# 3. الاستمرارية والنهايات

**الكفاءات المستهدفة**

- فهم معنى دالة مستمرة على مجال.
- فهم خاصية القيم المتوسطة و تطبيقها في البحث عن حلول مقربة لمعادلات من الشكل $f(x)=\lambda$ .
- تعيين نهاية دالة و تعيين المستقيمات المقاربة الموازية للمحورين.
- إثبات وجود مستقيم مقارب مائل و تحديد الوضع النسبي للمنحني بالنسبة إليه.

## تصميم الدرس

**تعريف**

I. المفهوم الحدسي للاستمرارية – خواص

II. مبرهنة القيم المتوسطة

III. تتمات حول النهايات

IV. نهاية دالة مركب دالتين– النهاية بالمقارنة

V. المستقيمات المقاربة

VI. ملخص الدرس

VII. توظيف المعارف (تمارين + حلول وإرشادات)

VIII. تقويم ذاتي (اختيار من متعدد + صحيح أم خاطئ)


جميع الحقوق محفوظة ©

## تعريف:

**كوشي أوغسطين لويس:** عالم رياضيات وفيزياء من جنسية فرنسية عاش في الفترة من 1789م إلى1857م. كان لأعماله التي تميزت بالدقة تأثير عظيم على معظم فروع الرياضيات، وبصفة خاصة وضع أسس التحليل الحديث بدلالة النهايات والاستمرار، وطور نظرية الدوال ذات المتغيرات العقدية. شجعه على متابعة نشاطه في الرياضيات العالم **لابلاس** والعالم **لاغرانج** وأصبح أستاذا للرياضيات في مدرسة البوليتكنيك، جامعة السوربون كلية فرنسا وبسبب آرائه السياسية والدينية رفض أن يقسم يمين الولاء للويس فليب سنة 1830 فنفي مع حفيد تشارلز العاشر وعينته جامعة تورينو في منصب كرسي أستاذية أنشئ من أجله، ولكنه تركه لتعليم حفيد تشارلز العاشر. لقد نشر ما مجموعه 789 عملا، تتضمن مقالات حول التكاملات المحدودة و انتشار الموجات ، كما نشر أوراقا بحثية في الهندسة ونظرية الأعداد والمرونة ونظرية الخطأ والفلك والضوء.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## I. المفهوم الحدسي للاستمرارية – خواص:

**نشاط**

نرمز إلى الجزء الصحيح للعدد الصحيح $x$ بالرمز $E(x)$ أو [ ] .

$n$ عدد صحيح، $E(x)=n$ معناه $x\in[n;n+1[$ .

1. أحسب $E(-2,3)$ ، $E(-1)$ ، $E\left(\sqrt{2}\right)$ و $E(17,12)$ .

2. $f$ هي الدّالة المعرفة على $[1;2[$ بـــ: $f(x)=E(x)$

أ) عين حسب قيم $x$ عبارة كل من $f(x)$ .

ب)أرسم في معلم $(O;I,J)$ المنحني $(C_f)$ الممثل لـِ $f$ .

3.هل بإمكانك رسم المنحني $(C_f)$ بدون رفع القلم ( اليد ) ؟

**حل**

1. $E(-2,3)=-3$ لأن $-2,9\in[-3;-2[$ ، $E(-1)=-1$ لأن $-1\in[-1;0[$

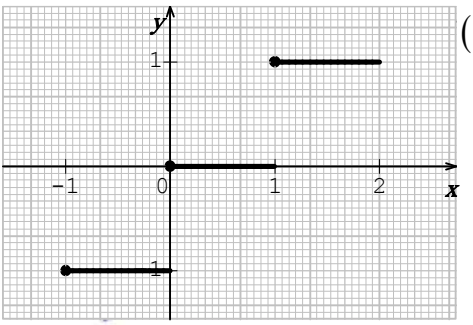
$E\left(\sqrt{2}\right)=1$ لأن $\sqrt{2}\in[1;2[$ ، $E(17,12)=17$ لأن $17,12\in[17;18[$ .

2. أ) من أجل $x\in[-1;0[$ : $f(x)=-1$

من أجل $x\in[0;1[$ : $f(x)=0$

من أجل $x\in[1;2[$ : $(x)=1$

ب) رسم المنحنى $(C_f)$




جميع الحقوق محفوظة ©

3. لا يمكن رسم $(C_f)$ على المجال $]1;2[$ دون رفع القلم.

لاحظ أنه يمكن رسم $(C_f)$ على المجال $\left[1;\frac{3}{2}\right]$ دون رفع القلم.

**ملاحظة**

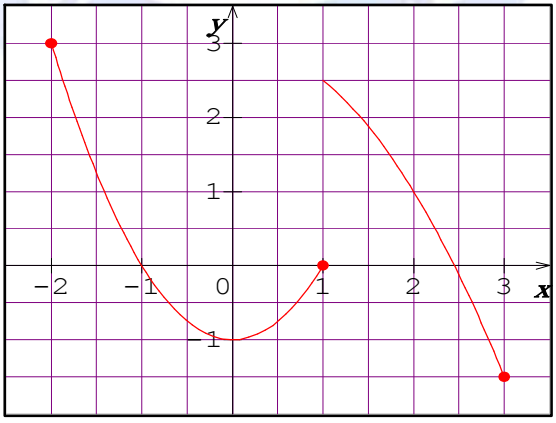
$f$ دالة معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و ليكن $(C)$ منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.

نقول عن $f$ أنها مستمرة على $I$ إذا استطعنا رسم منحنيها $(C)$ بدون رفع القلم وفق خط مستمر.

**مثال1**

الدالة $f$ الممثلة في الشكل المقابل غير مستمرة على المجال $[-2;3]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.

بينما الدالة $f$ مستمرة على كل من المجالين $[-2;1]$ و $]1;3[$.




http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

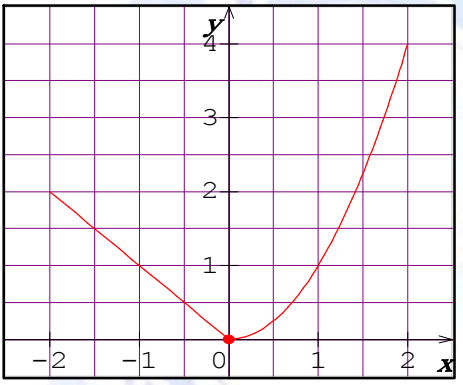
**مثال2**

الدالة $f$ المعرفة على المجال $]-2;2[$ بـِ:

من أجل $x \in ]-2;0]$ : $f(x) = -x$

و من أجل $x \in ]0;2[$ : $f(x) = x^2$

و الممثلة في الشكل المقابل مستمرة على المجال $]-2;2[$ لأنه باستطاعتنا رسم تمثيلها البياني بدون رفع القلم.




**خواص**

نقبل هذه الخواص دون برهان.

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة ( حاصل قسمة كثيري حدود ) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- كل الدوال المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة مستمرة على كل من المجالات التي تكون معرفة عليها.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

## أمثلة

- الدّالة $x \mapsto -2x^3+5x^2+3$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود.
- الدّالة $x \mapsto x^2+\sqrt{x}+\frac{1}{x}$ مستمرة على $]0;+\infty[$ لأنها مجموع دوال مستمرة على $]0;+\infty[$.

## تطبيق 1

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[-1;3]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=-2x+1 & ;x\in[-1;1[ \\ f(x)=x-1 & ;x\in[1;3] \end{cases}$$

أ) أحسب $f(-0,4)$ ، $f(1)$ ، $f(1,7)$.

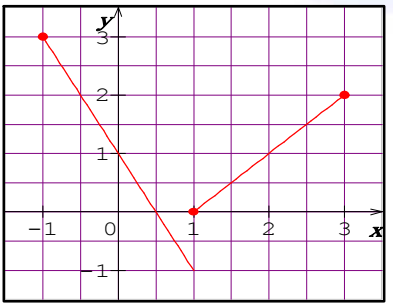
ب) أرسم في معلم التمثيل البياني للدالة $f$ . هل الدالة $f$ مستمرة على المجال $[-1;3]$؟

## حل

أ) $f(-0,4)=-2\times(-0,4)+1=1,8$ **لأن** $0,4\in[-1;1[$

$f(1)=1-1=0$ **لأن** $1\in[1;3]$، $f(1,1)=1,1-1=0,1$ لأن $1,1\in[1;3]$

ب)أنظر الشكل المقابل



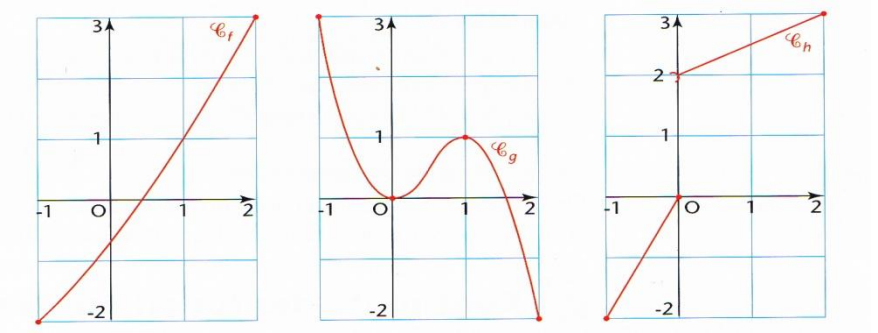

نلاحظ أنه عند رسم المنحني الممثل للدالة $f$ على المجال $[-1;3]$ نقوم حتميا برفع القلم عند النقطة ذات الفاصلة 1 و بالتالي فالدالة $f$ ليست مستمرة على المجال $[-1;3]$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## II. مبرهنة القيم المتوسطة:

**نشاط**

إليك المنحنيات $(C_f)$، $(C_g)$ و $(C_h)$ الممثلة على التوالي لثلاث دوال $f$ ، $g$ و $h$ معرفة على المجال $[-1;2]$ و ليكن $k$ عددا حقيقيا من المجال $[-2;3]$.




1. هل الدوال $f$ ، $g$ و $h$ مستمرة على المجال $[-1;2]$ ؟
2. بواسطة قراءة بيانية حدد، حسب قيم العدد الحقيقي $k$ من $[-2;3]$ عدد حلول كل معادلة من المعادلات التالية:

$f(x)=k$ (1) $\quad g(x)=k$ (2) $\quad h(x)=k$ (3)

3. من أجل كل عدد حقيقي $k$ من المجال $[-2;3]$:

- هل تقبل كل معادلة من المعادلات (1)، (2) ، (3) حلا على الأقل في المجال $[-1;2]$ ؟


جميع الحقوق محفوظة ©

- هل تقبل كل معادلة من المعادلتين (1)، (2) ، حلا وحيدا في المجال $[-1;2]$ ؟

**حل**

الدالتان $f$ و $g$ مستمرتان على $[-1;2]$ لأنه يمكن رسم $(C_f)$ و $(C_g)$ على هذا المجال دون رفع القلم.

الدالة $h$ ليست مستمرة على $[-1;2]$ لأنه لا يمكن رسم $(C_h)$ على هذا المجال دون رفع القلم.

1. بصفة عامة:

إذا كانت دالة $\varphi$ معرفة في مجال $I$ فإن عدد حلول المعادلة $\varphi(x)=k$ هو عدد نقط تقاطع المنحنى $(C_\varphi)$ مع المستقيم الذي معادلته $y=k$ .

- من أجل كل $k$ من $[-2;3]$ المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في $[-1;2]$.
- من أجل $-2 \le k < 0$ أو $1 < k \le 3$ المعادلة $g(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في $[-1;2]$.

ومن أجل $0 \le k \le 1$ المعادلة $g(x)=k$ تقبل حلين في $[-1;2]$.

- من أجل $-2 \le k \le 0$ أو $2 < k < 3$ المعادلة $h(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في $[-1;2]$.

ومن أجل $0 < k \le 2$ المعادلة $h(x)=k$ لا تقبل أي حل في $[-1;2]$.

2.

