4. المشتقات والدوال الأصلية

الكفاءات المستهدفة

- دراسة اتجاه تغير دالة
- حساب مشتقة دالة مركبة.
- تعريف دالة أصلية لدالة على مجال.
- تعيين مجموعة الدوال الأصلية لدالة على مجال.
- تعيين دالة أصلية لدالة تحقق شرطا معينا و تفسير ذلك بيانيا.

تصميم الدرس

تعريف

I. العدد المشتق ـ الدالة المشتقة

II. المشتقة واتجاه التغير

III. اشتقاق دالة مركبة

IV. الدوال الأصلية لدالة على مجال

V. ملخص الدرس

VI. توظيف المعارف (تمارين + حلول وإرشادات)

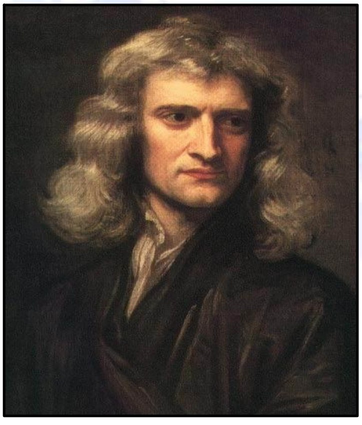
VII. تقويم ذاتي (اختيار من متعدد + صحيح أم خاطئ)

VIII. استعد للبكالوريا (مسائل محلولة مع سلّم التنقيط)

تعريف:

يستعمل مفهوم الدوال الأصلية في المجال الاقتصادي بحيث يتم تعيين الكلفة الإجمالية $C(q)$ لإنتاج معين باستعمال دالة أصلية للدالة الكلفة الهامشية $C_m(q)$ مما يسمح بتعيين الكلفة المتوسطة $C_M(q)$ للإنتاج.
" لكي يكون منتوج مؤسسة مربحا يجب أن لا تكون الكلفة المتوسطة لإنتاجه أكبر من ثمن بيعه ".
يعتبر الانجليزي إسحاق نيوتن والألماني قوتفريد ولالم ليبنز مكتشفي الحساب التفاضلي والتكاملي.
توصل نيوتن إلى مفهومي المشتقة والدالة الأصلية (العملية العكسية لحساب المشتقة) عن طريق علم الحركة. فهو يعتبر المشتقة هي" سرعة " ودالة أصلية هي " مسافة ".
بالعكس من ذلك فقد توصل ليبنز إلى اكتشافاته بواسطة الهندسة واختيار ترميزا مناسبا.
إن هذا الاكتشاف المزدوج خلق بين الرجلين وبين مدرستيهما صراعا حول الأولوية.

ولالم ليبنز
1646 م – 1716 م

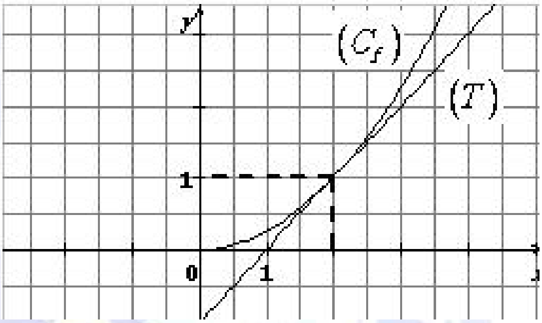


إسحاق نيوتن
1642 م – 1727 م

I. العدد المشتق ـــ الدالة المشتقة:

نشاط 1 (يهدف هذا النشاط إلى التذكير بالمعنى البياني للعدد المشتق)

(T) مماس المنحنى (C_f) الممثل لدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.



1) أحسب الأعداد المشتقة التالية: $(f)'(2)$، $\left(\frac{1}{f}\right)'(2)$، $\left(\frac{3}{f}\right)'(2)$.

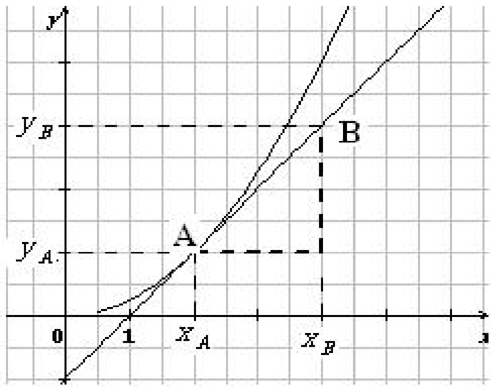
2) g هي الدالة المعرفة على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـــ: $g(x)=f(3x-1)$

احسب $g'(1)$.

حل

(1

- $(f)'(2)$ هو معامل توجيه المماس (T) للمنحني (C_f) في نقطته التي فاصلتها2. لاحظ في الشكل التالي أن $(f)'(2)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-1}{4-2}=1$.



- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$ إذن $\left(\frac{1}{f}\right)'(2) = -\frac{f'(2)}{f^2(2)} = -\frac{1}{1} = -1$

(لاحظ في الشكل السابق أن $f(2)=1$).

- $\left(\frac{3}{f}\right)' = -\frac{3f'}{f^2}$ إذن $\left(\frac{3}{f}\right)'(2) = -\frac{3f'(2)}{f^2(2)} = -\frac{3}{1} = -3$.

1) لدينا $g'(x) = 3f'(3x-1)$ إذن $g'(1) = 3f'(2) = 3\times 1 = 3$.

نشاط2 (يهدف هذا النشاط إلى إعطاء معنى الاقتصادي للمشتقة)

$C(q)$ هي الكلفة الإجمالية (بالدنانير) لإنتاج كمية قدرها q (بالأطنان) معرفة على المجال $[0;10]$ بـــ: $C(q) = q^3 - 14q^2 + 80q$

الكلفة المتوسطة لإنتاج وحدة q هي: $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$.

الكلفة الهامشية للإنتاج هي تزايد الكلفة الناتج عن صنع وحدة إضافية.

في الاقتصاد نضع $C_m(q) = C'(q)$ حيث C' هي الدالة المشتقة للدالة الكلفة الإجمالية C.

1) احسب الكلفة المتوسطة $C_M(q)$ و الكلفة الهامشية $C_m(q)$.

2) أنجز جدول تغيرات الدالة $C_M(q)$ على المجال $[0;10]$.

3)تحقق أنه عندما تكون الكلفة المتوسطة $C_M(q)$ أصغر ما يمكن، تكون الكلفة المتوسطة $C_M(q)$ تساوي الكلفة الهامشية $C_m(q)$.

حل

1) $C_M(q)=q^2-14q+80$ و $C_m(q)=C'(q)=3q^2-28q+80$.

2) لدينا $C'_M(q)=2q-14=2(q-7)$

إشارة $C'_M(q)$ هي إشارة $q-7$.

q	0		7		10
$C'_M(q)$		$-$	0	$+$	
$C_M(q)$	80	↘	31	↗	40

3) تأخذ الكلفة المتوسطة قيمة صغرى من أجل $x=7$ و هي الكلفة المقدرة بمبلغ 31 دينارا على الكيلوغرام الواحد أو 31000 دينار الى الطن الواحد من المنتوج. في هذه الحالة الكلفة الهامشية هي $C_m(7)=31$ أي 31 دينارا على الكيلوغرام الواحد أو 31000 دينار إلى الطن الواحد من المنتوج.

إذن عندما تكون الكلفة المتوسطة $C_M(q)$ أصغر ما يمكن، تكون الكلفة المتوسطة $C_M(q)$ تساوي الكلفة الهامشية $C_m(q)$.

العدد المشتق ــ الدالة المشتقة

تعريف

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a و $a+h$ عنصران من I مع $h \neq 0$.

القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه لما يؤول h إلى 0 تؤول النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ إلى عدد حقيقي نرمز له بالرمز $f'(a)$

ويسمى العدد المشتق للدالة f عند a.

ملاحظة

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و تسمى الدالة $f':x \mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f.

تفسير بياني ــ تفسير اقتصادي

- **تفسير بياني**

إذا قبلت f الاشتقاق عند a فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل عند النقطة $A(a\,;\,f(a))$ مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته:

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

- **تفسير اقتصادي**

الكلفة الهامشية للإنتاج هي تزايد الكلفة الناتج عن صنع وحدة إضافية.

تعطى الكلفة الهامشية بالعلاقة:

$C_m(q)=C(q+1)-C(q)$ حيث C هي الدالة " الكلفة الإجمالية "

نلاحظ أن $C'(q)$ هو تقريب جيد لـِـ $C_m(q)$. في الاقتصاد نضع

$C_m(q)=C'(q)$ حيث C' هي الدالة المشتقة للدالة الكلفة الإجمالية C.

قواعد الاشتقاق ــ العمليات على المشتقات

- **قواعد الاشتقاق**

$f(x)$	a	x	x^n $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
مجالات قابلية الاشتقاق	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$]0;+\infty[$

- **العمليات على المشتقات**

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	الدالة v لا تنعدم على I $-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

تطبيق1

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=x^2+x$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني. (Δ) مماس (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة (-2).

عين معادلة لـِ (Δ).

