambda^2$ معناه $\lambda^2+3\lambda-\frac{4}{\lambda}=\lambda^2$ أي $3\lambda=\frac{4}{\lambda}$ أي $\lambda^2=\frac{4}{3}$

و بالتالي $\left(\lambda=-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ أو $\left(\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

إذن: $\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}$ لأن λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1.

VI.تقويم ذاتي:

أ.اختيار من متعدد

.1 $\int_{1}^{2} \frac{3}{x^4}\,dx = \dots$

1) $-\frac{9}{8}$ 2) $\frac{7}{8}$ 3) $\frac{9}{8}$

.2

لتكن f دالة مستمرة على مجال I يشمل الأعداد الحقيقية a ، b و c.

إجابة واحدة على الأقل صحيحة من بين الأجوبة المقترحة، عيّنها.

1) $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx$.

2) $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{c}^{b} f(x)\,dx - \int_{a}^{c} (-f(x))\,dx$

3) $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{c}^{b} f(x)\,dx - \int_{c}^{a} f(x)\,dx$

.3

لتكن M القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[a;b]$

إجابة واحدة على الأقل صحيحة من بين الأجوبة المقترحة، عيّنها.

1) $M = \int_{a}^{b} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,dx$ 2) $M = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$

3) $M = \frac{1}{a-b}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ 4) $M = \int_{a}^{b} \frac{f(x)}{b-a}\,dx$

ب.صحيح أم خاطئ

اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير الجواب.

1) F دالة أصلية للدالة f على $[a;b]$، لدينا $\int_0^x 4t\,dt = 2x^2$.

2) $\int_1^x \left(t^3+t\right)\,dt = \dfrac{x^4+2x^2-3}{4}$.

3) $\int_{-1}^{0} \left(x^2+x-2\right)\,dx \geq 0$

4) التكامل $\int_1^2 \left(-x^2-1\right)\,dx$ يمثل مساحة.

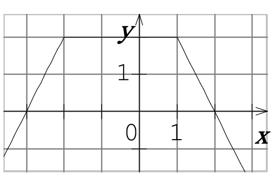
5) f دالة معرفة و تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}$، لدينا:

$$\left(\int_1^2 f(x)\,dx\right)\left(\int_2^3 f(x)\,dx\right) = \int_1^3 f(x)\,dx$$

6) f دالة معرفة و تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}$، لدينا:

$$\int_0^2 -f(x)\,dx = \int_2^0 f(x)\,dx$$

7) إذا كان $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ عدد حقيقي موجب فإن الدالة f موجبة على المجال $[-1;1]$.

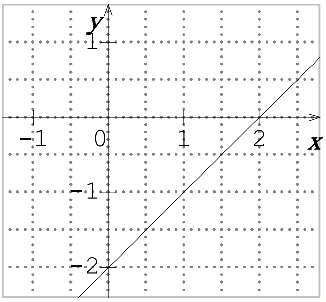


8) f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ و (C) هو تمثيلها البياني في الشكل المقابل.

$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = 8$.

9) التكامل $\int_9^2 \left(x^2+1\right)dx$ يمثل مساحة.

10) f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ و (C) هو تمثيلها البياني في الشكل التالي.



$$\int_0^2 f(x)\,dx = 2 \cdot$$

أ.أجوبة اختيار من متعدد

.1

- تمنح 2 نقطة لكل جواب صحيح.
- تنقص 1 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.
- لا تضاف ولا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة

الإجابة الصحيحة هي **1)** لأن:

$$\int_1^2 \frac{3}{x^4}\,dx = \int_1^2 3x^{-4}\,dx = \left[3\frac{x^{-4+1}}{-4+1}\right]_1^2 = \left[3\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{x^3}\right]_1^2 = -\frac{1}{8}-1 = -\frac{9}{8}$$

.2

- تمنح 2 نقطة لكل جواب صحيح.
- تنقص 1 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.
- لا تضاف ولا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة

الإجابة1) **صحيحة** (علاقة شال).

الإجابة2) **صحيحة** لأن:

$$\int_c^b f(x)\,dx - \int_a^c \left(-f(x)\right)dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c \left(f(x)\right)dx$$

أي $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (علاقة شال).

الإجابة3) **صحيحة** لأن: $-\int_c^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

ومنه $\int_c^b f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$

وحيث أنّ $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

فإننا نستنتج أنّ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx$

.3

- تمنح 2 نقطة لكل جواب صحيح.
- تنقص 1 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.
- لا تضاف ولا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة

الإجابة1) **صحيحة** (انظر التعريف).