- نعم (1) تقبل حلا على الأقل في $[-1;2]$ من أجل كل $k$ من $[-2;3]$ و نفس الشيء بالنسبة للمعادلة (2).

http://www.onefd.edu.dz جميع حقوق محفوظة

(3) لا تقبل حلا على الأقل في $[-1;2]$ من أجل كل $k$ من $[-2;3]$

لأن (3) لا تقبل أي حل من أجل $0 < k \leq 2$.

- نعم (1) تقبل حلا وحيدا في $[-1;2]$ من أجل كل $k$ من $[-2;3]$.

(2) لا تقبل حلا وحيدا في $[-1;2]$ من أجل كل $k$ من $[-2;3]$ لأن

إذا كان $0 \leq k \leq 1$ المعادلة (2) تقبل حلين في $[-1;2]$.

**ملاحظات**

م1) (3) لا تقبل حلا في $[-1;2]$ من أجل كل $k$ ن $[-2;3]$ و لاحظ أن $h$ غير مستمرة على $[-1;2]$.

م2) (1) تقبل حلا وحيدا في $[-1;2]$ من أجل كل $k$ من $[-2;3]$ لاحظ أن الدالة $f$ متزايدة تماما على $[-1;2]$.

م3) (2) لا تقبل حلا وحيدا في $[-1;2]$ من أجل كل $k$ من $[-2;3]$ لاحظ أن الدالة $g$ ليست متزايدة تماما على $[-1;2]$ و ليست متناقصة تماما على $[-1;2]$.

**مبرهنة**

$f$ دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.

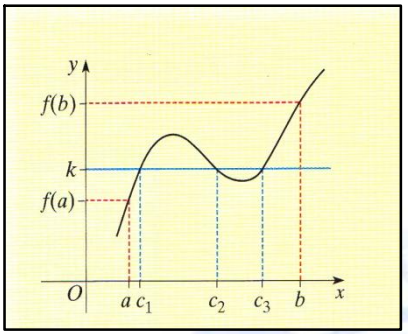
من أجل كل عدد حقيقي $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي $c$ محصور بين $a$ و $b$ بحيث $f(c) = k$.

**صيغة أخرى للمبرهنة**

إذا كانت $f$ دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا $c$ محصورا بين $a$ و $b$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة

## التفسير البياني




$f$ دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ و ليكن $(C)$ منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.

من أجل كل عدد حقيقي $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحني $(C)$ في نقطة فاصلته $c$ محصورة بين $a$ و $b$.

بالنسبة للشكل المقابل $(\Delta)$ يقطع $(C)$ في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب $c_1$، $c_2$، و $c_3$.

## نتيجة

إذا كانت الدالة $f$ مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على مجال $[a;b]$ فإن جدول تغيراتها يأخذ أحد الشكلين التاليين:

| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(a)$ | $\searrow$ | $k$ | $\searrow$ | $f(b)$ |

| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(a)$ | $\nearrow$ | $k$ | $\nearrow$ | $f(b)$ |

و بالتالي فإنه من أجل كل عدد حقيقي $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلا وحيدا $x_0$ في المجال $[a;b]$

تذكر أن الأسهم المائلة في جدول تغيرات دالة تترجم استمرارية و رتابة الدالة على المجال المعتبر.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## تطبيق1

برهن أن المعادلة $x^3-2x=-2$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-2;1]$

## حل

يمكن كتابة المعادلة $x^3-2x=-2$ على الشكل $f(x)=-2$ حيث $f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x^3-2x$.

$f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ إذن على $[-2;1]$ لأنها دالة كثير حدود.

لدينا $f(-2)=-4$ و $f(1)=-1$ ،

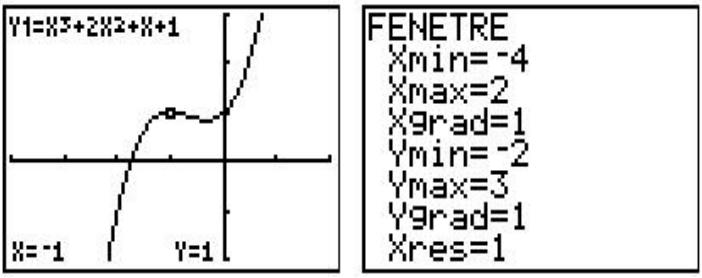
نلاحظ عندئذ أن $-2$ محصور بين العددين $f(-2)$ و $f(1)$

إذن المعادلة $x^3-2x=-2$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-2;1]$.

## تطبيق2

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=x^3+2x^2+x+1$.

تعرض الحاسبة البيانية الشكل أدناه:




بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في مجال يطلب تحديده.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

**حل**

بما أن $f$ دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[-2;-1]$.

لدينا من جهة ثانية $f(-2)=-1$ و $f(-1)=1$

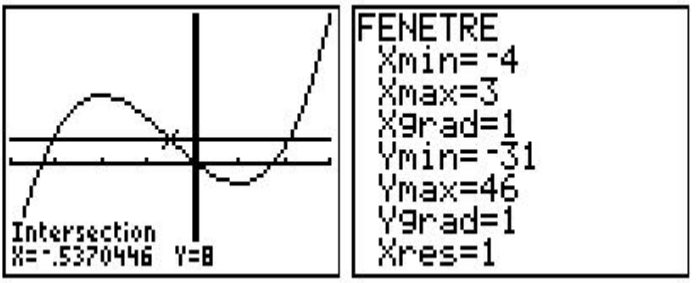
بما أن 0 محصور بين $-1$ و 1 أي بين $f(-2)$ و $f(-1)$

إذن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;-1]$.

**تطبيق3**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[-4;3]$ بـِ: $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

تعرض الحاسبة البيانية الشكل:




1. أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .
2. بين أن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2;1]$.
3. باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا لهذا الحل سعته $10^{-2}$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

**حل**

1. من أجل كل $x$ من $[-4;3]$، $f'(x)=6x^2+6x-12$

أي $f'(x)=6\left(x^2+x-2\right)$ أي $f'(x)=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$ إذا وفقط إذا كان $(x+2)(x-1)=0$ أي $x=1$ أو $x=-2$

$f'(x)<0$ إذا وفقط إذا كان $-2<x<1$

$f'(x)>0$ إذا وفقط إذا كان $x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

ومنه $f$ متزايدة تماما على المجال $[-2;1]$

و $f$ متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;-2]$ و $[1;+\infty[$ .

| $x$ | $-4$ | | $-2$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-31$ | ↗ | $21$ | ↘ | $-6$ | ↗ | $46$ |

2. لدينا $f$ تحقق:

1) $f(-2)=21$ و $f(1)=-6$ و $-6\le 8\le 21$ .

2) $f$ دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ وبصفة خاصة على $[-2;1]$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f(x)=8$ تقبل على الأقل حلا $c$ في المجال $[-2;1]$. وبما أن $f$ متناقصة تماما على $[-2;1]$ فإن $c$ وحيد.

3. لتعيين حصر للحل $c$ يمكننا، بعد تمثيل المستقيم ذي المعادلة $y=8$ ، إظهار قيم مقربة لإحداثيتي نقطة التقاطع وهكذا نقرأ $c\approx -0,5370446$

ومنه نستنتج الحصر التالي: $-0,54<c<-0,53$ .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## III.تتمات حول النهايات:

### نشاط1

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـــ: $f(x)=\dfrac{4x^2-3x-1}{x^2}$ .

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني

1.احسب نهاية الدالة $f$ عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ و عند 0.

باستعمال المبرهنات حول النهايات المدروسة في السنة الثانية.

2.ماذا تستنتج فيما يخص المستقيم المقارب للمنحني $(C_f)$ ؟

### حل

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2}{x^2}=4$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2}{x^2}=4$

لأن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}(4x^2-3x-1)=1\\ \lim\limits_{x\to0} x^2=0^+\end{cases}$ .

2. إذن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4\end{cases}$ $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=4$ .

إذن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$ $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$ .

### نشاط 2

**تذكير:** $u$ و $v$ دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـــ: $u(x)=x^2$ و $v(x)=\dfrac{9x^2+7x}{x^2+1}$ .

نضع $f=u\circ v$ .

1) عبر عن $f(x)$ بدلالة $x$ .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

2) احسب $\lim_{x\to-\infty} u(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} v(x)$ ثم $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ . ماذا تلاحظ؟

**حل**

1) $f(x)=u\left[v(x)\right]=u\left[\frac{9x^2+7x}{x^2+1}\right]=\left(\frac{9x^2+7x}{x^2+1}\right)^2$ .

2) $\lim_{x\to3} u(x)=3^2=9$ .

$\lim_{x\to-\infty} v(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2+7}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2}{x^2}=9$ (النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة).

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{81x^4+126x^3+49x^2}{x^4+2x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{81x^4}{x^4}=81$ .

نلاحظ:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} u\left[v(x)\right]=\lim_{y\to3} u[y]=3^2=9$$

وضعنا $y=v(x)$ و $y\to3$ عندما $x\to-\infty$ .

## نهايات الدوال المرجعية

* $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ * $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$ * $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

* $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ * $\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

* $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ * $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

* $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ * $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

* $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x}=+\infty$ * $\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{x}=-\infty$


جميع الحقوق محفوظة ©

## العمليات على النهايات

$f$ و $g$ دالتان. $a$ يمثل عددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$. نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

### أ. نهاية مجموع دالتين

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l \in \mathbb{R}$ | $l \in \mathbb{R}$ | $l \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} g(x)$ | $l' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x\to a} \left(f(x)+g(x)\right)$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | حالة عدم التعيين | $-\infty$ |

### ب. نهاية جداء دالتين

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l \in \mathbb{R}$ | $l>0$ | $l>0$ | $l<0$ | $l<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} g(x)$ | $l' \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x\to a} \left(f(x)\times g(x)\right)$ | $l\times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | حالة عدم التعيين | |

### ج. نهاية حاصل قسمة دالتين

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $l \in \mathbb{R}$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} g(x)$ | $l' \in \mathbb{R}^*$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $l>0$ | $l<0$ | $l>0$ | $l<0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ | $\frac{l}{l'}$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | حالات عدم التعيين | | | | |

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "**عدم التعيين**" ( ح ع ت ).


جميع الحقوق محفوظة ©

## نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

### قاعدة1

النهاية عند $+\infty$ أوعند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة.

### قاعدة2

النهاية عند $+\infty$ أوعند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة.

### مثال

لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـِ : $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$

لدينا حالة عدم التعيين بالنسبة لنهاية $f$ عند $+\infty$ إلاّ أنه بتطبيق القاعدة 2 نتحصل على $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$ .

### تطبيق1

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{0;2\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-2x}$

1. حدد حسب قيم $x$ إشارة $x^2-2x$ .
2. احسب نهاية الدالة $f$ عند 2 ثمّ عند $-\infty$ .

### حل

1. $x^2-2x=x(x-2)$ و بتطبيق قاعدة إشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية نحصل على:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

http://www.oneld.edu.dz جميع الحقوق محفوظة

2.لدينا: $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+x+1\right)=7$ و $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-2x\right)=0$

بما أنه من أجل $0<x<2$ ، $x^2-2x<0$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=-\infty$

و بما أنه من أجل $x>2$ ، $x^2-2x>0$ فإن $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=+\infty$

3.لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

من الواضح أننا بصدد حالة عدم التعيين إلا أن تطبيق القاعدة 2 يمكننا من إزالتها فنحصل على: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

## تطبيق2

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]2;+\infty[$ بـــ: $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-2}$

أدرس نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$.

## حل

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$

من الواضح أننا بصدد حالة عدم التعيين و عليه فلابد من إزالتها و من أجل ذلك نتبع الطريقة التالية:

لدينا من أجل كل $x$ من $]2;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{x\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1-\dfrac{2}{x}}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)=1$ فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

ملاحظة: الدالة $f$ ليست دالة ناطقة لأن البسط ليس كثير حدود بسبب وجود $\sqrt{x}$

فمن الخطأ إذن تطبيق القاعدة2 القاعدة 2 لإزالة حالة عدم التعيين.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## IV. نهاية دالة مركب دالتين – النهاية بالمقارنة:

### نشاط

**تذكير:** $u$ دالة معرفة على مجال $J$ و $v$ دالة معرفة على مجال $I$ بحيث من أجل كل $x$ من $I$، $v(x) \in J$.

الدالة المركبة من الدالتين $v$ و $u$ بهذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $u \circ v$ و المعرفة على $I$ بـ $(u \circ v)(x) = u[v(x)]$.