حل

طريقة: لإيجاد معادلة (Δ) مماس (C_f) عند النقطة $A(a;f(a))$ يمكن تطبيق دستور المماس في الحالة العامة كما يمكن تعيين معامل التوجيه $f'(a)$ ثم حساب الترتيب عند المبدأ باستعمال الإحداثيات $(a;f(a))$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=2x+1$

و منه $f'(-2)=-3$ إذن معادلة (Δ) هي من الشكل $y=-3x+b$

و بما أن النقطة $A(-2;2)$ تنتمي إلى (Δ) فإن $2=-3(-2)+b$

و منه $b=-4$. معادلة (Δ) هي إذن: $y=-3x-4$.

كان بالإمكان تطبيق الدستور: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ مع $a=-2$.

تطبيق2

الكلفة الإجمالية لصنع كمية q من منتوج و المقدرة بـِ DA معطاة بـِ:

$$C(q)=\frac{1}{3}q^3-5q^2+30q+10 \quad \text{مع} \quad 0\le q\le 30$$

كما أن ثمن بيع وحدة q هو $105\,DA$.

1. عين C_m الدالة " الكلفة الهامشية " .

2.ما هي الكمية المنتجة q التي تكون من أجلها الكلفة الهامشية مساوية لـِ $105\,DA$.

3.أعط تفسيرا بيانيا لنتيجة السؤال 2.

حل

1.من اجل كل q من $[0;30]$ لدينا: $C_m(q)=C'(q)=q^2-10q+30$

2. $C_m(q)=105$ تعني $q^2-10q+30=105$ أي $q^2-10q-75=0$

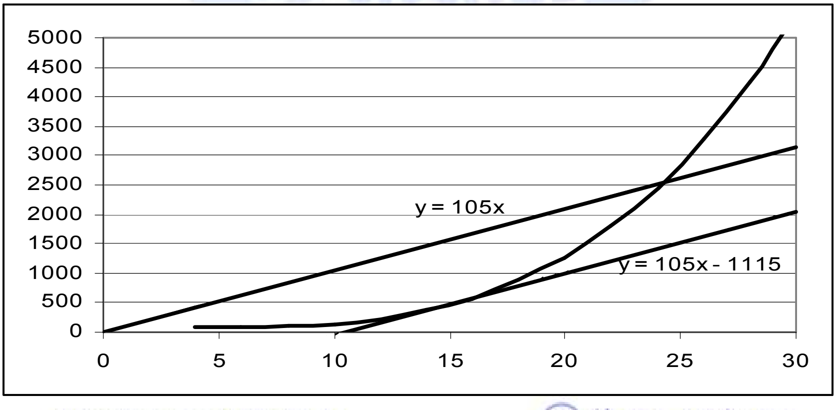
تقبل هذه المعادلة حلين هما على التوالي -5 و 15 و بما أن q عنصر من $[0;30]$ فإن $q=15$.

تكون الكلفة الهامشية مساوية لثمن بيع وحدة q من أجل إنتاج 15 وحدة.

3.دالة الدخل الإجمالي هي الدالة R المعرفة على $[0;30]$ بـِ

$$R(q)=105q$$

نتيجة السؤال2 تعني أن $C'(q)=15$ و يفسر ذلك بيانيا بأن مماس المنحني الممثل للدالة " الكلفة الإجمالية " عند النقطة التي فاصلتها 15 يكون موازيا للمستقيم الممثل للدالة R.



II. المشتقة و اتجاه التغير:

مبرهنة (تقبل دون برهان)

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ ما عدا من أجل عدد محدود من القيم التي من الممكن أن تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماما على I.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)<0$ ما عدا من أجل عدد محدود من القيم التي من الممكن أن تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متناقصة تماما على I.

*إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-3$

f دالة كثير حدود فهي إذن قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x)=12x^3-24x^2+12x$$

بعد التحليل نجد أن: $f'(x)=12x(x-1)^2$

من أجل $x\in]-\infty;0]$ ، $f'(x)<0$ و من أجل $x\in[0;+\infty[$ ، $f'(x)>0$

بالإضافة إلى ما سبق لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	-2	↗	$+\infty$

القيم الحدية المحلية

تعاريف

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I .

*القول أن $f\left(x_0\right)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f\left(x\right) \leq f\left(x_0\right)$.

*القول أن $f\left(x_0\right)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J ، $f\left(x\right) \geq f\left(x_0\right)$.

*القول أن $f\left(x_0\right)$ قيمة حدية محلية لـِ f يعني أن $f\left(x_0\right)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.

مثال

نعتبر نفس معطيات المثال السابق.

* نلاحظ من جدول تغيرات الدالة f أن $f\left(0\right)=-3$ هي قيمة حدية محلية صغرى لـِ f لأنه يوجد على الأقل مجال مفتوح(مثلا $]-1;+1[$)

محتوى في $\mathbb{R}$ و يشمل 0 بحيث من أجل كل x من المجال $]-1;+1[$ ،
لدينا $f(x) \geq f(0)$.

* $f(1)=-2$ ليس قيمة حدية للدالة f .

تطبيق1

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$.

أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

حل

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{\left(x^2+3\right)^2}$.

بما أن $0<\left(x^2+1\right)^2$ فإن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $-x^2-2x+3$ الذي يقبل جذرين هما 1 و -3.

إذن f متناقصة تماما على كل من $]-\infty;-3]$ و $[1;+\infty[$

و f متزايدة تماما على المجال $[-3;1]$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

لاحظ أن $f(1)=\dfrac{1}{2}$ و $f(-3)=-\dfrac{1}{2}$

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

تطبيق2

يعطى الربح بـِـ DA المحقق من قبل أحد المصانع بعد بيع كمية q من منتوج بالعلاقة: $B(q)=-0,1q^2+200q-25000$ **حيث** $0\le q\le 1500$

أدرس تغيرات الدالة B على المجال $[0;1500]$ ثم استنتج أكبر ربح يمكن تحقيقه من طرف المصنع محددا في هذه الحالة الكمية q المباعة.

حل

لدينا من أجل كل q من $[0;1500]$، $B'(q)=-0,2q+200$ و لدينا: $B'(q)=0$ من أجل $q=1000$ و منه جدول إشارة $B'(q)$

q	0		1000		1500
$B'(q)$		$+$	0	$-$	

نستنتج أن الدالة B متزايدة تماما على $[0;1000]$ و متناقصة تماما على $[1000;1500]$ و بالتالي فهي تقبل قيمة حدية عظمى من أجل $q=1000$. لدينا $B(1000)=75000$ إذن أكبر ربح يمكن تحقيقه هو $75000\,DA$ بعد بيع 1000 وحدة.

III. اشتقاق دالة مركبة:

نشاط

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x^2$ و $g(x)=5x+7$.

احسب مشتقة الدالة $f\circ g$.

حل

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]=f(19x+37)=(19x+37)^2$$

إذن $(f\circ g)'(x)=2(19x+37)$.

لاحظ: $(f\circ g)'(x)=g'(x)\times f'(19x+37)$.

مشتقة الدالة $v\circ u$

مبرهنة (تقبل دون برهان)

إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإنّ الدالة $v\circ u$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا:

$$(v\circ u)'(x)=v'\left[u(x)\right]\times u'(x)$$

مثال

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=2\left(x^2+1\right)^3-3$

نلاحظ أن $f=v\circ u$ حيث $u:x\mapsto x^2+1$ و $v:x\mapsto 2x^3-3$ و منه

$f'(x)=v'\left(x^2+1\right)\times u'(x)$. $f'(x)=6\left(x^2+1\right)^2\times 2x=12x\left(x^2+1\right)^2$

• مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وكانت موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا:

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

مثال

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x) = \sqrt{x^2+2}$

نلاحظ أن $f = \sqrt{u}$ مع $u(x) = x^2+2$. و بما أن u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $u(x) > 0$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

• مشتقة الدالة $x \mapsto [u(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 2$)

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة u^n تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $\left(u^n\right)' = n\,u'\,u^{n-1}$.

مثال

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x) = \left(2x^2-3x+3\right)^3$

نلاحظ أن $f = u^3$ مع $u(x) = 2x^2-3x+3$. و بما أن u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$f'(x) = 3(4x-3)\left(2x^2-3x+3\right)^2.$$

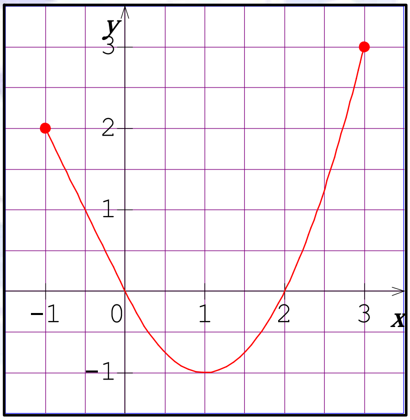
• **مشتقة الدالة** $x \mapsto \dfrac{1}{[u(x)^n]}$ (n **عدد طبيعي يحقق** $n \geq 1$)

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و لا تنعدم على I فإن الدالة $\dfrac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا:

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}.$$

تطبيق1

التمثيل البياني التي هو لدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $[-1;3]$.