الإجابة4) **صحيحة لأن** $\int_a^b f(x)\,dx \frac{1}{b-a} = \int_a^b \frac{f(x)}{b-a}\,dx = M$.

ب.أجوبة صحيح أم خاطئ

- تمنح 2 نقطة لكل جواب صحيح.
- تنقص 1 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.
- لا تضاف و لا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة

1)**خاطئ** لأن : $\int_0^x 4t\,dt = \int_0^x 2\times 2t\,dt = 2\int_0^x 2t\,dt = 2\left[t^2\right]_0^x = 2x^2$.

2)**صحيح** لأن: $\int_1^x (t^3+t)\,dt = \left[\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}\right]_1^x = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$

أي $\frac{x^4+2x^2-3}{4} = \frac{x^4+2x^2-1-2}{4} = \int_1^x \left(t^3+t\right)dt$.

3) **خاطئ** لأن : $x^2+x-2=0$ ينعدم من أجل $x=1$ و $x=-2$
$x^2+x-2 \geq 0$ من أجل $x \in \left]-\infty;-2\right] \cup \left[1;+\infty\right[$
$x^2+x-2 \leq 0$ من أجل $x \in [-2;1]$
نستنتج أن من أجل كل x من $[-1;0]$ لدينا $x^2+x-2 \leq 0$ و منه
$\int_{-1}^{0} \left(x^2+x-2\right) dx \leq 0$.

4) **خاطئ** لأن : من أجل كل x من $[1;2]$ لدينا $-x^2-1<0$ و منه
$\int_{1}^{2} \left(-x^2-1\right) dx$.

تذكير: $\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل مساحة عندما يكون $a \leq b$ و f مستمرة و موجبة على $[a;b]$.

5) **خاطئ** لأن : مثال مضاد
$\int_1^2 2x\,dx \int_2^3 2x\,dx = \left[x^2\right]_1^2 \times \left[x^2\right]_2^3 = (4-1)\times(9-4) = 15$
و $\int_1^3 2x\,dx = \left[x^2\right]_1^3 = 9-1 = 8$.
لا حظ: $\int_1^3 2x\,dx = \int_1^2 2x\,dx + \int_2^3 2x\,dx$ (علاقة شال).

6) **صحيح** لأن: $\int_0^2 -f(x)\,dx = -\int_0^2 f(x)\,dx = \int_2^0$
و $\int_0^2 f(x)\,dx = -\int_2^0 f(x)\,dx$.

7) **خاطئ** لأن : مثال مضاد
$\int_{-1}^{1} (2x+3)\,dx = \left[x^2+3x\right]_{-1}^{1} = (1+3)-(1-3) = 6$

$\int_{-1}^{1}(2x+3)dx$ عدد موجب لكن يمكن أن يكون $0 \leq (2x+3)$ من أجل $x \in [-1;1]$.

8) **صحيح** لأن: الدالة f مستمرة و موجبة على المجال $[-3;2]$ العدد الموجب $\int_{-3}^{2} f(x)dx$ يمثل مساحة شبه المنحرف $ABCD$ علما أن $A(-3;2)$ ، $B(2;0)$ ، $C(1;2)$ ، $D(-2;2)$.

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx = \frac{(AB+DC)\times CH}{2}$$

$H(1;2)$ هي المسقط العمودي لــ: C على (AB) إذن $\int_{-3}^{2} f(x)dx = \frac{(5+3)\times 2}{2} = 8$.

9) **خاطئ** لأن : $2<9$. $\int_{9}^{2}(x^2+1)\,dx = -\int_{2}^{9}(x^2+1)\,dx$ و x^2+1 عدد موجب لأن (x^2+1) عدد موجب من أجل كل x من $\mathbb{R}$ وخاصة من أجل $x \in [2;9]$.

10) **خاطئ** لأن : من أجل كل x من $[0;2]$ لدينا $f(x) \leq 0$.

IV. استعد للبكالوريا:

مسألة ——————————————— **(10 نقط)**

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـــ: $f(x)=\dfrac{-x^3-2x^2-x-4}{(x+1)^2}$

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1: $f(x)=ax+\dfrac{b}{(x+1)^2}$

2) أ) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

ب) بين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$f'(x)=\frac{(-x+1)(x^2+4x+7)}{(x+1)^3}$$

ج)ادرس إشارة $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات f.

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث $-2{,}5<\alpha<-2$.

4) بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=-x$ مقارب للمنحني (C) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

5) أرسم D و المنحني (C) الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$، الوحدة: $2cm$ على محور الفواصل و $1cm$ على محور التراتيب.

6) أ) احسب ، بوحدة المساحات ، المساحة $S(\alpha)$ لحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) ، المستقيم D الذين معادلتاهما $x=-2$ و $x=\alpha$.

ب) تحقق من النقطتين $A(-3;2)$ و $B(-2;-2)$ تنتميان إلى المنحني (C).

ج) احسب بـــ cm^2 المساحة S لحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و القطعة $[AB]$.

سلم التنقيط

الأسئلة	توزيع النقاط
.1	تعيين a و b 1
.2	أ) النهايات.......................................$0,25\times4$ ب)حساب $f'(x)$ .... $0,5+0,5$ جـ)إشارة $f'(x)$ و جدول تغيرات f ..... $0,5+0,5$
.3	المعادلة $f(x)=0$ .... $0,75$
.4	المستقيم المقارب المائل........................... $0,5$
.5	رسم (C) و (D)............................... $0,25+1$
.6	أ)حساب $S(\alpha)$ .... $0,5+1$ ب)A و B نقطتان من (C)..................... $0,5$ جـ) حساب S .... $0,5+1$

حل مفصل

1) تعيين a و b يستوجب توحيد المقامات في: $f(x)=ax+\frac{b}{(x+1)^2}$

ثم تطبيق تساوي كثيرات الحدود.

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=\frac{ax(x+1)^2+b}{(x+1)^2}$

أي $f(x)=\frac{ax^3+2ax^2+ax+b}{(x+1)^2}$

و بماأن من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=\frac{-x^3-2x^2-x-4}{(x+1)^2}$

فإن $\begin{cases} a=-1 \\ 2a=-2 \\ a=-1 \\ b=-4 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=-1 \\ b=-4 \end{cases}$ إذن $f(x)=-x-\frac{4}{(x+1)^2}$

2)

أ) مجموعة تعريف f هي : $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ز

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x)=-\infty$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1}(-x^3-2x^2-x-4)=-4 \\ \lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1}(x+1)^2=0^+ \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} f(x)=-\infty$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1}(-x^3-2x^2-x-4)=-4 \\ \lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1}(x+1)^2=0^+ \end{cases}$

ب) من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=-x-\frac{4}{(x+1)^2}$

تذكر أن مشتقة الدالة u^2 هي الدالة $2u'u$ و مشتقة $\frac{1}{u}$ هي $-\frac{u'}{u^2}$.

مشتقة الدالة $x \mapsto (x+1)^2$ هي الدالة $x \mapsto 2(x+1)$

مشتقة الدالة $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{-2(x+1)}{(x+1)^4}$

و $\frac{-2}{(x+1)^3}=\frac{-2(x+1)}{(x+1)^4}$.

نستنتج : $f'(x)=-1+\frac{8}{(x+1)^3}$ أي $f'(x)=\frac{8-(x+1)^3}{(x+1)^3}$.

لاحظ: $f'(x)=\frac{2^3-(x+1)^3}{(x+1)^3}$ و تذكر أن $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

إذن $f'(x)=\frac{[2-(x+1)][2^2+2(x+1)+(x+1)^2]}{(x+1)^3}$

أي $f'(x)=\frac{(-x+1)(x^2+4x+7)}{(x+1)^3}$

ج) إشارة $f'(x)$

المميز Δ لـــ: x^2+4x+7 سالب و معامل x^2 موجب $(\Delta<0)$إذن x^2+4x+7 عدد موجب.

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(-x+1)(x+1)^3$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$-x+1$	$+$		$+$	0	$-$
$(x+1)^3$	$-$	0	$+$		$+$
$(-x+1)(x+1)^3$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