$u$ و $v$ دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـــ:

$u(x) = x^2$ و $v(x) = \dfrac{9x^2 + 7x}{x^2 + 1}$. نضع $f = u \circ v$.

1) عبر عن $f(x)$ بدلالة $x$.

2) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} v(x)$ ثمّ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. ماذا تلاحظ؟

### حل

1) $f(x) = u[v(x)] = u\left[\dfrac{9x^2 + 7x}{x^2 + 1}\right] = \left(\dfrac{9x^2 + 7x}{x^2 + 1}\right)^2$.

2) $\lim\limits_{x \to 3} u(x) = 3^2 = 9$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} v(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{9x^2 + 7}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{9x^2}{x^2} = 9$ (النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة).

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{81x^4 + 126x^3 + 49x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{81x^4}{x^4} = 81$.

نلاحظ:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} u[v(x)] = \lim\limits_{y \to 3} u[y] = 3^2 = 9$ (وضعنا $y = v(x)$)

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

و $y \to 3$ عندما $x \to -\infty$).

## الدالة مركب دالتين

### تعريف

$u$ دالة معرفة على مجال $J$ و $v$ دالة معرفة على مجال $I$ بحيث من أجل كل $x$ من $I$، $v(x) \in J$.

الدالة المركبة من الدالتين $v$ و $u$ بهذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $u \circ v$ و المعرفة على $I$ بـِ: $(u \circ v)(x) = u[v(x)]$

و نقرأ $u$ دائرة $v$ لـِ $x$.

### مثال

نعتبر الدالتين $u$ و $v$ المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$v(x) = 2x^2 - 3 \quad \text{و} \quad u(x) = -3x + 1$$

* الدالة $u \circ v$ معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$u \circ v(x) = u[v(x)] = u(2x^2 - 3) = -3(2x^2 - 3) + 1 = -6x^2 + 10$$

* الدالة $v \circ u$ معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$v \circ u(x) = v[u(x)] = v(-3x + 1) = 2(-3x + 1)^2 - 3 = 18x^2 - 12x - 1$$

## نهاية دالة مركب دالتين

### مبرهنة

$a$، $b$ و $c$ تمثل أعددا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.

$u$، $v$ و $f$ دوال حيث $f = v \circ u$.

إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ و $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

## مثال

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـــ: $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}}$

نريد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

نلاحظ أن $f$ هي مركب الدالتين $v$ و $u$ بهذا الترتيب حيث

$u(x)=\sqrt{x}$ و $v(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ $\left(f=u\circ v\right)$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to2} u(x)=\sqrt{2}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{2}$

## حساب النهايات بالمقارنة

$f$ ، $g$ و $h$ دوال و $l$ عدد حقيقي.

## خاصية1

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$ و إذا كان من أجل $x$ كبير بالقدر الكافي $g(x)\le f(x)\le h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ .

## خاصية2

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و إذا كان من أجل $x$ كبير بالقدر الكافي $f(x)\ge g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$


جميع الحقوق محفوظة ©

**خاصية3**

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ و إذا كان من أجل $x$ كبير بالقدر الكافي $f(x)\le g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

**ملاحظة**

تمدد هذه الخواص إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ و عند عدد حقيقي.

**تطبيق1**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=2\left(2-\frac{3}{x}\right)^2-3$

أدرس نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$، عند $+\infty$ و عند $0$.

**حل**

نلاحظ مثلا أن الدالة $f$ هي الدالة المركبة من الدالتين $u$ و $v$ بهذا الترتيب حيث $u:x\mapsto 2-\frac{3}{x}$ و $v:x\mapsto 2x^2-3$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)=2$ * $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)=2$ وبما أن $\lim\limits_{x\to2}\left(2x^2-3\right)=5$

فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$

أي: $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=2$ و بما أن $\lim\limits_{x\to2} v(x)=5$

فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left(-\frac{3}{x}\right)=+\infty$ * و منه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} u(x)=+\infty$ و بما

أن $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=+\infty$


جميع الحقوق محفوظة ©

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \left(-\frac{3}{x}\right) = -\infty$ * و منه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} u(x) = -\infty$ و بما أن $\lim\limits_{x \to -\infty} v(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$ .

**تطبيق2**

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f(x) \leq 2x - 1$

عين نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ . هل يمكن استنتاج نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ ؟

**حل**

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x-1) = -\infty$ و بما أن من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f(x) \leq 2x - 1$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ .
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1) = +\infty$ و بما أن $f(x) \leq 2x - 1$ فهذا لا يسمح من استنتاج نهاية $f$ عند $+\infty$ .

**تطبيق3**

$f$ هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بحيث تحقق من أجل كل $x$ من المجال $]-\infty;0[$ : $\frac{x^2-1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{x-1}{x}$

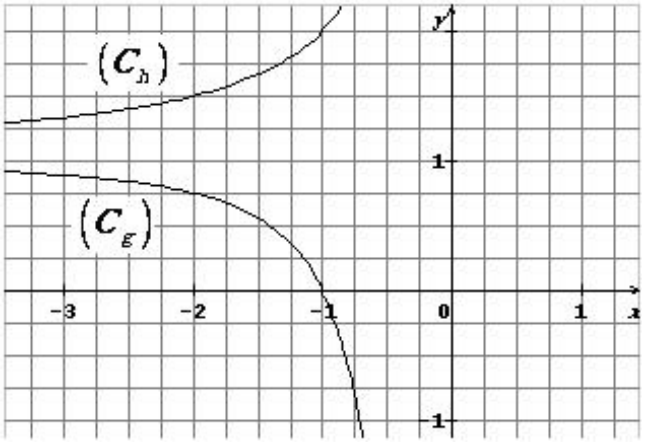
يعطى أدناه المنحنى $(C_g)$ الذي يمثل الدالة $g$ المعرفة على $]-\infty;0[$ بالعبارة $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$ والمنحنى $(C_h)$ الذي يمثل الدالة $h$ المعرفة على $]-\infty;0[$ بالعبارة: $h(x) = \frac{x-1}{x}$ .

1. عين نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

2.أرسم تمثيلا بيانيا يمكن أن يكون هو المنحني $(C)$ الممثل للدالة $f$ .

أنظر الشكل في الصفحة الموالية.

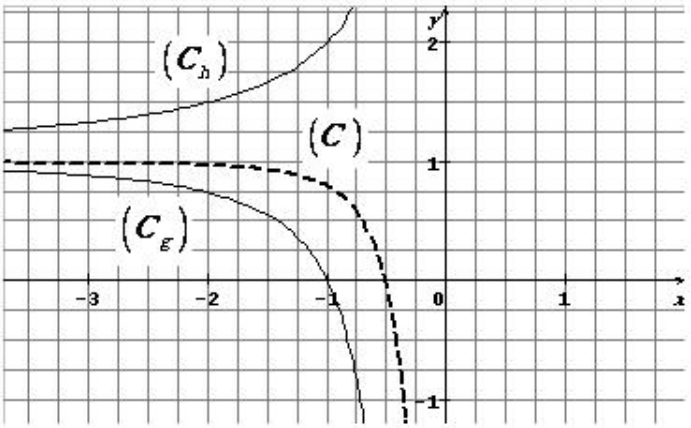



**حل**

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

و منه حسب الخاصية 1 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

2.يقع المنحني $(C)$ الممثل للدالة $f$ بين المنحنيين $(C_g)$ و $(C_h)$.




http:/

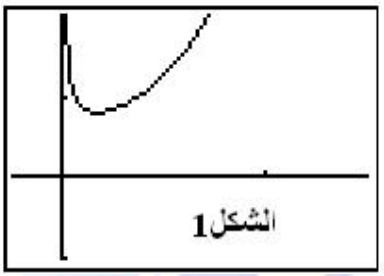
## V. المستقيمات المقاربة:

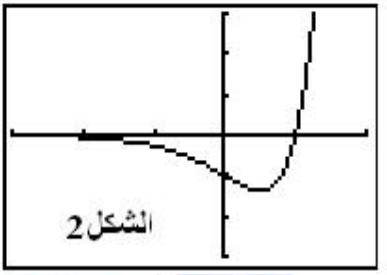
**نشاط1**

علما أن:

ا) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ب) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$

أرفق كل دالة من الدالتين $f$ ، $g$ بتمثيلها البياني من بين:




**حل**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ إذن المنحني $(C_f)$ الذي يمثل الدالة $f$ يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ (محور الفواصل).

  نشاهد عندئذ في الشكال1، المنحني $(C_f)$.

- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$ إذن المنحني $(C_g)$ الذي يمثل الدالة $g$ يقبل عند مقاربا معادلته $x=0$ (محور التراتيب).

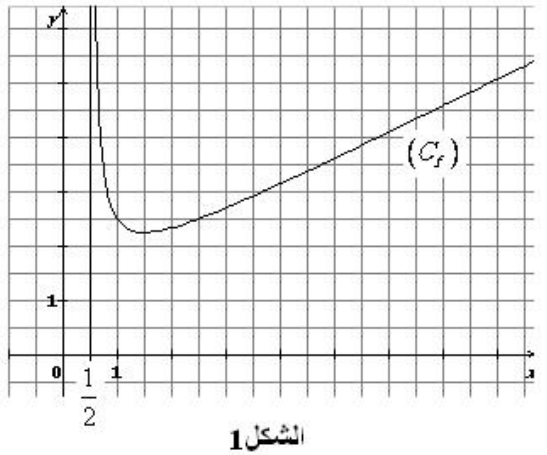
  نشاهد عندئذ في الشكل2، المنحني $(C_g)$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

## نشاط2

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $f(x)=\frac{2x^2+3x}{4x-2}$

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في الشكل1.




الشكل1

1)فسر بيانيا $\left|x-\frac{1}{2}\right|$ و احسب نهاية $f$ عندما $\left|x-\frac{1}{2}\right|$ يؤول إلى0.

ماذا نستنتج؟

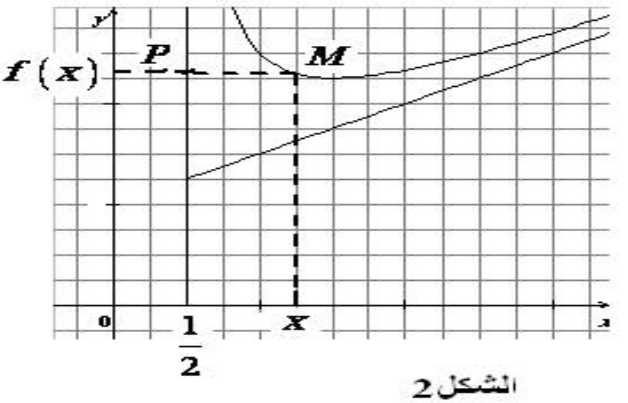
2)فسر بيانيا $\left|f(x)-\left(\frac{x}{2}+1\right)\right|$ و احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|f(x)-\left(\frac{x}{2}+1\right)\right|$ .