1.عين بيانيا إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g'(x)$.

2.نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;3]$ بــ $f(x) = [g(x)]^2$.

أحسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

حل

1.نلاحظ أنّ منحنى الدالة g

- يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما 0 و 2 .
- يقع فوق محور الفواصل من أجل $x \in [-1;0[\cup]2;3]$
- يقع تحت محور الفواصل من أجل $x \in]0;2[$

ومنه: $g(x)=0$ من أجل $x=0$ أو $x=2$.

و $g(x)>0$ من أجل $x \in [-1;0[\cup]2;3]$

و $g(x)<0$ من أجل $x \in]0;2[$.

2. بما أن الدالة g متناقصة تماما على $[-1;1]$ و متزايدة تماما على $[1;3]$

وتقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة 1

فإن $g'(x)<0$ من أجل $]-1;1[$ و $g'(x)>0$ من أجل $x \in]1;3]$

و $g'(1)=0$.

الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $[-1;3]$ و منه فالدالة f حيث

$f=g^2$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $[-1;3]$.

و لدينا: $f'(x)=2g'(x)g(x)$.

باستعمال الجدول الموالي نحصل على إشارة $f'(x)$:

x	-1		0		1		2		3
$g(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

تطبيق2

عين مشتقات الدوال f ، g ، h على المجالات المعطاة حيث:

1. $f(x)=\left(2x^2-x+3\right)^4$ على $\mathbb{R}$؛
2. $g(x)=\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^3}$ على $]1;+\infty[$.
3. $h(x)=\sqrt{x^2-4}$ على $]2;+\infty[$.

حل

1.نلاحظ أن $f=u^4$ مع $u(x)=2x^2-x+3$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $u'(x)=4x-1$

إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'=4u'u^3$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=4(4x-1)\left(2x^2-x+3\right)^3$

2.نلاحظ أن $g=\dfrac{1}{u^3}$ مع $u(x)=x^2-1$ كما أن $u(x)\neq 0$ من أجل x من $]1;+\infty[$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا $u'(x)=2x$.

إذن g قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا $g'=-\dfrac{3u'}{u^4}$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)=-\dfrac{3(2x)}{\left(x^2-1\right)^4}=-\dfrac{6x}{\left(x^2-1\right)^4}$

3.نلاحظ أن $h=\sqrt{u}$ مع $u(x)=x^2-4$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ مع $u(x)>0$. إذن h قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ و لدينا $h'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ومنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $h'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

IV. الدوال الأصلية لدالة على مجال:

نشاط

1) نعتبر الدالتين f و F المعرفتين على $]-3;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{-x^2-6x}{(x+3)^2} \quad \text{و} \quad F(x)=\frac{2x-3}{x+3}-x$$

أ) تحقق أنه من أجل كل x من $]-3;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$

ب) اقترح دالة أخرى G بحيث من أجل كل x من $]-3;+\infty[$ لدينا $G'(x)=f(x)$.

نقول أن F و G دالتان أصليتان للدالة f على $]-3;+\infty[$.

2) نعتبر الدالتين h و H المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x)=2x-3 \quad \text{و} \quad H(x)=x^2-3x+2$$

أ) بين أن الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

ب) عين دالة أصلية أخرى للدالة h على $\mathbb{R}$.

3) عين دالة أصلية لكل دالة من الدوال التالية على المجال المعطى I:

* $f_1(x)=x$ و $I=\mathbb{R}$. $f_2(x)=x^2$ و $I=\mathbb{R}$.

* $g_1(x)=3x$ و $I=\mathbb{R}$. $g_2(x)=x^2+2x-1$ و $I=\mathbb{R}$.

حل

1)

- $$F'(x)=\frac{2(x+3)-(2x-3)}{(x+3)^2}-1=\frac{2(x+3)-(2x-3)-(x+3)^2}{(x+3)^2}$$

أي $F'(x)=\frac{-x^2-6x}{(x+3)^2}=f(x)$.

- $G(x)=f(x)+7$.

2)

- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $H'(x)=h(x)$ إذن H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.
- $x\mapsto H(x)+\frac{2}{3}$ دالة أصلية أخرى للدالة h على $\mathbb{R}$.

3) $x\mapsto F_1(x)=\frac{x^2}{2}$ * دالة أصلية لـــ: f_1 على $\mathbb{R}$.

$x\mapsto F_2(x)=\frac{x^3}{3}$ * دالة أصلية لـــ: f_2 على $\mathbb{R}$.

* $x\mapsto G_1(x)=\frac{3x^2}{2}$ دالة أصلية لـــ: g_1 على $\mathbb{R}$.

$x\mapsto G_2(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+x$ * دالة أصلية لـــ: g_2 على $\mathbb{R}$.

تعريف

f دالة معرفة على مجال I .
نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة قابلة للاشتقاق على I دالتها المشتقة F' هي f نفسها.

وبعبارة أخرى

F دالة أصلية للدالة f على المجال I معناه $F'(x)=f(x)$ من أجل كل x من I .

مثال

* الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $F(x)=x^2-3x+1$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=2x-3$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $F'(x)=2x-3=f(x)$.

*الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $F(x)=x^2-3x-\sqrt{2}$ هي كذلك دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f

لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $G'(x)=2x-3=f(x)$.

الدوال الأصلية لدالة

خواص (تقبل دون برهان)

*إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I.

*إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال $x \mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

نتيجة

دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

مثال

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=3x^2+4x-2$. كل الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِالشكل $F(x)=x^3+2x^2-2x+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا

خاصية

f دالة مستمرة على مجال I. x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي. توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$.

برهان

بما أن الدالة f مستمرة على I فهي تقبل دوالا أصلية على I و لتكن G إحدى هذه الدوال الأصلية.

إذا كانت F دالة أصلية أخرى للدالة f على I فإن من أجل كل x من I، $F(x)=G(x)+k$ حيث k عدد حقيقي.

الشرط $F(x_0)=y_0$ يعني أن $G(x_0)+k=y_0$ أي أن $k=y_0-G(x_0)$. لقد تم هكذا تحديد العدد الحقيقي k.

توجد إذن دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$ و لدينا: $F(x)=G(x)+y_0-G(x_0)$.

تطبيق 1

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2} \quad \text{و} \quad F(x)=\frac{x-1}{x+1}-2x$$

بيّن أنّ الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

حل

طريقة

لإثبات أن F دالة أصلية للدالة f على مجال I يكفي أن نثبت أن F قابلة للاشتقاق على I و أنّه من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$.

بالفعل لدينا، F دالة ناطقة معرفة على $]-1;+\infty[$ فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا:

$$F'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}-2=\frac{2}{(x+1)^2}-2$$

ومنه

$$F'(x)=\frac{2-2(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{2\left[1-(x+1)^2\right]}{(x+1)^2}=\frac{2\left[(1-x-1)(1+x+1)\right]}{(x+1)^2}=\frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

إذن:

$$F'(x)=\frac{-2x^2-4x}{(x+1)^2}=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}=f(x)$$

و هكذا أثبتنا أنّ $F'(x)=f(x)$

ومنه F دالة أصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$.

تطبيق2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=2x-1$

1. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تحقق $F(2)=-1$.

حل

1. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال التي تكتب على الشكل: $x \mapsto x^2 - x + k$ حيث k عدد حقيقي.

2. لدينا من جهة $F(x) = x^2 - x + k$ و لدينا من جهة ثانية $F(2) = -1$.
ومنه $k = -3$. نجد هكذا أن $F(x) = x^2 - x - 3$.

تطبيق3

نعتبر الدالتين F و G المعرفتين على $]2;+\infty[$ كما يلي:

$$F(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} \quad \text{و} \quad G(x) = \frac{2x - 1}{x - 2} + x$$

باستعمال طريقتين مختلفتين بيّن أنّ F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

حل

طريقة أولى: نبين أنّه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x) = G'(x)$

من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$ و $G'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$

إذن من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x) = G'(x)$.

إذن الدالتان هما دالتان أصليتان لنفس الدالة.

طريقة ثانية: نبين أنّه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F(x) - G(x) = k$ حيث k عدد حقيقي.

بالفعل لدينا من أجل كل x من $]2;+\infty[$:

$$F(x) - G(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}\right) - \left(\frac{2x - 1}{x - 2} + x\right) = \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2$$

V. ملخص الدرس:

1.التفسير البياني للعدد المشتق

$f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس (Δ) للمنحني (C) الممثل للدالة f في النقطة $A(x_0; f(x_0))$. معادلة (Δ) هي $y= f'(x_0)(x-x_0)+ f(x_0)$

2.استعمال الإشتقاقية

f دالة تقبل الاشتقاق على مجال I و f' هي دالتها المشتقة.

- نستعمل إشارة f' لتعيين اتجاه تغير f على I .
- نستعمل f' لتعيين القيم الحدية المحلية لـــ: f على I .