• جدول تغيرات f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

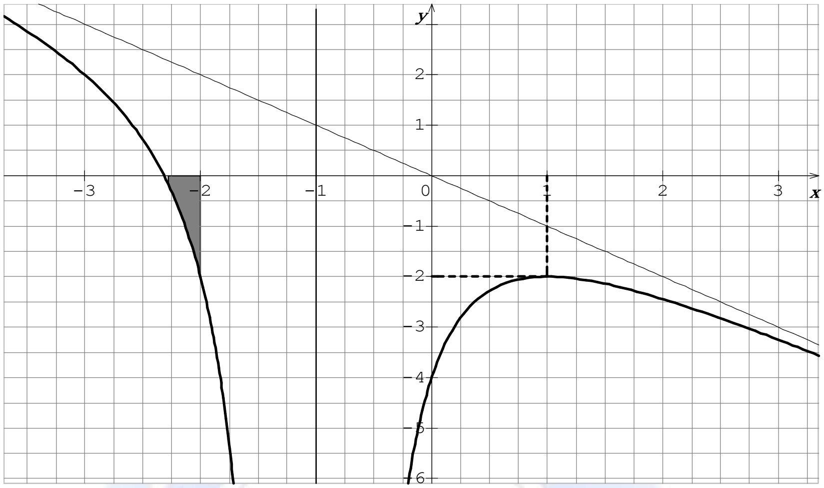
3) f مستمرة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ إذن على $[-2,5;-2]$ لأنها دالة ناطقة و $f(-2,5)\times f(-2)<0$ لأن $f(-2)=-2$ و $f(-2,5)=7,22...$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا α في $[-2,5;-2]$.

بمأن f متناقصة تماما على $[-2,5;-2]$ فإن هذا الحل α وحيد في $[-2,5;-2]$.

4) لدينا
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{-4}{(x+1)^2}\right]=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-4}{(x+1)^2}\right]=0 \end{cases}$$
إذن المستقيم D الذي معادلته $y=-x$ مقارب للمنحني (C) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

لدينا كذلك $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$ إذن (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=-1$.



6) أ)

$$S(\alpha)=\int_{\alpha}^{-2} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{-2}\left[-x-\frac{4}{(x+1)^2}\right]dx=\left[-\frac{x^2}{2}+\frac{4}{x+1}\right]_{\alpha}^{-2}$$

أي $S(\alpha)=\left(-6+\frac{\alpha^2}{2}-\frac{4}{\alpha+1}\right)u.a$.

وحدة المساحات هي $2cm^2$ أي $1u.a=2cm^2$ إذن

$S(\alpha)=\left(-6+\frac{\alpha^2}{2}-\frac{4}{\alpha+1}\right)\times 2\,cm^2$ أي $S(\alpha)=\left(\alpha^2-\frac{8}{\alpha+1}-12\right)cm^2$.

ب) لدينا $f(-3)=2$ إذن $A(-3;2)$ تنتمي إلى (C) و $f(-2)=-2$

إذن $B(-2;-2)$ تنتمي إلى (C).

ج) لنحسب المساحة S

- لنعين معادلة (AB):

لدينا $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ علما أن $\begin{cases}x_A=-3\\ y_A=2\end{cases}$ و $\begin{cases}x_B=-2\\ y_B=-2\end{cases}$.

معامل توجيه (AB) هو -4 $a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-2-2}{-2+3}=-4$.

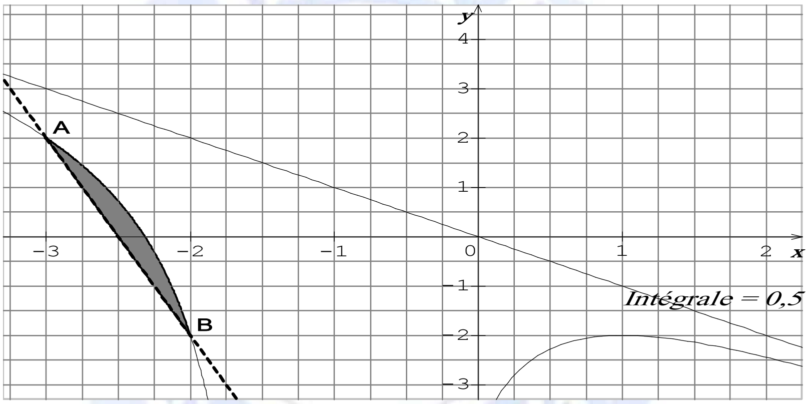
$A\in(AB)$ إذن معادلة (AB) هي $y-y_A=a(x-x_A)$ أي

$y-2=-4(x+3)$ أي $y=-4x-10$.

- لنحسب S :

في المجال $[-3;-2]$ المنحني (C) يقع فوق المستقيم (AB) إذن

$S=\int_{-3}^{-2}\left[f(x)-(-4x-10)\right]dx$ **(انظر الشكل)**



$$S=\int_{-3}^{-2}\left[-x-\frac{4}{(x+1)^2}+4x+10\right]dx=\int_{-3}^{-2}\left(3x+10-\frac{4}{(x+1)^2}\right)dx$$

أي $S=\left[\dfrac{3x^2}{2}+10x+\dfrac{4}{(x+1)^2}\right]_{-3}^{-2}=0,5\ u.a$ أي $S=1cm^2$.