ماذا نستنتج؟

## حل

1) نعتبر نقطة $M(x;f(x))$ من $(C_f)$ و النقطة $P\left(\frac{1}{2};f(x)\right)$ من المستقيم الذي معادلته $x=\frac{1}{2}$ ( انظر الشكل2)

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©




الشكل 2

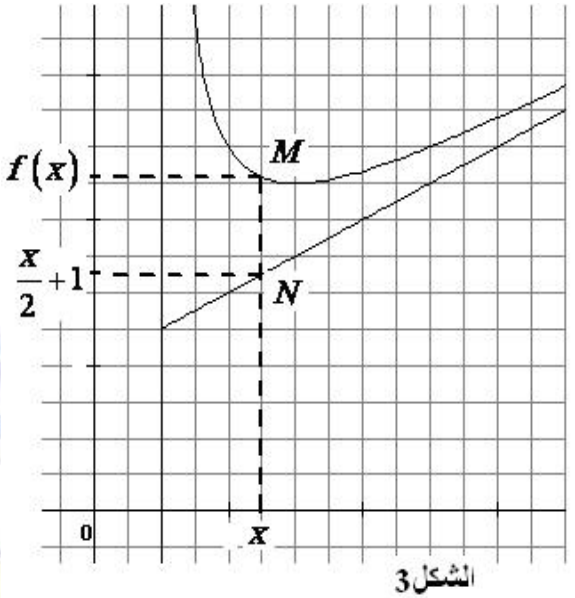
لدينا : $MP = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ .

$f$ تؤو ل إلى $+\infty$ عندما $M$ تؤول إلى $P$ أي عندما $MP$ يؤول إلى 0 أي عندما $\left|x - \frac{1}{2}\right|$ يؤول إلى0.

نستنتج أن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x = \frac{1}{2}$ .

2) نعتبر نقطة $M\left(x; f(x)\right)$ من $(C_f)$ و النقطة $N\left(x; \frac{x}{2}+1\right)$ من المستقيم الذي معادلته $y = \frac{x}{2}+1$ ( انظر الشكل3)

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©



الشكل3

إذن $\left|f(x)-\left(\frac{x}{2}+1\right)\right|=\left|\frac{1}{2x-1}\right|$ . $MN=\left|\frac{1}{2x-1}\right|$

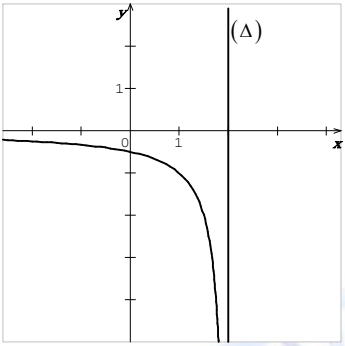
لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left|f(x)-\left(\frac{x}{2}+1\right)\right|=0$ إذن $MN$ يؤول إلى 0 عندما $x$ يؤول إلى $+\infty$ .

نستنتج أن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=\frac{x}{2}+1$ .

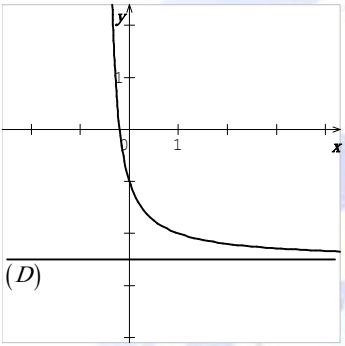
**تذكير**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان. $f$ دالة معرفة على مجال $I$ و $(C)$ تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

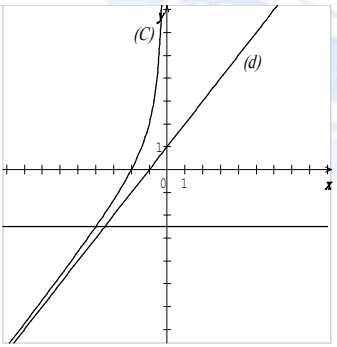
http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©




1. إذا كانت $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (أو $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$) فإنّ المستقيم $(\Delta)$ المعادلة $x = a$ والموازي لمحور التراتيب هو مستقيم مقارب للمنحني $(C)$ عند $+\infty$ (أو عند $-\infty$)




2. إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ أو $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ فإنّ المستقيم $(D)$ ذو المعادلة $y = b$ والموازي لمحور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحني $(C)$ عند $+\infty$ (أو عند $-\infty$)




3. إذا كانت $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ أو $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ فإنّ المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني $(C)$ عند $+\infty$ (أو عند $-\infty$)

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## ملاحظة

إذا كانت الدالة $f$ معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$

أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ فمن الواضح أن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة $f$.

## مثال

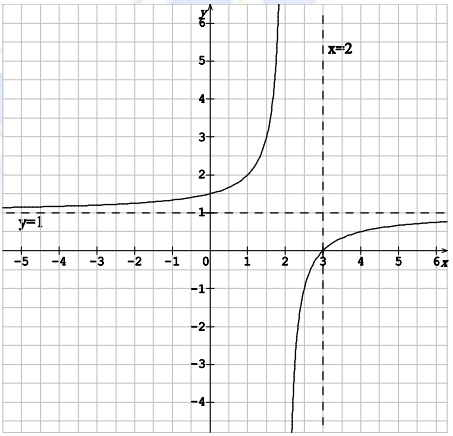
نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$f:x\mapsto 1-\dfrac{1}{x-2}$ و ليكن $(C)$ تمثيلها البياني.

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=-\infty$

و منه المستقيم ذو المعادلة $x=2$ مستقيم مقارب للمنحني $(C)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. و منه المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني $(C)$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ .




http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

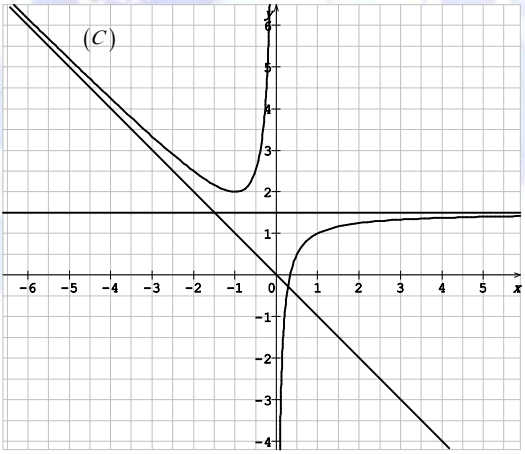
## الوضع النسبي لمنحن والمستقيم المقارب

لدراسة وضعية المنحني $(C)$ الممثل لدالة $f$ بالنسبة إلى مستقيم مقارب له معادلته $y=ax+b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $\left[f(x)-(ax+b)\right]$.

إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ تكون وضعية $(C)$ تحت المستقيم المقارب المائل. إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ تكون وضعية $(C)$ فوق المستقيم المقارب المائل.

### تطبيق 1

المنحني $(C)$ المرسوم في الشكل المقابل هو لدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$. رسمت المستقيمات المقاربة لهذا المنحني باللون الأزرق.




بواسطة قراءة بيانية:

1. حدد معادلات المستقيمات المقاربة.
2. عين نهايات الدالة $f$ عند كل من $-\infty$، $0$ و $+\infty$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

**حل**

1) للمنحني $(C)$ ثلاث مستقيمات مقاربة أولها محور التراتيب $(x=0)$، الثاني عند $+\infty$ موازي لمحور الفواصل معادلته $y=1$ و الثالث عند $-\infty$ مائل معادلته $y=-x$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=+\infty$

**تطبيق2**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ $f(x)=-x+2+\dfrac{3}{x^2}$

و ليكن $(C)$ تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

1. بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=-x+2$ مستقيم مقارب للمنحني $(C)$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

2. أدرس وضعية المنحني $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل $(\Delta)$.

**حل**

1. لدينا: $f(x)-(-x+2)=\dfrac{3}{x^2}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$ فإن $(\Delta)$ مستقيم مقارب لـ $(C)$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

2. لدينا: $f(x)-(-x+2)=\dfrac{3}{x^2}$ و بما أن $\dfrac{3}{x^2}>0$ فإن المنحني $(C)$ يقع فوق المستقيم المقارب $(\Delta)$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

## تطبيق3

تنتج إحدى الورشات أقلاما.

الكلفة الإجمالية $C(q)$ بـِ $DA$ لصنع كمية $q$ من الأقلام هي:

$$C(q)=5q+100 \quad \text{حيث} \quad q>0$$

1. عين بدلالة $q$ الكلفة المتوسطة $C_M(q)$ بـِ $DA$ لإنتاج قلم.
2. أدرس نهاية $C_M$ عند $+\infty$. أعط تفسيرا بيانيا و آخر اقتصاديا لهذه النتيجة.

## حل

1. الكلفة المتوسطة $C_M(q)$ لإنتاج وحدة هي نسبة الكلفة الإجمالية $C(q)$ على الكمية $q$ و منه:

$$C_M(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{5q}{q}+\frac{100}{q}=5+\frac{100}{q}$$

2. لدينا: $\lim\limits_{q\to+\infty}\frac{100}{q}=0$ و منه $\lim\limits_{q\to+\infty}C_M(q)=5$

* التفسير البياني: المنحني الممثل للدالة $C_M$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=5$.
* التفسير الاقتصادي: عندما ترتفع الكمية المنتجة $q$ بقدر كبير نلاحظ استقرار الكلفة المتوسطة عند $DA$ 5.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

## VI. ملخص الدرس:

### 1. مبرهنة القيم المتوسطة

$f$ دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.
من أجل كل عدد حقيقي $k$ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي $c$ محصور بين $a$ و $b$ بحيث $f(c)=k$

**ملاحظة**

تستعمل هذه المبرهنة خاصة للتأكد من وجود حل للمعادلة $f(x)=k$ بيانيا أو جبريا وحصره بين العددين $a$ و $b$ .

### 2. نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لحساب نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ وعند $-\infty$ يكفي حساب نهاية حدها الأعلى درجة.

لحساب نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة نحسب نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة في كل من البسط والمقام.

### 3. النهايات بالمقارنة

$f$ ، $g$ و $h$ دوال و $l$ عدد حقيقي.

* إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$ و $g(x)\le f(x)\le h(x)$ من أجل $x$ كبير بقدر كاف فإنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ .

* إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $f(x)\ge g(x)$ من أجل $x$ كبير بقدر كاف فإنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

* إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ و $f(x) \le g(x)$ من أجل $x$ كبير بقدر كاف فإنّ: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

**ملاحظة**

تمدد هذه الخواص إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ و عند عدد حقيقي.

## 4. المستقيمات المقاربة

* يكون المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $x = a$ مستقيما مقاربا لمنحنى دالة $f$ عند $+\infty$ مواز لمحور التراتيب، إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ .

* يكون المستقيم $(D)$ ذو المعادلة $y = b$ مستقيما مقاربا لمنحنى دالة $f$ عند $+\infty$ مواز لمحور الفواصل، إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ .

* يكون المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيما مقاربا مائلا لمنحنى دالة $f$ عند $+\infty$ إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ .

**ملاحظة**

تمدد هذه نتائج الحالتين الثانية والثالثة إلى الحالة التي يؤول فيها $x$ إلى $-\infty$ ، كما يلي:

* يكون المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $x = a$ مستقيما مقاربا لمنحنى دالة $f$ عند $-\infty$ مواز لمحور التراتيب، إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ .

* يكون المستقيم $(D)$ ذو المعادلة $y = b$ مستقيما مقاربا لمنحنى دالة $f$ عند $-\infty$ مواز لمحور الفواصل، إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ .

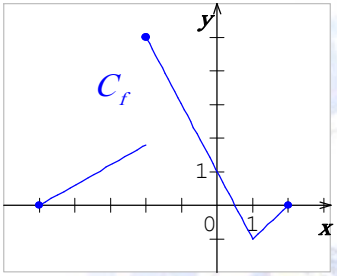
* يكون المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيما مقاربا مائلا لمنحنى دالة $f$ عند $-\infty$ إذا كانت $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## VII. توظيف المعارف:

### أ. تمارين

#### الاستمرارية




**1.** $f$ دالة معرفة على $[-5;2]$ . يعطى تمثيلها البياني كما هو موضح في الشكل المقابل.

1) هل $f$ مستمرة على $[-5;2]$ ؟ لماذا؟

2) هل $f$ مستمرة على $[0;2]$ ؟ لماذا؟

3) اذكر المجالات تكون $f$ مستمرة عليها.