(إذا كانت f' تنعدم عند قيمة x_0 من I مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f).

3.حول جدول التغيرات

- يمكن استعمال جدول التغيرات دالة f لتعيين القيم الحدية.
- يمكن استعمال جدول التغيرات دالة f لتعيين إشارة f .

مثال

x	$-\infty$		-5		-4		6		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	3	$+$	1

-1 هي قيمة حدية محلية صغرى

3 قيمة حدية محلية كبرى(أو عظمى).

نستنتج من جدول تغيرات f السابق إشارة الدالة f كالتالي:

x	$-\infty$		-5		6		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4.مشتقة دالة مركبة

إذا كان $f(x)=g\left[u(x)\right]$ فإن $f'(x)=u'(x)\times g'\left[u(x)\right]$

5.دالة أصلية لدالة على مجال

F دالة أصلية للدالة f على I معناه من أجل كل x من I لدينا $F'(x)=f(x)$.

6.مجموعة الدوال الأصلية لدالة

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال $x\mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

VI. توظيف المعارف:

أ. تمارين

الاشتقاقية

1. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=x^2\sqrt{7}$ و (C) هو تمثيلها البياني.

أ)أحسب $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$. ماذا نستنتج؟ فسر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. استنتج $f'(x)$.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x)=x^2+3x$ و (C) هو تمثيلها البياني.

أ)اكتب معادلة المماس (Δ)للمنحني (C) في نقطته ذات الفاصلة 0.

ب) اكتب معادلة المماس (Δ') للمنحني (C)،الذي معامل توجيهه 5.

3. عين الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية المعرفة على $\mathbb{R}$:

1) $f(t)=0.5t^2+15t$

2) $g(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x-5$

3) $h(x)=-3x^3-6x^2+4x-1$

4. عين الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية:

1) من أجل $q\in\mathbb{R}$: $C(q)=0.1q^3-0.5q^2+20q+300$

2) من أجل $q\in\mathbb{R}^*$: $B(q)=q^2+2q-\dfrac{20}{q}$

3) من أجل $x\in[0;+\infty[$: $f(x)=1-2x+\sqrt{x}$

.5 f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـِ : $f(x)=x^2+3x+\sqrt{x}$

1) اكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=u(x)+v(x)$

2) بتطبيق عملية مشتق مجموع دالتين احسب $f'(x)$

3) استنتج إشارة $f'(x)$.

.6 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـِ : $f(x)=(1-x)(x^2+x-2)$

1) اكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=u(x)\times v(x)$

عين $u(x)$ ، $v(x)$ ، $u'(x)$ و $v'(x)$

2) بتطبيق عملية مشتق جداء دالتين احسب $f'(x)$

4) استنتج إشارة $f'(x)$.

.7 f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـِ: $f(x)=\dfrac{-2x+3}{1-x}$

1) اكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$.

2) بتطبيق عملية مشتق $\dfrac{u}{v}$ احسب $f'(x)$.

3)عين إشارة $f(x)$.

.8 احسب $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f باستعمال العمليات على المشتقات.

1) $f(x)=\dfrac{-3x^3+2x+1}{3}$

2) $f(x)=x^2-\frac{1}{x}+\sqrt{x}$

3) $f(x)=(x-1)(x^2+2)-x$

4) $f(x)=(5x^2-3x+1)(x^3-1)$

5) $f(x)=\frac{x^4}{2}(1-x^2)$

6) $f(x)=\frac{1}{x-1}(1+\sqrt{x})$

7) $f(x)=\frac{-3x^2+x-2}{x^2+1}$

8) $f(x)=-2x+1-\frac{1}{1-x}$

9) $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}-\sqrt{x}$

.9 لتكن الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـــ: $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$

أ)عين f' مشتقة الدالة f .

ب) ليكن T و T' المماسان للمنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطتين A و B اللتين فاصلتهما 0 و 5 على الترتيب. عين معادلة لكل من T و T' .

ج) عين نقطة تقاطع T و T' .

.10 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=2x^3+5x^2+6x+9$

(C) هو المنحني الممثل للدالة f .

1. عين f' مشتقة الدالة f .

2.هل توجد مماسات للمنحني (C) موازية للمستقيم الذي معادلته $y=6x$ ؟ عين معادلات لها في حالة الوجود.

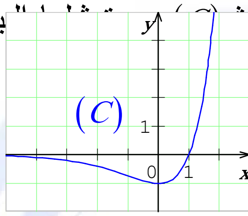
.11 نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=ax^3+bx+c$

حيث a،b،c أعداد حقيقية. (C) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم.

عين الأعداد a، b و c بحيث المنحني (C) يشمل النقطة $A(1;-3)$ و

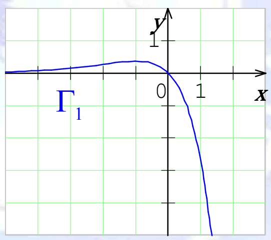
يقبل في النقطة $B(0;1)$ مماسا موازيا للمستقيم D الذي معادلته $y=-6x$

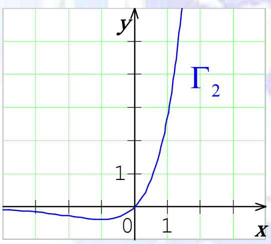
.12 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث (C) تمثيلها البياني التالي:



أحد المنحنيين التاليين هو المنحني Γ الممثل للدالة f' ،

ما هو؟ برّر.





مشتق دالة مركب

.13 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=2x-1 \quad \text{و} \quad f(x)=x^2$$

1) شكل جدولي تغيرات كل من f و g .

2) h هي الدالة المعرفة بـــ $h=f\circ g$ أي هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$

بـــ $h(x)=(2x-1)^2$.

أ- بين لماذا الدالة h متزايد تماما على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ ؟

ب-ادرس تغيرات الدالة h على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$

ج-شكل جدول تغيرات الدالة h .

.14 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}^{+}$ بـــ:

$f(x)=3x+5$ و $g(x)=\sqrt{x}$.

1) أعط تغيرات الدالتين f و g .

2) نعتبر الدالة h مركب الدالة f متبوعة بـــ g .

عين عبارة $h(x)$ ثم ادرس تغيرات الدالة h .

.15 f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[-2;3]$ حيث جدول تغيراتها هو التالي:

x	-2		-1		0		1		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	¦	$-$	0		¦	$+$	
$f(x)$	1	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	3

في كل حالة عين مجموعة تعريف الدالة g ،عبر عن $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ثم استنتج جدول تغيرات الدالة g.

1) $g=\sqrt{f}$ 2) $g=f^{2}$ 3) $g=\frac{1}{f}$

الدوال الأصلية

.16 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ $f(x)=\dfrac{x+5}{2x^2+3}$

1) احسب الدالة المشتقة f' للدالة f .

2)استنتج دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة g المعرفة بـــ

$$g(x)=\frac{2x^2+20x-3}{\left(2x^2+3\right)^2}$$

.17 f و F دالتان معرفتان على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـــ:

$f(x)=\dfrac{16\left(x^2-1\right)}{(2x-1)^2}$ و $F(x)=\dfrac{2x+1}{2x-1}+4x$.

بين أن الدالة F أصلية للدالة f على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

.18 دالة معرفة على $]-\infty;0[$ بـــ: $f(x)=-3x+4-\dfrac{1}{x^2}$

1) اعط دالة أصلية للدالة f على $]-\infty;0[$.

2) اعط كل الدوال الأصلية للدالة f على $]-\infty;0[$.

3)جد الدالة الأصلية F للدالة f و التي تحقق $F(1)=5$

الدوال الأصلية للدوال كثيرات الحدود

.19 عين دالة F أصلية للدالة f المعرفة والمستمرة على $\mathbb{R}$:

1) $f(x)=2x^3-4x^2-3x-1$

2) $f(x)=3x^3+2x^2-x$

3) $f(x)=-7x^3+5x^2-2x+3$

4) $f(x)=(x-1)(x+4)$

5) $f(x)=(3x-4)^5-3(3x-2)^4$

6) $f(x)=(6x^2-1)(2x^3-x+1)^4$

7) $f(x)=2x^2(8x+3)(2x^4+x^3+1)^4$

الدوال الأصلية للدوال الناطقة

.20 بتطبيق قاعدة الدالة الأصلية F لدالة من الشكل $\frac{u'}{u^n}$ عين دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$:

1) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ 2) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^3}$

3) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^5}$ 4) $f(x)=\frac{2}{(2x+1)^2}$

.21 f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ بـــ: $f(x)=\frac{x^3-6x^2+12x-4}{(x-2)^2}$

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي $x>2$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-2)^2}$

2) استنتج دالة أصلية F للدالة f على $]2;+\infty[$ تحقق $F(3)=-1$.