**2.** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = -x+2 \; ; \; x \in ]-\infty;1] \\ f(x) = \sqrt{x} \; ; \; x \in ]1;+\infty[ \end{cases}$$

1) ارسم المنحني الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس

2) هل الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا ؟

**3.** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[0;2[$ كما يلي: $f(x) = x+1+E(x)$

1) اكتب، حسب قيم $x$ ، عبارة $f(x)$ بدون العبارة $E(x)$ .

2) ارسم المنحني الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس.

3) هل $f$ مستمرة على $[0;2[$؟

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

4) عين المجالات التي تكون $f$ مستمرة عليها.

## الاستمرارية والمعادلات

**4.** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}-x-1 \ ; & x\in ]-\infty;-1[\\ -x^2+2x+3 \ ; & x\in [-1;3]\\ x-3 \ ; & x\in ]3;+\infty[\end{cases}$$

1) مثّل في معلم متعامد ومتجانس منحنى الدالة $f$ .

2) هل الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

3) عين بيانيا حلول المعادلة $f(x)=0$ .

**5.** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=2x^3+2x+3$

1) احسب $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ .

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$، حيث $-1\le\alpha\le 0$ .

**6.** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[1;3]$ بـــ: $f(x)=x^3-5x^2+3x+4$

1) احسب $f'(x)$ و عين اتجاه تغير الدالة $f$ .

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $[1;2]$.

**7.** $f$ هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ: $f(x)=x+\sqrt{x}$

1) برّر لماذا الدالة $f$ مستمرة على $[0;+\infty[$ ؟

2) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ .


جميع الحقوق محفوظة ©

3) احسب $f(3)$ و $f(4)$ . استنتج أن المعادلة $f(x)=5$ تقبل حلا وحيدا على المجال $[3;4]$.

## العمليات على النهايات

**8.** عين النهايات التالية:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x+2-\frac{1}{x}\right)$ •
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)$ •
- $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left(-2x+1+\frac{3}{x}\right)$ •
- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left(1-x-\frac{1}{x+1}\right)$ •

**9.** عين النهايات للدالة $f$ عند حدود مجوعة التعريف $D_f$ .

أ) $f(x)=x+\frac{2}{x+1}$ ، $D_f=]-\infty;-1[$

ب) $f(x)=1-2x+\frac{3}{2-x}$ ، $D_f=]2;+\infty[$

ج) $f(x)=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$ $D_f=]-\infty;1[$

**10.** عين النهايات للدالة $f$ عند الحدود المفتوحة لمجوعة تعريفها $D_f$

أ) $f(x)=(x-2)\sqrt{x+1}$ ، $D_f=[-1;+\infty[$

ب) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x}}+\frac{2}{x-1}$ ، $D_f=]0;1[$

ج) $f(x)=2+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ ، $D_f=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$


جميع الحقوق محفوظة ©

**11.** عين النهايات للدالة $f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ في كل حالة مما يلي:

1) $f(x)=x^3+5x-1$

2) $f(x)=-3x^3+2x^2$

3) $f(x)=\left(-x^3+x-1\right)(1-x)$

4) $f(x)=\left(x^2-1\right)^3\left(2-x^3\right)^2$

5) $f(x)=-2x^4+x^2-6$

6) $f(x)=\left(-2x^2+3\right)\left(1-x^2\right)$

**12.** عين النهايات للدالة $f$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ محددا مجموعة التعريف في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\dfrac{-5x}{2x+1}$ ؛ 2) $f(x)=\dfrac{2x^2-4x+3}{-x+1}$ ؛

3) $f(x)=\dfrac{2x}{(2-x)^2}$ ؛ 4) $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x^2+x-2}$ ؛ 5) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$ .

**13.** احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+3}{2x-2}$ ، $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-2x+1}{3-x}$ ، $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-7}{x+2}$ ، $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{x^2+1}{(2x-1)^2}$ ،

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-1}$ ، $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{x^2+4x-5}$ .


جميع الحقوق محفوظة ©

## المستقيمات المقاربة

**14.** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $]2;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=1+\dfrac{2}{4-x^2}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني.

1) عين المستقيمين المقاربين للمنحنى $(C_f)$.

2) حدّد وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى مستقيمه المقارب الأفقي $(\Delta)$.

**15.** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $]1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=\dfrac{-x^2+4x-1}{x-1}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني.

1) عين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) عين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ بحيث من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ :

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

ب) استنتج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل المستقيم $D$ الذي معادلته $y=-x+3$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$

3) عين نهاية $f$ عند 1 ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

**16.** 1) بيّن أنّ المنحنى $(C)$ الذي معادلته $y=\dfrac{2x^2+5x+11}{2x+3}$

حيث $x\neq-\dfrac{3}{2}$ يقبل المستقيم $D$ الذي معادلته $y=x+1$ مستقيما مقاربا عند $-\infty$.

2) ادرس الوضعية النسبة للمنحنى $(C)$ و المستقيم $D$ .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

**17.** لتكن الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

نسمي $(C)$ المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1) احسب نهايات الدالة عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند $-1$ .

2) بين أن المستقيم $D$ الذي معادلته $y=x-2$ مستقيم مقارب عند $+\infty$ و عند $-\infty$ للمنحني $(C)$.

3) ادرس وضعية المنحني $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم $D$ .

## الدالة المركبة

**18.** نعتبر الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^*$ على الترتيب كما يلي:

$$f(x)=x^2+1 \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{x-1}{x}$$

1) عين مجموعة تعريف كل من $f\circ g$ و $g\circ f$ .

2) احسب $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$.

**19.** اكتب $f$ على شكل مركب دالتين، $u$ متبوعة بدالة $v$ في كل حالة من الحالتين التاليتين:

أ) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

ب) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

**20.** نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

$$h(x)=\sqrt{2x^2-5x+2010}$$

1) عبر عن $h$ كمركب دالتين ($f$ متبوعة بـــ $g$) يطلب تعيينهما.

2) عين $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

3) استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ .

## النهايات بالمقارنة

**.21** علما أنه من اجل كل $x\in]0;+\infty[$ :

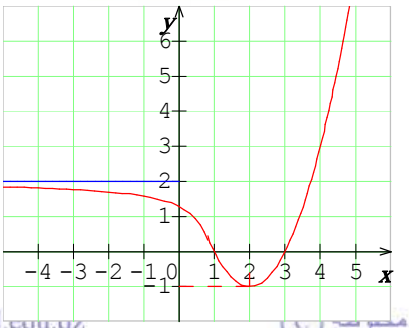
$\dfrac{x}{x+2}\le f(x)\le\dfrac{x+1}{x}$ ، ما هي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؟

**.22** علما أنه من اجل كل $x\in\mathbb{R}$ :

$f(x)\le -2x^3$ ، ما هي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؟

## تمارين للتعمّق

**.23** لتكن الدالة $f$ المعرفة و المستمرة على $\mathbb{R}$ و $C_f$ هو تمثيلها البياني في الشكل التالي:




http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة

1) شكل جدول تغيرات الدالة $f$ مبينا فيه النهايات و القيمة الحدية للدالة $f$ و نقط تقاطع $C_f$ مع محور الفواصل.

2) $g$ هي الدالة المعرفة بـــ $g(x)=\left[f(x)\right]^2$

أ) جد دالة $u$ حيث تكون $g$ مركب الدالة $f$ متبوعة بـــ $u$.

بين لماذا $g$ معرفة على $\mathbb{R}$ ؟

ب) باستعمال السؤال السابق ، ادرس نهايات $g$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$، ثم حدد معادلات المستقيمات المقاربة المحتملة للمنحني الذي يمثل الدالة $g$.

3) $h$ و $k$ دالتان معرفتان بـــ:

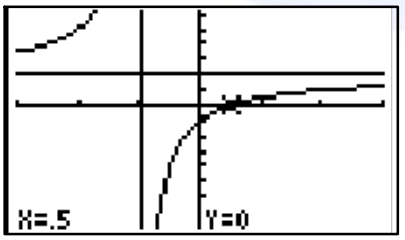
$$h(x)=\sqrt{f(x)} \quad \text{و} \quad k(x)=\frac{1}{f(x)}$$

أ) حدد مجموعة تعريف كل من $h$ و $k$ .

ب) ادرس نهايات الدالتين $h$ و $k$ عند حدود مجموعة تعريفهما ثم عين معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنييهما البيانيين.

24. $f$ دالة عددية عبارتها من الشكل $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ .

أعطي تمثيلها البياني على شاشة حاسبة بيانية كما هو موضح في الشكل المقابل:




عين عبارة $f(x)$ بدلالة $x$ .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## 25

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[-1;2[$ بـــ: $f(x)=xE(x)+1$

حيث الدالة $x \mapsto E(x)$ هي الدالة الجزء الصحيح (أنظر النشاط الأول )

1. عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات: $[-1;0[$ ، $[0;1[$ و $[1;2[$.
2. أرسم في معلم $(O;I,J)$ المنحني الممثل للدالة $f$ .
3. هل الدالة $f$ مستمرة على المجال $[-1;1]$؟ على المجال $[-1;2[$؟

## 26

ينتج أحد المصانع كمية $q$ من السكر مقدرة بالقناطر. الكلفة الإجمالية للإنتاج $C(q)$ بالدينار $DA$ لصنع كمية $q$ من السكر معطاة بالعلاقة:

$C(q)=5q^3-2q^2+160q+30000$ حيث $0 \le q \le 20$

1. أحسب $C'(q)$ ثم ادرس إشارة $C'(q)$.
2. شكل جدول تغيرات الدالة $C$.
3. مثل بيانيا الدالة $C$.
4. نريد معرفة كمية السكر التي يجب إنتاجها حتى تكون كلفة الإنتاج هي $50000\ DA$.

- ضع تخمينا حول هذه الكمية انطلاقا من التمثيل البياني للدالة $C$.
- برهن صحة التخمين باستعمال نتائج السؤال 2.

## 27

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;-1\}$ بـــ:

$$f(x)=\frac{3x^2+9x+7}{x^2+3x+2}$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$(C)$ المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن من أجل كل $\mathbb{R}-\{-2;-1\}$ : $f(x)=3+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

2) احسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة التعريف.

3) استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني $(C)$.

4) $D$ مستقيم معادلته $y=3$ . ادرس وضعية $(C)$ بالنسبة إلى $D$.

5) احسب $f'(x)$ و استنتج تغيرات الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها.

6) بين أنه من أجل كل $\mathbb{R}-\{-2;-1\}$ : $f(-3-x)=f(x)$ .

ماذا يمكن أن تستنتج؟

7) أنشئ المنحني $(C)$ و المستقيمات المقاربة.

## 28

$f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـــ: $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$

$C_f$ هو تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة التعريف و ادرس تغيرات $f$ وشكل جدول تغيراتها.

2) عين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ و $d$ بحيث من أجل كل

$x\in\mathbb{R}-\{1\}$ : $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x-1)^2}$

3) بين أن $C_f$ يقبل المستقيم $D$ الذي معادلته $y=x-2$ مستقيم مقارب وحدد وضعية $C_f$ بالنسبة إلى $D$ .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا $\alpha$ في المجال $]-\infty;1[$ استنتج حصرا لـــ $\alpha$ سعته $0,25$ .

5) أنشئ $D$ و $C_f$ في معلم متعامد و متجانس.

6) استنتج بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة $f(x)=m$ .

## ب. حلول التمارين

### الاستمرارية

**1.**

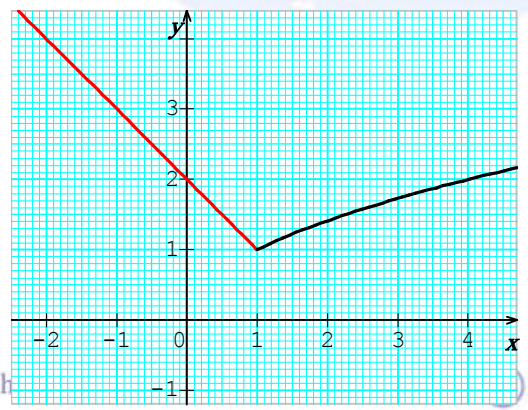
1) $f$ غير مستمرة على المجال $[-5;2]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم (لاحظ الانقطاع عند النقطةذات الفاصلة $-2$).