دوال أصلية لدوال أخرى

22. بتطبيق قاعدة حساب الدالة الأصلية لدالة من الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ عين دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$:

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

2) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x+1}}$

3) $f(x)=\frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}$

4) $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

5) $f(x)=\frac{6x^2+4x}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$

تمارين للتعمق

23. f دالة معرفة على $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ بـــ: $f(x)=\sqrt{2x+3}$

عين عددين حقيقيين a، b حيث تكون الدالة F المعرفة بـــ $F(x)=(ax+b)\sqrt{2x+3}$ أصلية للدالة f على المجال $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

24. f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـــ: $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x}{(x+1)^2}$

1) احسب $g(x)=f(x)-(1+x)$.

2) عين دالة أصلية G للدالة g على $[0;+\infty[$.

3)استنتج دالة أصلية F للدالة f على $[0;+\infty[$.

.25 الدالة K معرفة و موجبة تماما على $\mathbb{R}^+$ و جدول تغيراتها هو التالي

x	0		1		3		$+\infty$
$K(x)$		↗		↘		↗	$+\infty$

ما هو جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـــ $g(x)=\dfrac{1}{k(x)}$ ؟

أ)

x	0		1		3		$+\infty$
$g(x)$		↘		↗		↘	0

ب)

x	0		1		3		$+\infty$
$g(x)$		↘		↗		↘	$-\infty$

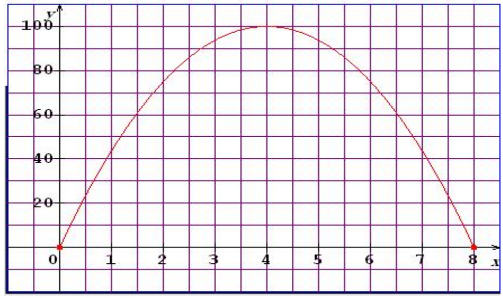
جـ)

x	0		1		3		$+\infty$
$g(x)$		↗		↘		↗	$+\infty$

.26 في مجال الاقتصاد نسمي الدالة " الرضا " كل دالة f معرفة على مجال I و تأخذ قيمها في المجال $[0;100]$. نسمي الدالة v حيث $v=f'$ بالدالة " الرغبة ". نقول أنه توجد "رغبة" عندما تكون v موجبة و إلا فنقول أن هنالك " رفض ".

1. من الرضا إلى الرغبة

دالة" الرضا " f الممثلة في الشكل الموالي معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0;8]$.



أ)عين قيمة x التي يكون من أجلها الرضا أعظميا.

ب) عين المجالات التي توجد فيها " رغبة " و المجالات التي يوجد فيها " رفض ".

جـــ)بواسطة قراءة بيانية عين $v(4)$.

د) عبر عن $v(x)$ بدلالة x علما أن الدالة v دالة تآلفية معرفة على المجال $[0;8]$ و أن $v(0)=50$.

2. من الرغبة إلى الرضا

تم نمذجة دالة" الرغبة " v من أجل راتب في إحدى المؤسسات على النحو التالي: من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$، $v(x)=\dfrac{100}{(x+1)^2}$

بحيث يمثل x الراتب الشهري مقدر بآلاف الدنانير لعامل من عمال المؤسسة.

أ)نذكر أن الدالة" الرضا " f هي دالة أصلية للدالة v على $[0;+\infty[$.

علما أن $f(0)=0$ بين أن: $f(x)=\dfrac{100x}{x+1}$.

ب) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$و مثل المنحني الممثل للدالة f . أعط تفسيرا لهذا المنحني مرتبط بالرضا.

.27

أ- دراسة دالة

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;700[$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{1}{25}x+100+\frac{540000}{x^2}$$

1. أحسب نهاية الدالة f عند 0. فسر بيانيا النتيجة.
2. بين أنه من أجل كل x من $]0;700[$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{(x-300)\left(x^2+300x+90000\right)}{25x^3}$$

3. استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب- تطبيق اقتصادي

تنتج إحدى الورشات على الأقل 100 وحدة و على الأكثر 700 وحدة.

توصف الكلفة الهامشية C_m لإنتاج وحدة إضافية على المجال $[100;700]$ بالدالة f المعرفة في الجزء أ. لدينا إذن: $C_m(x)=f(x)$ من أجل $[100;700]$.

نرمز بـِ $C(x)$ إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج x وحدة. علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج المائة (100) وحدة الأولى هي $16000\,DA$.

عين عبارة الكلفة الإجمالية $C(x)$.

ب. حلول التمارين

الاشتقاقية

.1 أ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{7}(1+h)^2-\sqrt{7}}{h}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{7}\;h(h+2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{7}\;(h+2)=2\sqrt{7}$.

ب) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(x+h)^2\sqrt{7}-x^2\sqrt{7}}{h}=(h+2x)\sqrt{7}$.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h+2x)\sqrt{7}=2x\sqrt{7}$.

نستنتج أن $f'(x)=2x\sqrt{7}$.

.2 أ) $f(x)=x^2+3x$ و $f(x)=2x+3$ إذن $f(0)=0$ و $f'(0)=3$

معادلة (Δ) هي: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=3x$.

ب)معامل توجيه (Δ') في النقطة ذات الفاصلة x هو 5 معناه

$f'(x)=5$ أي $2x+3=5$ أي $x=1$.

معادلة (Δ') هي $y=5(x-1)+f(1)$ أي $y=5x-1$ لأن

$f(1)=4$.

.3 1) $f'(t)=t+15$

2) $g'(x)=x+\dfrac{1}{4}$

3) $h'(x)=-9x^2-12x+4$

.4 1) من أجل $q\in\mathbb{R}$: $C'(q)=0.3q^2-q^2+20$

2) من أجل $q\in\mathbb{R}^*$: $B'(q)=2q+2+\dfrac{20}{q^2}$

3)من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = -2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

.5 1) نضع $u(x) = x^2 + 3x$ و $v(x) = \sqrt{x}$.

2) $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3)من أجل $x \in]0;+\infty[$ لدينا: $2x+3>0$ و $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ إذن $f'(x) > 0$.

.6 1) نضع $u(x) = 1 - x$ و $v(x) = x^2 + x - 2$.

$u'(x) = -1$ و $v'(x) = 2x + 1$.

2) $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

أي $f'(x) = (-1) \times (x^2 + x - 2) + (1 - x) \times (2x + 1)$

أي $f'(x) = -3x^2 + 3$.

3) $f'(x) = 3(-x^2 + 1)$.

$f'(x) \geq 0$ من أجل $x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

$f'(x) \leq 0$ من أجل $x \in [-1;1]$

.7 1) نضع $u(x) = -2x + 3$ و $v(x) = 1 - x$.

2) $f'(x) = \dfrac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$

أي $f'(x) = \dfrac{(-2)(1-x) - (-2x+3)(-1)}{(1-x)^2}$

أي $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

3)من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$: $f'(x) > 0$.

.8 (1 $f'(x)=\dfrac{-9x^2+2}{3}$

(2 $f'(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(3 $f'(x)=(x^2+2)+(x-1)(2x)-1=x^2+2+2x^2-2x-1$

أي $f'(x)=x^2+2+2x^2-2x-1=3x^2-2x+2$

(4 $f'(x)=(10x-3)(x^3-1)-(5x^2-3x+1)(3x^2)$

أي $f'(x)=-5x^4+6x^3-3x^2-10x+3$

(5 $f(x)=\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{x^6}{2}$ إذن $f'(x)=\dfrac{4x^3}{2}-\dfrac{6x^5}{2}=2x^3-3x^5$

(6 $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}(1+\sqrt{x})+\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

أي $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}\left[\dfrac{-1-\sqrt{x}}{x-1}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right]$

أي $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}\left[\dfrac{-1-\sqrt{x}}{x-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{2x}\right]$

أي $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}\left[\dfrac{2x(-1-\sqrt{x})+\sqrt{x}(x-1)}{x-1}\right]$

أي $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}\left[\dfrac{\sqrt{x}-x\sqrt{x}-2x}{2x(x-1)}\right]$

أي $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}(1-x-2\sqrt{x})}{2x(x-1)^2}$

7) $f'(x)=\dfrac{(-6x+1)(x^2+1)-2x(-3x^2+x-2)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$

8) $f'(x)=-2-\dfrac{1}{(1-x)^2}$

9) $f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

9. أ) $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x+1)-(x-1)^2}{(x+1)^2}$

أي $f'(x)=\dfrac{(x-1)[2x+2-x+1]}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

ب)

• لدينا $f(0)=1$ و $f'(0)=-3$ إذن معادلة T هي $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=-3x+1$.

• لدينا $f(5)=\dfrac{8}{3}$ و $f'(5)=\dfrac{8}{9}$ إذن معادلة T' هي $y=f'(5)(x-5)+f(5)$ أي $y=\dfrac{8}{9}(x-2)$.

ج) نقطة $M(x;y)$ تنتمي إلى T و T' معناه:

$$\begin{cases} y=-3x+1 \\ y=\dfrac{8}{9}(x-2) \end{cases}$$

و معناه $\begin{cases} \dfrac{8}{9}(x-2)=-3x+1 \\ y=-3x+1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 8x-16=-27x+9 \\ y=-3x+1 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x=\dfrac{5}{7} \\ y=-3x+1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x=\dfrac{5}{7} \\ y=-\dfrac{8}{7} \end{cases}$.