2)نعم $f$ مستمرة على المجال $[0;1]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.

3) $f$ مستمرة مثلا على المجالات $[-2;-5]$، $[1;-2]$ ,$]-3;-5[$.

**2.**

1) رسم المنحني




جميع الحقوق محفوظة

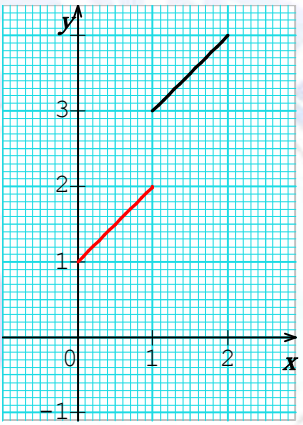
2) نعم $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنه يمكن رسم منحنيها دون رفع القلم.

## .3

1) من أجل $x \in [0;1[$ : $E(x)=0$ إذن $f(x)=x+1$ .

من أجل $x \in [1;2[$ : $E(x)=1$ إذن $f(x)=x+2$ .

2) رسم المنحني




3) $f$ غير مستمرة على المجال $[0;2]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم (لاحظ الانقطاع عند النقطةذات الفاصلة 1).

4)مجالات تكون فيها $f$ مستمرة: $[0;1[$، $[1;2[$، $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

## الاستمرارية و المعادلات

## .4

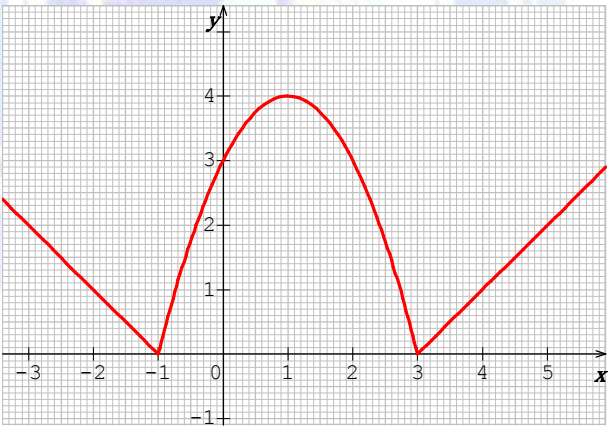
1) رسم المنحني

- نرسم المستقيم الذي معادلته $y=-x-1$ على المجال $]-\infty;-1[$ و المستقيم الذي معادلته $y=x-3$ على المجال $]3;+\infty[$ .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

- نرسم المنحني الذي معادلته $y=-x^2+2x+3$ على المجال $[-1;3]$ و لاحظ أن الدالة المشتقة للدالة $f: x\mapsto -x^2+2x+3$ هي الدالة $f': x\mapsto -2x+2$ أي $f': x\mapsto 2(-x+1)$ .
إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $-x+1$.
نستنتج عندئذ جدول تغيرات $f$ على المجال $[-1;3]$.

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $4$ | ↘ | $0$ |




2) نعم $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني على $\mathbb{R}$ دون رفع القلم.

3) المنحني الذي يمثل الدالة $f$ يقطع محور الفواصل في النقطتين $A(-1;0)$ و $B(3;0)$ إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ هما $-1$ و $3$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## .5

1) $f'(x)=6x^2+2$ . من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x)>0$ إذن $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ .

2) بمأن $f$ مستمرة (لأنها دالة كثير حدود) و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذن على $[-1;0]$ و $f(0)\times f(1)<0$ (لأن $f(0)=1$ و $f(-1)=-1$ ) فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-1\le\alpha\le 0$ .

## .6

1) $f'(x)=3x^2-10x+3$ .

نحل المعادلة $3x^2-10x+3=0$ في $\mathbb{R}$ فنجد حلين هما $\frac{1}{3}$ و $3$.

نستنتج إذن أنّ المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا وحيد في المجال $[1;3]$

وأنّه من أجل $x\in[1;3]$ : $f'(x)\le 0$ .

وبالتالي نستنتج أنّ $f$ متناقصة تماما على $[1;3]$.

2) بما أنّ المجال $[1;2]$ جزء من المجال $[1;3]$ فإنّ $f$ متناقصة تماما على $[1;2]$ أي رتيبة تماما على $[1;2]$ .

و $f$ مستمرة على المجال $[1;2]$ (باعتبارها دالة كثير حدود معرّفة على المجال $[1;3]$)

و $f$ تحقق $0\in]f(2);f(1)[$ (لأن $f(2)=-2$ و $f(1)=3$ )

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1;2]$.

## .7

1) الدالة $g:x\mapsto x$ مستمرة على $\mathbb{R}$ إذن على $[0;+\infty[$ (دالة مرجعية)

و الدالة $h:x\mapsto\sqrt{x}$ مستمرة على $[0;+\infty[$ (دالة مرجعية كذلك).

$f$ هي مجموع الدالتين $g$ و $h$ إذن $f$ مستمرة على $[0;+\infty[$.

http://www.onefd.edu.dz

2)من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x)>0$ $f'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ إذن $f$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و لاحظ أن $f(0)=0$ .

3) $\begin{cases} f(3)=3+\sqrt{3}=4,7..... \\ f(4)=4+\sqrt{4}=6 \end{cases}$

بما أن $f$ مستمرة و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ إذن على $[3;4]$ و 5 محصور بين $f(3)$ و $f(4)$ فإن المعادلة $f(x)=5$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[3;4]$.

## عمليات على النهايات

**8.**

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0 \end{cases}$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x+2-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)=0 \end{cases}$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)=+\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}(-2x+1)=1 \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left(\dfrac{3}{x}\right)=-\infty \end{cases}$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left(-2x+1+\dfrac{3}{x}\right)=-\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}(1-x)=-2 \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=+\infty \end{cases}$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left(1-x-\dfrac{1}{x+1}\right)=-\infty$


جميع الحقوق محفوظة ©

.9

أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{x+1}\right)=0\end{cases}$

لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=-\infty$ $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}(x)=-1\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left(\dfrac{2}{x+1}\right)=-\infty\end{cases}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2-x}\right)=0\end{cases}$

لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=-\infty$ $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}(1-2x)=-3\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\left(\dfrac{3}{2-x}\right)=-\infty\end{cases}$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2=0\end{cases}$

لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}(x-1)=0^-\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}(x-1)^2=0^+\end{cases}$ إذن $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{-1}{x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty\end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=+\infty$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

.10

أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty\end{cases}$

ب) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=+\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(\dfrac{3}{2-x}\right)=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1-x}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(\dfrac{3}{2-x}\right)=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=0\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{2}{x-1}=-\infty\end{cases}$

ج) تذكر أن $\sqrt{x^2}=|x|$ و $\sqrt{x^2}=-x$ من أجل $x\le 0$

و $\sqrt{x^2}=x$ من أجل $x\ge 0$ .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=1$$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}(x)=-1\\ \sqrt{x^2-1}\xrightarrow{>}0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}(x)=1\\ \sqrt{x^2-1}\xrightarrow{>}0\end{cases}$


جميع الحقوق محفوظة ©

## .11

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ .

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3=-\infty$ .

3) الحد الأعلى درجة في $-x+1$ هو $-x$ و الحد الأعلى درجة في $-x^3-x+1$ هو $-x^3$ .

نستنتج أن الحد الأعلى درجة في $f(x)$ هو $x^4$ .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^4=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$ .

4) الحد الأعلى درجة في $\left(x^2-1\right)^3$ هو $x^6$ و الحد الأعلى درجة في $\left(2-x^3\right)^2$ هو $x^6$ .

نستنتج أن الحد الأعلى درجة في $f(x)$ هو $x^{12}$ .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^{12}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{12}=+\infty$ .

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^4=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^4=-\infty$ .

6) الحد الأعلى درجة في $\left(1-x^2\right)$ هو $-x^2$ و الحد الأعلى درجة في $\left(-2x^2+3\right)$ هو $-2x^2$ .

نستنتج أن الحد الأعلى درجة في $f(x)$ هو $2x^4$ .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^4=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^4=+\infty$ .

## .12

1) $f$ معرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ .

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-5x}{2x}=-\frac{5}{2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-5x}{2x}=-\frac{5}{2}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

2) $f$ معرفة على $]-\infty;1[$ و على $]1;+\infty[$ .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{-x} = \lim_{x\to-\infty} -2x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{-x} = \lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$$

3) $f$ معرفة على $]-\infty;2[$ و على $]2;+\infty[$ .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$$

4) نحل المعادلة $x^2+x-2=0$ و نجد الحلين $1$ و $-2$ إذن $f$ معرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ أي $f$ معرفة على المجالات $]-\infty;-2[$ ، $]-2;1[$ و $]1;+\infty[$ .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

5) $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل عدد حقيقي لدينا $x^2+1\neq 0$ .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

**.13**

- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} \dfrac{5x+3}{2x-2} = +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} (5x+3) = 8 \\ (2x-2)\xrightarrow{>} 0 \end{cases}$


جميع الحقوق محفوظة ©

$$\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1}(5x+3)=8\\ (2x-2)\xrightarrow{<}0\end{cases}$$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1}\dfrac{5x+3}{2x-2}=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-2x+1}{3-x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-1}{x-3}$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3}(2x-1)=5\\ (x-3)\xrightarrow{>}0\end{cases}$$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3}\dfrac{2x-1}{x-3}=+\infty$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3}(2x-1)=5\\ (x-3)\xrightarrow{<}0\end{cases}$$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3}\dfrac{2x-1}{x-3}=-\infty$

- $$\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2}(x^2-7)=-3\\ (x+2)\xrightarrow{>}0\end{cases}$$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2}\dfrac{x^2-7}{x+2}=-\infty$

- $$\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2}(x^2-7)=-3\\ (x+2)\xrightarrow{>}0\end{cases}$$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2}\dfrac{x^2-7}{x+2}=-\infty$

- $$\begin{cases}\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{>} \frac{1}{2}}(x^2+1)=\dfrac{5}{4}\\ (2x-1)^2\xrightarrow{>}0\end{cases}$$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{>} \frac{1}{2}}\dfrac{x^2+1}{(2x-1)^2}=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-1}$ لدينا عدم التعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$.

-نحلل البسط: $x^2+5x-6$

لنحل المعادلة $x^2+5x-6=0$ و نجد الحلين 1 و $-6$

إذن $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$

( تذكر أن إذا كانت المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين $x_1$ و $x_2$ فإن $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.)

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

-نحلل المقام $x^2-1=(x-1)(x+1)$

إذن $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+6)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+6}{x+1}=\dfrac{7}{2}$.

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{x^2+4x-5}$ : لاحظ أنّ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1}(x-4)=-3\\ \lim\limits_{x\to 1}(x^2+4x-5)=0\end{cases}$

ندرس إشارة $x^2+4x-5$ :

لنحل المعادلة $x^2+4x-5=0$ و نجد الحلين 1 و $-5$.

| $x$ | $-\infty$ | $-5$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+4x-5$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}(x-4)=-3\\ (x^2+4x-5)\xrightarrow{<}0\end{cases}$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\dfrac{x-4}{x^2+4x-5}=+\infty$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}(x-4)=-3\\ (x^2+4x-5)\xrightarrow{>}0\end{cases}$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\dfrac{x-4}{x^2+4x-5}=-\infty$

## المستقيمات المقاربة

**.14**

1) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}(4-x^2)=0^-$ إذن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{4-x^2}=0$ إذن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=1$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

2) $f(x)-x=\dfrac{2}{4-x^2}$ أي $f(x)-x=\dfrac{2}{(2-x)(2+x)}$ .

من أجل كل $x$ من $]2\,;+\infty[$ : $f(x)-x>0$ إذن $(C_f)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=1$ .

## 15.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

2)أ) أجل كل $x$ من $]1;+\infty[$ :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x^2+4x-1}{x-1} \\ f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1} \end{cases}$$

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}=\frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}$$

أي $f(x)=\dfrac{ax^2+(b-a)x-(b-c)}{x-1}$

نستنتج: $\begin{cases} a=-1 \\ b-a=4 \\ b-c=1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=2 \end{cases}$ إذن $f(x)=-x+3+\dfrac{2}{x-1}$ .

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+3)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x-1}\right)=0$ إذن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=-x+3$ .

3) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left(\dfrac{-x^2+4x-1}{x-1}\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left(-x^2+4x-1\right)=2 \\ (x-1)\xrightarrow{>}0 \end{cases}$

إذن $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $x=1$ .

http://www.onefd.edu.dz

## .16

1) $(C_f)$ هو المنحني الذي يمثل الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ بالشكل $f(x)=\frac{2x^2+5x+11}{2x+3}$ .

لدينا $f(x)-(x+1)=\frac{2x^2+5x+11}{2x+3}-(x+1)$ أي $f(x)-x=\frac{8}{2x+3}$ .

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8}{2x+3}=0$ $(C_f)$ يقبل مستقيما عند $-\infty$ مقاربا مائلا معادلته $y=x+1$ .

2) لنعين إشارة $f(x)-x$ : $f(x)-x=\frac{8}{2x+3}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-x$ | $-$ | $0$ \| | $+$ |

نستنتج أن:

في المجال $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$ : $(C_f)$ تحت $D$.

في المجال $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ : $(C_f)$ فوق $D$.

## .17

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{<} -1} f(x) = -\infty$ .
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow[>]{<} -1} x^3 = -1 \\ (x+1)^2 \xrightarrow{>} 0 \end{cases}$$

2) لدينا

$f(x)-(x-2) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2} - (x-2)$ أي $f(x)-(x-2) = \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$ .

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[ f(x)-(x-2)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+2}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

إذن $(C)$ يقبل مستقيما عند $-\infty$ مقاربا مائلا معادلته $y = x-2$ .

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[ f(x)-(x-2)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

إذن $(C)$ يقبل مستقيما عند $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته $y = x-2$ .

3) لنعين إشارة $f(x)-(x-2)$ : $f(x)-(x-2) = \dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $-\frac{2}{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)-(x-2)$ | $-$ | ‖ $-$ | $0$ | $+$ |

نستنتج أن:

في المجالين $]-\infty;-1[$ و $\left]-1;-\dfrac{2}{3}\right[$ : $(C)$ تحت $D$.

في المجال $\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ : $(C)$ فوق $D$.

$D$ يقطع $(C)$ في النقطة $A\left(-\dfrac{2}{3}; f\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right)$ و $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{8}{3}$ .


جميع الحقوق محفوظة ©

## الدالة المركبة

### 18.

1) أ) $(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]$.

$f$ معرفة من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ و $g$ معرفة من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$

إذن $f\circ g$ معرفة من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$.

ب) $(g\circ f)(x)=g\left[f(x)\right]$.

$g$ معرفة من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ و من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)\neq 0$ إذن $g\circ f$ معرفة من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$.

2) $(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]=\left[g(x)\right]^2+1=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2+1$

$(g\circ f)(x)=g\left[f(x)\right]=\dfrac{f(x)-1}{f(x)}=\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

### 19.

أ) $u$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $u(x)=x^2+x+1$.

$v$ هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ: $v(x)=\sqrt{x}$.

لدينا $f(x)=v\left[u(x)\right]=(v\circ u)(x)$ أي $f=v\circ u$.

ب) $w$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـــ: $w(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

$v$ هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ: $v(x)=\sqrt{x}$.

لدينا $g(x)=v\left[w(x)\right]=(v\circ w)(x)$ أي $g=v\circ w$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

**.20**

1) نضع $f(x)=2x^2-5x+2010$ و $g(x)=\sqrt{x}$.

لدينا $h(x)=g\left[f(x)\right]$ أي $h=g\circ f$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$.

3) $h(x)=g\left[f(x)\right]$.

لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$.

## النهايات بالمقارنة

**.21**

من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ لدينا $\dfrac{x}{x+2}\le f(x)\le\dfrac{x+1}{x}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

(حسب مبرهنة الحصر)

**.22**

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f(x)\le -2x^3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3\right)=-\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ (حسب مبرهنات المقارنة)

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## تمارين للتعمّق

**.23**

1) نلاحظ على الشكل : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ ( المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب عند $-\infty$ ) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+\infty$ |

2) أ) نضع $u(x)=x^2$ .

لدينا $g(x)=u\left[f(x)\right]$ أي $g=u\circ f$ .

$u$ و $f$ معرفتان على $\mathbb{R}$ إذن $g$ معرفة على $\mathbb{R}$ .

ب) $g(x)=u\left[f(x)\right]$

- لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\\ \lim\limits_{x\to 2} u(x)=4\end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=4$

المنحني الذي يمثل $g$ يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y=4$ .

- لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty\end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ .

3)أ)

- $f$ موجبة على المجلين $]-\infty;1]$ و $[3;+\infty[$ (انظر جدول تغيرات $f$ في السؤال الأول) إذن مجموعة تعريف الدالة

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

$x \mapsto h(x) = \sqrt{f(x)}$ هي: $D_h = ]-\infty;1] \cup [3;+\infty[$ .

- $f$ تنعدم عند 1و 3 (انظر جدول تغيرات $f$ في السؤال الأول)

إذن مجموعة تعريف الدالة $x \mapsto k(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ .

هي: $D_k = \mathbb{R} - \{1;3\}$ أي $D_h = ]-\infty;1[ \cup ]1;3[ \cup ]3;+\infty[$ .

ب)

- $h$ معرفة على $D_h = ]-\infty;1] \cup [3;+\infty[$ بـــ: $h(x) = \sqrt{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \sqrt{2}$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2} \end{cases}$ إذن المنحني $(C_h)$ الذي يمثل $g$ يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y = \sqrt{2}$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{cases}$ .

- $k$ معرفة على $D_h = ]-\infty;1[ \cup ]1;3[ \cup ]3;+\infty[$ بـــ: $k(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = \dfrac{1}{2}$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ إذن المنحني $(C_k)$ الذي يمثل $k$ يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y = \dfrac{1}{2}$ .

$\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 0$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$ إذن المنحني $(C_k)$ الذي يمثل $k$ يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$ .

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

$\lim\limits_{x\to 1}\left|k(x)\right| = +\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0\\ \lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{1}{x}\right| = +\infty\end{cases}$ إذن المنحنى $(C_k)$ الذي

يمثل $k$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=1$ .

$\lim\limits_{x\to 3}\left|k(x)\right| = +\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0\\ \lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{1}{x}\right| = +\infty\end{cases}$ إذن المنحنى $(C_k)$ الذي

يمثل $k$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=3$ .

**.24**

$f$ دالة تناظرية.

- $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=2$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ إذن

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \frac{a}{c} = 2....(1)$$

- $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=-1$ إذن

$\lim\limits_{x\to -1}(cx+d) = -c+d = 0....(2)$ $(-a+b\neq 0)$ .

- $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ إذن

$$\frac{1}{2}a+b=0....(3)$$ .

نستنتج من (1) و (2) و (3) الجملة $\begin{cases}\dfrac{a}{c}=2\\ -c+d=0\\ \dfrac{1}{2}a+b=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=2c\\ d=c\\ b=-\dfrac{1}{2}a\end{cases}$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

$f(x)=\dfrac{c(2x-1)}{c(x+1)}$ أي $f(x)=\dfrac{2cx-c}{cx+c}$ و منه $\begin{cases} a=2c \\ d=c \\ b=-c \end{cases}$ أي

$f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ أي ( لأنه لا يمكن أن يكون $c=0$ ).

**25**

1. من أجل $x\in[-1;0[$ لدينا $E(x)=-1$ ومنه $f(x)=-x+1$

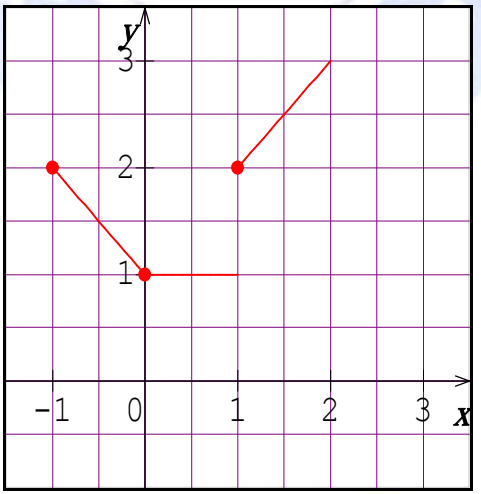
من أجل $x\in[0;1[$ لدينا $E(x)=0$ ومنه $f(x)=1$

من أجل $x\in[1;2[$ لدينا $E(x)=1$ ومنه $f(x)=x+1$

2. انظر الشكل أدناه.

3. نعم الدالة $f$ مستمرة على المجال $]-1;1[$ لأنه بإمكاننا رسم جزء المنحني في هذا المجال دون رفع القلم.

الدالة $f$ ليست مستمرة على المجال $]-1;2[$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.




http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

**26**

1.حساب $C'(q)$:

$C'(q)=15q^2-4q+160$.

إشارة $C'(q)$:

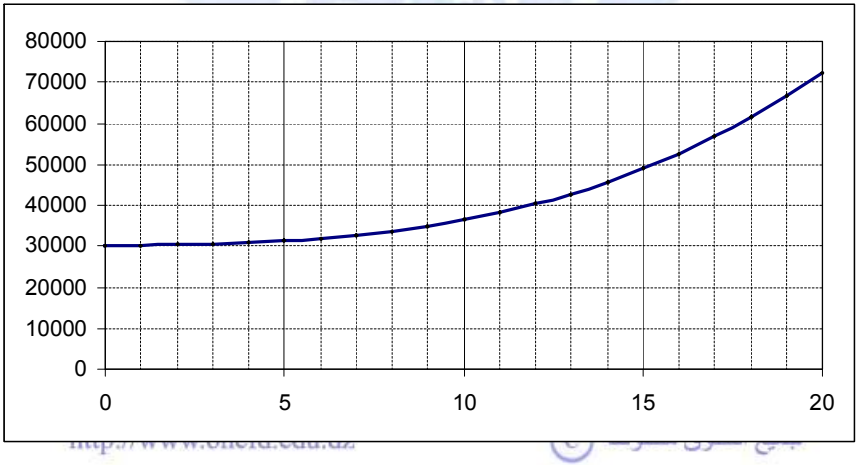
$C'(q)$كثير حدود من الدرجة الثانية ومحدده $\Delta=-9584$.

$\Delta$ سالب و معامل $q^2$ موجب( معامل $q^2$ هو 15) إذن من أجل كل عدد $q$ لدينا $C'(q)>0$.

جدول تغيرات الدالة $C$:

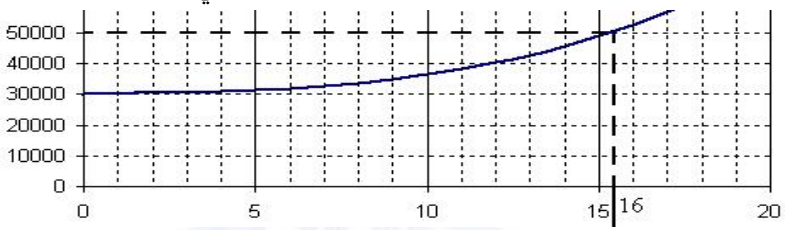
| $q$ | 0 | | 20 |
|---|---|---|---|
| $C'(q)$ | | + | |
| $C(q)$ | 30000 | ↗ | 72400 |

2.التمثيل البياني للدالة $C$:



.3

- تخمين حول هذه الكمية باستعمال التمثيل البياني:




هذه الكمية محصورة بين 15 قنطار و 16 قنطار.

- برهان صحة هذه المخمنة باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة:

لدينا $C(15)=48825$ و $C(16)=52528$

الدالة $C$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود إذن مستمرة على كل مجال من $\mathbb{R}$ و خاصة $[15;16]$ .