T و T' متقاطعان في النقطة $D\left(\dfrac{5}{7};-\dfrac{8}{7}\right)$.

.10 1) $f'(x)=6x^2+10x+6$.

2) مماس يوازي المستقيم الذي معادلته $y=6x$ يعني:

مماس معامل توجيهه 6 و يعني :

يوجد على الأقل x في $\mathbb{R}$ حيث $f'(x)=6$.

$f'(x)=6$ يكافئ $6x^2+10x+6=6$ و يكافئ $6x^2+10x=0$

أي $2x(3x+5)=0$ أي $x=0$ أو $x=-\dfrac{5}{3}$.

المعادلة $f'(x)=6$ تقبل حلين هما 0 و $-\dfrac{5}{3}$ يعني أن (C) يقبل

مماسين معامل توجيههما 6.

نسمي (Δ_1) المماس عند النقطة $A(0;f(0))$ أي $A(0;9)$ و (Δ_2)

المماس عند النقطة $B\left(-\dfrac{5}{3};f\left(-\dfrac{5}{3}\right)\right)$ أي $B\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{98}{27}\right)$.

معادلة (Δ_1): $y=6(x-0)+f(0)$ أي $y=6x+9$.

معادلة (Δ_2): $y=6\left(x+\dfrac{5}{3}\right)+f\left(-\dfrac{5}{3}\right)$ أي $y=6x+\dfrac{368}{27}$.

.11 $f'(x)=3ax^2+b$

- $A(1;-3)\in(C)$ معناه $f(1)=-3$ أي $a+b+c=-3$.
- $B(0;1)\in(C)$ معناه $f(0)=1$ أي $c=1$.

• (C) يقبل عند $B(0;1)$ مماسا موازيا للمستقيم D الذي معادلته $y=-6x$ معناه $f'(0)=-6$ أي $b=-6$.

•نحصل عندئذ على الجملة $\begin{cases} a+b+c=-3 \\ c=1 \\ b=-6 \end{cases}$ التي تكافئ $\begin{cases} a=2 \\ b=-6 \\ c=1 \end{cases}$

إذن $f(x)=2x^3-6x+1$

.12 نلاحظ في التمثيل البياني (C) :

• f متزايدة على $[0;+\infty[$.

• f متناقصة على $]-\infty;0]$.

• $f(0)=-1$.

• $f(1)=0$

نستنتج جدوا التغيرات التالي:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$ 0	$\nearrow$

يبين جدول تغيرات f أن في المجال $]1;+\infty[$ لدينا $f'(x)\geq 0$ أي في المجال $]1;+\infty[$، Γ فوق محور الفواصل.

نستنتج أن Γ هو Γ_2 (لا يمكن أن يكون Γ هو Γ_1).

مشتق دالة مركب

13. 1)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ− لدينا: g متزايدة على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ و f متزايدة على $\left[g\left(\frac{1}{2}\right);+\infty\right[$

أي على $[0;+\infty[$ إذن h متزايدة على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

ب− لدينا: g متزايدة على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ و f متناقصة على $\left]-\infty;g\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

أي على $]-\infty;0]$ إذن h متزايدة على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$.

ج−جدول تغيرات h :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

14. 1) جدول تغيرات f وجدول تغيرات g

x	0		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		$+\infty$
$f(x)$	5	$\nearrow$	$+\infty$

2) لدينا $h(x)=g[f(x)]$ أي $h(x)=(g\circ f)(x)$.

$h(x)=g[f(x)]=\sqrt{f(x)}=\sqrt{3x+5}$.

لدينا: f متزايدة على $[0;+\infty[$ و g متزايدة على $]f(0);+\infty[$

أي على $]5;+\infty[$ إذن h متزايدة على $[0;+\infty[$.

.15 1) g معرفة من أجل كل x حيث $f(x)\geq 0$ أي من أجل كل x من $[-2;0]\cup[2;3]$.

من أجل كل x من $]-2;0[\cup]2;3[$ لدينا: $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

2) g معرفة من أجل كل x من $[-2;3]$.

من أجل كل x من $]-2;3[$ لدينا: $g'(x)=2f'(x)\,f(x)$.

3) g معرفة من أجل كل x من $[-2;0[\cup]0;2[\cup]2;3]$.

من أجل كل x من $]-2;0[\cup]0;2[\cup]2;3[$ لدينا: $g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}$.

الدوال الأصلية

.16 1) $f'(x)=\dfrac{(2x^2+3)-(x+5)(4x)}{(2x^2+3)^2}$ أي

$$f'(x)=\frac{-2x^2-20x+3}{(2x^2+3)^2}$$

2) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)=-f'(x)$ إذن $-f$ دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

.17 من أجل كل x من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$: $F'(x)=-\frac{4}{(2x-1)^2}+4$

أي $F'(x)=\frac{-4+4(2x-1)^2}{(2x-1)^2}$ أي $F'(x)=\frac{16(x^2-1)}{(2x-1)^2}$ أي $F'(x)=f(x)$

إذن الدالة F أصلية للدالة f على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

.18 1) $x\mapsto -\frac{3}{2}x^2+4x+\frac{1}{x}$ دالة أصلية للدالة f على $]-\infty;0[$.

2)الدوال الأصلية للدالة f على $]-\infty;0[$ هي كل الدوال:

$x\mapsto -\frac{3}{2}x^2+4x+\frac{1}{x}+k$ ، k ثابت كيفي.

3) $F(1)=5$ يكافئ $-\frac{3}{2}+4+1+k=5$ و يكافئ $k=\frac{3}{2}$.

$F(x)=-\frac{3}{2}x^2+4x+\frac{1}{x}+\frac{3}{2}$.

الدوال الأصلية للدوال كثيرات الحدود

.19 1) $F(x)=\frac{x^4}{2}-\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x$

2) $F(x)=\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}$

3) $F(x)=-\frac{7}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-x^2+3x$

4) $f(x)=x^2+3x-4$ ومنه $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x$

5) $f(x)=(3x-4)^5-3(3x-2)^4$

- يمكننا كتابة $(3x-4)^5=\frac{1}{6\times 3}\times 6\times 3(3x-4)^5$

لاحظ أن $6\times 3(3x-4)^5$ من الشكل $n\times u'(x)u^{n-1}(x)$ و تذكر أن $(u^n)'=nu'u^{n-1}$ أي أن u^n دالة أصلية للدالة $nu'u^{n-1}$.

إذن $x\mapsto (3x-4)^6$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto 6\times 3\times(3x-4)^5$

و بالتالي $x\mapsto \frac{1}{18}(3x-4)^6$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto (3x-4)^5$.

●بنفس الكيفية: $x\mapsto \frac{1}{15}(3x-2)^5$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto (3x-2)^4$

إذن $F(x)=\frac{1}{18}(3x-4)^6-3\frac{1}{15}(3x-2)^5$

أي $F(x)=\frac{1}{18}(3x-4)^6-\frac{1}{5}(3x-2)^5$

6) $f(x)=\frac{1}{5}\times 5(6x^2-1)(2x^3-x+1)^4$

لاحظ أن $5(6x^2-1)(2x^3-x+1)^4$ من الشكل $n\times u'(x)u^{n-1}(x)$

نستنتج أن $F(x)=\frac{1}{5}(2x^3-x+1)^5$ (انظر السؤال السابق).

7) $f(x)=2x^2(8x+3)(2x^4+x^3+1)^4$

بنفس الكيفية يمكننا كتابة f على الشكل $f=\frac{2}{5}\times 5u'u^4$ حيث

$u(x)=2x^4+x^3+1$ ومنه نجد $F(x)=\frac{2}{5}(2x^4+x^3+1)^5$

الدوال الأصلية للدوال الناطقة

20. تذكر أن $\left(\frac{1}{u^n}\right)'=-\frac{nu'}{u^{n+1}}$ أي $\frac{1}{u^n}$ دالة أصلية للدالة $-\frac{nu'}{u^{n+1}}$.

1) $F(x)=-\frac{1}{x+1}$

2) $F(x)=-\frac{1}{2(x+1)^2}$

$F(x)=-\frac{1}{4(x+1)^4}$ (3 $\qquad$ $F(x)=-\frac{1}{2x+1}$ (4

.21 (1 $f(x)=\frac{(ax+b)\left((x-2)^2\right)+c}{(x-2)^2}$

أي $f(x)=\frac{ax^3-(4a-b)x^2+(4a-4b)x+4b+c}{(x-2)^2}$

بما أن من أجل كل x من $]2;+\infty[$: $f(x)=\frac{x^3-6x^2+12x-4}{(x-2)^2}$

فإن $\begin{cases}a=1\\4a-b=6\\4a-4b=12\\4b+c=-4\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=4\end{cases}$ إذن $f(x)=x-2+\frac{4}{(x-2)^2}$

(2 $F(x)=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{4}{x-2}+k$ ، $k\in\mathbb{R}$.

$F(3)=-1$ يكافئ $\frac{9}{2}-18-4+k=-1$ أي $k=\frac{33}{2}$.

$F(x)=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{4}{x-2}+\frac{33}{2}$.

.22 لاحظ أنّ $2\sqrt{u}$ دالة أصلية للدالة $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

(1 $F(x)=2\sqrt{x+1}$ $\qquad$ (2أ $F(x)=\frac{2}{\sqrt{2x+1}}=\sqrt{2x+1}$

(3 $F(x)=2\sqrt{x^3+x}$ $\qquad$ (4أ $F(x)=2\sqrt{x^2+x+1}$

(5 $f(x)=\frac{6x^2+4x}{\sqrt{x^3+x^2+1}}=2\frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$

إذن $F(x)=4\sqrt{x^3+x^2+1}$

تمارين للتعمق

.23 $F'(x) = a\sqrt{2x+3} + (ax+b)\dfrac{2}{2\sqrt{2x+3}}$

$F'(x) = a\sqrt{2x+3} + (ax+b)\dfrac{\sqrt{2x+3}}{2x+3}$

$F'(x) = \sqrt{2x+3}\left(2 + \dfrac{ax+b}{2x+3}\right)$ أي $F'(x) = \sqrt{2x+3}\left(\dfrac{3ax+3a+b}{2x+3}\right)$

F دالة أصلية للدالة f على $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ معناه من أجل كل x من

$\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ لدينا $F'(x) = f(x)$ أي $\begin{cases} 3a = 2 \\ 3a+b = 3 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = 1 \end{cases}$.

إذن $F(x) = \left(\dfrac{2}{3}x+1\right)\sqrt{2x+3}$

.24 (1 $g(x) = \dfrac{x^3+3x^2+3x}{(x+1)^2} - (1+x)$

لدينا $g(x) = \dfrac{x^3+3x^2+3x-(1+x)^3}{(x+1)^2}$

وبعد الحساب نجد $g(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$

(2 $G(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

(3 بما أن $g(x) = f(x) - (1+x)$ فإن $G(x) = F(x) - \left(x + \dfrac{x^2}{2}\right)$

أي $F(x) = G(x) + x + \dfrac{x^2}{2}$ إذن $F(x) = \dfrac{1}{x+1} + x + \dfrac{x^2}{2}$

.25 جدول تغيرات الدالة g هو الجدول أ).

تعليل

لدينا $g'(x)=\dfrac{-k'(x)}{\left[k(x)\right]^2}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^+$: إشارة $g'(x)$ هي عكس إشارة $k'(x)$.

ومن جهة أخرى $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{K(x)}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x)=+\infty$

.26

1. من الرضا إلى الرغبة

أ) يكون الرضا أكبر ما يمكن من أجل $x=4$ (انظر الشكل السابق).

ب) توجد "رغبة" من أجل $x\in[0;4]$ و "رفض" من أجل $x\in[4;8]$.

جـ) $v(4)=f'(4)$. $f'(4)$ هو معامل توجيه المماس (T) للمنحني الممثل للدالة f. (T) يوازي محور الفواصل إذن $v(4)=0$.

د) v دالة تآلفية إذن من الشكل $v(x)=ax+b$.

$\begin{cases} v(4)=0 \\ v(0)=50 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} 4a+b=0 \\ b=50 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=-\dfrac{25}{2} \\ b=50 \end{cases}$ إذن $v(x)=-\dfrac{25}{2}x+50$

2. من الرغبة إلى الرضا

أ) من أجل كل x من $[0;+\infty[$ لدينا:

$f'(x)=\dfrac{100(x+1)-100x}{(x+1)^2}$ أي $f'(x)=\dfrac{100}{(x+1)^2}$ أي $f'(x)=v(x)$

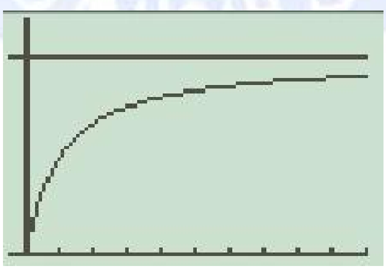
إذن $x \mapsto f(x) = \frac{100x}{x+1} + k$ دالة أصلية للدالة v على $[0;+\infty[$.

$f(0) = 0$ يكافئ $k = 0$ إذن $f(x) = \frac{100x}{x+1}$.

ب)

- f معرفة على $[0;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{100x}{x} = 100$.
- $f'(x) = v(x) = \frac{100}{(x+1)^2}$.
- من أجل كل x من $[0;+\infty[$ لدينا $f'(x) > 0$.
- جدول التغيرات

x	0	$+\infty$
f'	$+$	
f	$0 \nearrow$	100



عندما " يكبر" الراتب الشهري "تكبر الرغبة (الرغبة تؤول إلى 100).

.27

أ- <u>دراسة دالة</u>

.1 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{25}x+100\right)=100$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{540000}{x^2}=+\infty$

و منه حسب مبرهنة نهاية مجموع لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.

ملاحظة

لا نكتفي بكتابة $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$ و لكن لابد من تبرير هذه النتيجة.

.2 من أجل كل x من $]0;700]$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{25}-\frac{1080000}{x^3}=\frac{x^3-27000000}{25x^3}$$

لدينا من جهة ثانية من أجل كل x من $]0;700]$:

$$\frac{(x-300)(x^2+300x+90000)}{25x^3}=\frac{x^3-27000000}{25x^3}$$

ملاحظة

نقوم أولا بحساب $f'(x)$ باستعمال قواعد الاشتقاق. لا نكتفي بإعطاء النتيجة الواردة في النص و إنما يجب تبريرها.

.3 $25x^3>0$ و بما أن مميز $x^2+300x+90000$ سالب فإن $x^2+300x+90000>0$ على المجال $]0;700]$ و منه إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $x-300$ و بالتالي فإن f متناقصة تماما على $]0;300]$ و متزايدة تماما على $[300;700]$.

ملاحظة

إشارة ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ هي من نفس إشارة a في حالة $\Delta<0$.

ب-تطبيق اقتصادي

نعلم أن $C'=C_m$ و منه فإن C دالة أصلية للدالة C_m على المجال $[100;700]$

وبما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج المائة (100) وحدة الأولى هي $16000\,DA$ فإنّ C هي الدالة الأصلية لـِ C_m و التي تحقق $C(100)=16000$.

وهكذا لدينا:

$$C(x)=\frac{1}{50}x^2+100x-\frac{540000}{x}+c$$

مع c ثابت حقيقي $C(100)=16000$

تعني $c=11200$ وبالتالي فإن:

$$C(x)=\frac{1}{50}x^2+100x-\frac{540000}{x}+11200$$.

VII. تقويم ذاتي:

أ. اختيار من متعدد

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وجدول تغيراتها هو الآتي:

أكد صحة أو خطأ العبارات التالية مع التبرير.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\geq -3$
2. على $]-\infty;-2]$: $f'(x)\leq 0$
3. $f(0)\leq f(1)$
4. المماس للمنحني الممثل للدالة f في النقطة التي فاصلتها -2 موازي للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.
5. $f'(3)>0$.

ب. صحيح أم خاطئ

1. اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير جوابك.

1. دالة أصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة f المعرفة بـــ: $f(x)=\dfrac{3x^3+2}{2x^2}$ هي الدالة F المعرفة بـــ: $F(x)=\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{1}{x}$

2. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث إشارة $f(x)$ معطاة بـــ:

x	$-\infty$ α $+\infty$
$f(x)$	+ 0 −

إذا كانتF دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالةf فإن $F(\alpha)$ قيمة حدية صغرى لـــF على $\mathbb{R}$.

3. f دالة سالبة تماما على$[1;3]$. إذا كانتF دالة أصلية على $[1;3]$ فإن: $F(2,1) > F(2,2)$.

4. دالتان مختلفتان يمكن أن تكونا دالتين أصليتين لنفس الدالة.

2. لكل الأسئلة التالية، إجابة واحدة صحيحة، ما هي؟

1. f دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـــ: $f(x)=2x-1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

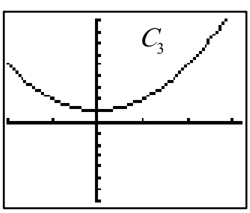
دالة أصلية F للدالة f على $]-1;+\infty[$ معرفة بـــ:

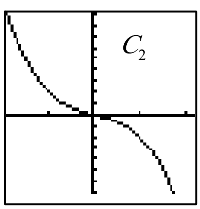
أ) $F(x)=\dfrac{x^3+x+1}{x+1}$ ؛ ب) $F(x)=\dfrac{-x+1}{x+1}$

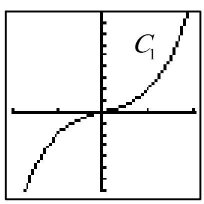
جـــ) $F(x)=\dfrac{x^3-x+1}{x+1}-1$

2.f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ $f(x)=-1-x^2$

أحد المنحنيات C_1 ، C_2 و C_3 هو منحنى دالة أصلية F للدالةf على $\mathbb{R}$:







المنحني (C) هو: أ) (C_1) ب) (C_2) جـــ) (C_3)

أ. أجوبة اختيار من متعدد

- تمنح نقطتان لكل جواب صحيح.
- تنقص 1 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.
- لا تضاف و لا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة.

1. صحيح لأن: $f(x)$ تأخذ قيمها في المجال $]-3;2[$ منقوص بالقيمة $1-$
2. خاطئ لأن: f متزايدة تماما على $]-\infty;-2]$ و بالتالي $f'(x)\leq 0$ على $]-\infty;-2]$.
3. خاطئ لأن: f متناقصة تماما على المجال $[-2;1]$ الذي يشمل العددين 0 و 1 ، لدينا عندئذ $f(0)\geq f(1)$.
4. خاطئ لأن: $f'(-2)$ لا يساوي معامل توجيه (Δ) أي $f'(-2)\neq 1$. لدينا $\left(f'(-2)=0\right)$.
5. صحيح لأن: f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ إذن من أجل كل x من $[1;+\infty[$ لدينا $f'(x)\geq 0$ و $3\in[1;+\infty[$.

ب. أجوبة صحيح أم خاطئ

.1

- تمنح نقطتان لكل جواب صحيح.
- تنقص 1 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.
- تنقص 1 نقطة في حالة عدم الإجابة.

1. خاطئ لأن $F'(x)=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{3x^3-2}{2x^2}$ و $F'(x)\neq f'(x)$.
2. خاطئ. $F(\alpha)$ قيمة كبرى لأن:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$F'(x)=f(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	$F(\alpha)$	$\searrow$	

3. صحيح لأن: F متناقصة على المجال $[1;3]$.

x	1		$2,1$		$2,2$		3
$F'(x)=f(x)$		$-$		$-$		$-$	
$F(x)$		$\searrow$	$F(2,1)$	$\searrow$	$F(2,2)$	$\searrow$	

4. صحيح لأن: F و G أصليتان للدالة f على مجال I معناه من أجل كل x من I لدينا $G(x)=F(x)+k$ و k يمسح $\mathbb{R}$.

.2

- تمنح نقطتان لكل جواب صحيح.
- تنقص 1 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.
- لا تضاف ولا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة.

1. الإجابة الصحيحة هي جـ) لأن:

الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ هي الدوال من الشكل

$k \in \mathbb{R}$ ، $F_1 : x \mapsto \frac{-1}{x+1} + k$

تذكير

تذكر أن $\frac{-1}{u^2}$ دالة أصلية للدالة $\frac{u'}{u^2}$.

الدوال الأصلية للدالة $x \to 2x-1$ هي الدوال من الشكل

$k' \in \mathbb{R}$ مع ، $F_2 : x \mapsto x^2 - x + k'$

نستنتج أن الدول الأصلية للدالة $f : x \mapsto 2x - 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$

هي من الشكل $x \mapsto F(x) = F_1(x) - F_2(x)$

أي $F(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x+1} + k''$ مع $k'' = k + k'$.

ملاحظة

لاحظ أنّنا اعتبرنا الدالة مجموع دالتين هما f_1 و f_2 حيث

$f_2 : x \mapsto 2x - 1$ و $f_1 : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$

2. الإجابة الصحيحة هي : ب) لأن:

- F متناقصة على $\mathbb{R}$.
- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x) < 0$ أي $F'(x) < 0$.

VIII. استعد للبكالوريا:

مسألة ——— **(7 نقط)**

الجزء الأول

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $g(x)=2x^3+x^2-1$

1. أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيين حصر له سعته $0,1$.
3. حدد، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{3x}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث وحدة الأطوال هي $3cm$.

1. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. بين أن $f(\alpha)=\frac{\alpha}{6}+\frac{1}{2\alpha}$ ثم استنتج ، باستعمال حصر العدد α، حصرا للعدد $f(\alpha)$.

حل

سلم التنقيط

الجزء الأول	السؤال 1.	– النهايات........................0,5 – حساب $g'(x)$ ....0,25 – إشارة $g'(x)$ ....0,5 – جدول تغيرات g 0,25
	السؤال 2.	– شروط تطبيق المبرهنة.........0,5 – تحديد المجال الذي يشمل الحل..0,5 – حصر الحل.....................0,5
	السؤال 3.	– إشارة $g(x)$ 0,5

الجزء الثاني	السؤال 1.	– النهايات.......................... 1
	السؤال 2.	– حساب $f'(x)$ .... 0,5 – إشارة $f'(x)$ 0,5
	السؤال 3.	– جدول تغيرات f 0,5
	السؤال 4.	– حساب $f(\alpha)$ .... 0,5 – حصر.........................0,5

حل مفصل

الجزء الأول

1.تغيرات g

- g معرفة على $]-\infty;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$.
- $g'(x)=6x^2+2x=2x(3x+1)$.
- إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x(3x+1)$.
- جدول تغيرات g :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{26}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. g مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود، إذن مستمرة على كل مجال من $\mathbb{R}$.

- g متزايدة تماما على $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]$ و $0\notin\left]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x);g\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$

أي $0\notin\left]-\infty;-\frac{26}{27}\right]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ لا تقبل أي حل في المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]$.

- g متناقصة تماما على $\left[-\frac{1}{3};0\right]$ و $0 \notin \left[g(0);g\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$
- أي $0 \notin \left[-1;-\frac{26}{27}\right]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ لا تقبل أي حل في المجال $\left[-\frac{1}{3};0\right]$.
- g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $0 \in \left[g(0);\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[$

أي $0 \in [-1;+\infty[$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0;+\infty[$.

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

نجد بالحاسبة: $g(0,59)=-0,241...$ و $g(0,69)=0,133...$

نستنتج أن $0,59<\alpha<0,69$.

3.نستنتج من السؤال السابق أن:

- من أجل $x \in]-\infty;\alpha]$ لدينا $g(x)<0$.
- من أجل $x \in [\alpha;+\infty[$ لدينا $g(x)<0$.

الجزء الثاني

1.حساب النهايات

- f معرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{3}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3}=+\infty$

• $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty$ لأن $\begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \left(x^3 + x^2 + 1\right) = 1 \\ \lim_{x \xrightarrow{<} 0} (3x) \xrightarrow{<} 0 \end{cases}$

• $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(x^3 + x^2 + 1\right) = 1 \\ \lim_{x \xrightarrow{>} 0} (3x) \xrightarrow{>} 0^+ \end{cases}$

2.حساب $f'(x)$:

$f'(x) = \dfrac{6x^3 + 3x^2 - 3}{9x^2}$ أي $f'(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 1}{3x^2}$ أي $f'(x) = \dfrac{g(x)}{3x^2}$

نستنتج **أن** إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ لأن $3x^2$ عدد موجب.

3.اتجاه تغير f

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$. نستنتج من السؤال الثالث من الجزء الأول أن:

• في المجال $]-\infty;\alpha]$: f متناقصة.

• في المجال $[\alpha;+\infty[$: f متزايدة.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. $g(\alpha) = 0$ معناه $2\alpha^3 + \alpha^2 - 1 = 0$ أي $2\alpha^3 = -\alpha^2 + 1$

وبمأن $f\left(\alpha\right)=\dfrac{\alpha^3+\alpha^2+1}{3\alpha}$ أي $\begin{cases} f\left(\alpha\right)=\dfrac{2\alpha^3+2\alpha^2+2}{6\alpha} \\ 2\alpha^3=-\alpha^2+1 \end{cases}$

فإن $f\left(\alpha\right)=\dfrac{-\alpha^2+1+2\alpha^2+2}{6\alpha}=\dfrac{\alpha^2+3}{6\alpha}=\dfrac{\alpha^2}{6\alpha}+\dfrac{3}{6\alpha}=\dfrac{\alpha}{6}+\dfrac{1}{2\alpha}$

<u>لنستنتج عن حصرا للعدد</u> $f\left(\alpha\right)$:

لدينا $f\left(\alpha\right)=\dfrac{\alpha}{6}+\dfrac{1}{2\alpha}$

وَ $0,59<\alpha<0,69$.

إذن $\begin{cases} \dfrac{0,59}{6}<\dfrac{\alpha}{6}<\dfrac{0,69}{6} \\ 1,18<2\alpha<1,38 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} \dfrac{0,59}{6}<\dfrac{\alpha}{6}<\dfrac{0,69}{6} \\ \dfrac{1}{1,38}<\dfrac{1}{2\alpha}<\dfrac{1}{1,18} \end{cases}$

و منه $\dfrac{0,59}{6}+\dfrac{1}{1,38}<\dfrac{\alpha}{6}+\dfrac{1}{2\alpha}<\dfrac{0,69}{6}+\dfrac{1}{1,18}$

لدينا $\dfrac{0,5}{6}+\dfrac{1}{1,38}=0,822...$ و $\dfrac{0,69}{6}+\dfrac{1}{1,18}=0,962...$

إذن $0,82<\dfrac{\alpha}{6}+\dfrac{1}{2\alpha}<0,97$

ومنه $0,82<f(\alpha)<0,97$.