بمأن $C$ مستمرة و متزايدة تماما على $[15;16]$ و $50000\in\left[C(15);C(16)\right]$

فإن المعادلة $C(q)=50000$ تقبل حلا وحيدا $q_0$ حيث $15\le q_0\le 16$.

## 27

1) من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{-2;-1\}$ : $f(x)=\dfrac{3(x+1)(x+2)+1}{(x+1)(x+2)}$ أي

$f(x)=\dfrac{3x^2+9x+7}{x^2+3x+2}$ .

2)مجموعة تعريف الدالة $f$ هي: $D_f=]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$
- لدينا $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$


جميع الحقوق محفوظة ©

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+3x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$$\begin{cases}(3x^2+9x+7)\to 1\\ (x^2+3x+2)\xrightarrow{<}0\end{cases}$$ لأن $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x)=-\infty$

$$\begin{cases}(3x^2+9x+7)\to 1\\ (x^2+3x+2)\xrightarrow{>}0\end{cases}$$ لأن $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x)=+\infty$

$$\begin{cases}(3x^2+9x+7)\to 1\\ (x^2+3x+2)\xrightarrow{>}0\end{cases}$$ لأن $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=+\infty$

$$\begin{cases}(3x^2+9x+7)\to 1\\ (x^2+3x+2)\xrightarrow{<}0\end{cases}$$ لأن $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=-\infty$

3) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3\end{cases}$ إذن $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=3$

$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x)=+\infty\end{cases}$ إذن $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=-2$

$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=-\infty\end{cases}$ إذن $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=-1$

4) نضع $\varphi(x)=f(x)-3$ أي $\varphi(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

- من أجل $x\in]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[$ : $\varphi(x)>0$ إذن $(C)$ فوق $D$.
- من أجل $x\in]-2;-1[$ : $\varphi(x)<0$ إذن تحت $D$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

5) $f'(x)=\dfrac{-2x-3}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\dfrac{3}{2}$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|$ | $-$ | |
| $f$ | $3$ | ↗ | $\|$ | $-\infty$ | ↗ $-1$ | ↘ $-\infty$ | $\|$ | $+\infty$ | ↘ $3$ |

6) من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-2;-1\}$ :

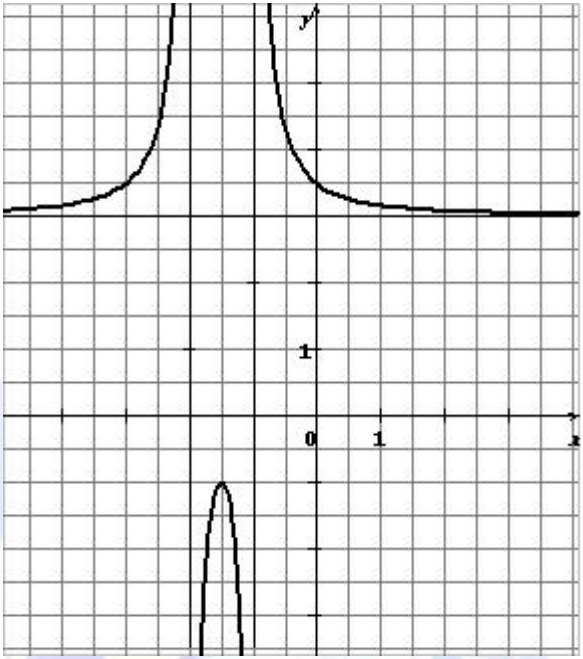
$$f(-3-x)=3+\frac{1}{(-3-x+1)(-x-3+2)}$$ أي

$$f(-3-x)=3+\frac{1}{(-x-2)(-x-1)}$$ أي $f(-3-x)=f(x)$

لدينا $f\left[2\left(-\dfrac{3}{2}\right)-x\right]=f(x)$ إذن المستقيم الذي معادلته $y=-\dfrac{3}{2}$ هو محور تناظر للمنحني $(C)$.

7)

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©




**28**

1)مجموعة تعريف الدالة $f$ هي: $D_f = ]-\infty;1[ \cup ]1;+\infty[$

أ)حساب النهايات: $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = +\infty$ لأن $\begin{cases} (x^3 - 4x^2 + 8x - 4) \to 1 \\ (x-1)^2 \xrightarrow{>} 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = +\infty$ لأن $\begin{cases} (x^3 - 4x^2 + 8x - 4) \to 1 \\ (x-1)^2 \xrightarrow{>} 0 \end{cases}$

ب)حساب الدالة المشتقة $f'$:

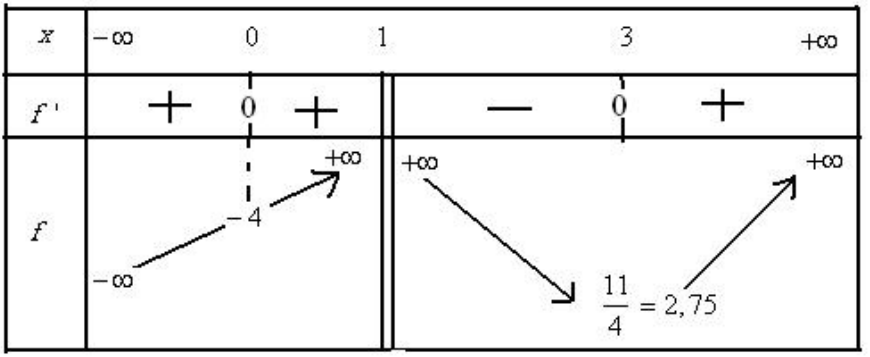
$$f'(x) = \frac{x^2(x-1)(x-3)}{(x-1)^4}$$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

جـــ)إشارة $f'$ :

$f'$ تنعدم عند 0 و 3. إشارة $f'$ هي إشارة $(x-3)(x-1)$.

د)جدول تغيرات $f$ :




2) من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ :

$$f(x)=\frac{(ax+b)(x-1)^2+cx+d}{(x-1)^2}$$ أي

$$f(x)=\frac{ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b-c)x+b+d}{(x-1)^2}$$

نستنتج أن $\begin{cases}b-2a=-4\\a-2b+c=8\\b+d=-4\end{cases}$ أي $\begin{cases}b=-4+2a\\-2b+c=8-a\\b+d=-4\end{cases}$ ونجد $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=3\\d=-2\end{cases}$

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ : $f(x)=x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$.

3) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$

إذن $C_f$ يقبل المستقيم $D$ الذي معادلته $y=x-2$ مستقيم مقارب.

ب) دراسة وضعية $C_f$ بالنسبة إلى $D$ تتطلب منا تعيين إشارة العبارة:

$f(x)-(x-2)$ أي $\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$.

إذا كان $x<\dfrac{2}{3}$ : $C_f$ يقع تحت $D$ .

إذا كان $x>\dfrac{2}{3}$ : $C_f$ يقع فوق $D$ .

$C_f$ يقطع $D$ في النقطة $A$ من $D$ التي فاصلتها $\dfrac{2}{3}$ أي $A\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.

4) $f$ دالة ناطقة إذن فهي مستمرة على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها وخاصة المجال $]-\infty;1[$.

لدينا كذلك صورة المجال $]-\infty;1[$ بالدالة $f$ هي $]-\infty;+\infty[$ أي $f$ تغير إشارتها على المجال $]-\infty;1[$ فهي إذن تنعدم على هذا المجال.

إذن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا $\alpha$ في المجال $]-\infty;1[$.

وبما أنّ $f$ متزايدة تماما على $]-\infty;1[$ على فإنّ $\alpha$ وحيدا.

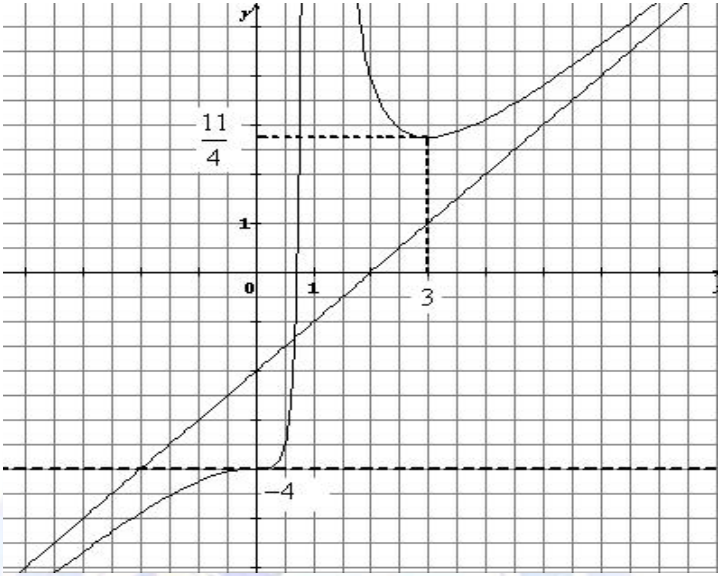
إيجاد حصر سعته $0,25$ للحل $\alpha$:

لدينا $\begin{cases} f(0,75)=2,75 \\ f(0,5)=-3,5 \end{cases}$ إذن $0,5<\alpha<0,75$

5) إنشاء $D$ و $C_f$ في معلم متعامد و متجانس.

باستعمال جدول التغيرات أعلاه ننشئ المنحنى أدناه

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©




6) حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع $C_f$ و المستقيم الذي معادلته $y=m$ .

نستنتج:

- إذا كان $m<-4$ : حل وحيد.
- إذا كان $m=-4$ : حل هو 0.
- إذا كان $-4<m<2,75$ : حل وحيد.
- إذا كان $m=2,75$ : حل هو 3.

إذا كان $m>2,75$ : حل وحيد.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## VIII. تقويم ذاتي:

### أ. اختيار من متعدد

يطلب وضع العلامة × في الخانة المقابلة له. تبرير الاختيار غير مطلوب.

تمنح 0,5 نقطة لكل جواب صحيح.

- تنقص 0,25 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.
- لا تضاف ولا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة.
- إذا كان مجموع العلامات سالبا تمنح العلامة 0 للمترشح في التمرين.

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بالعبارة:

$f(x)=-2x+3-\dfrac{5}{x-2}$ و ليكن $(C)$ تمثيلها البياني .

| | صحيح | خاطئ |
|---|---|---|
| 1. $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+11}{2-x}$ . | | |
| 2. يقبل $(C)$ مستقيما مقاربا معادلته: $x=2$ | | |
| 3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ . | | |
| 4. يقبل $(C)$ مستقيما مقاربا معادلته: $y=-2x+3$ عند $+\infty$ . | | |
| 5. تقبل المعادلة $f(x)=6$ حلين من إشارتين مختلفتين. | | |


جميع الحقوق محفوظة ©

## ب. صحيح أم خاطئ

الأسئلة من 1) إلى 4) تتعلق بجدول تغيرات دالة $f$ (الجدول الموالي ) معرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$ و $C$ هو التمثيل البياني لها في معلم متعامد للدالة $f$.
كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، المطلوب الإجابة بصحيح أو خاطئ على ما يلي دون تبرير.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $5$ | | $11$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $3$ | ↘ | $-1$ | ↗ | ‖ | $-\infty$ ↗ | $7$ | ↘ | $-\infty$ |

1) من ملاحظتك للجدول:

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$ ب) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-\infty$

جـ) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}5} f(x)=-\infty$ د) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

2) المنحنى $C$:

أ) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا

ب) لا يقبل أي مستقيم مقارب عمودي

جـ) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين مختلفين

3) في النقطة التي فاصلتها 1 المنحني $C$ :

أ) يقبل مماسا معادلته $x=-1$

ب) يقبل مماسا معادلته $y=-1$

جـ) لا يقبل مماسا أفقيا.

د) يقبل مماسا معادلته $y=x-1$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

4) على المجموعة $\mathbb{R}-\{5\}$ المعادلة :

أ) $f(x)=2$ تقبل على الأكثر ثلاثة حلول.

ب) $f(x)=-1$ تقبل بالضبط حلا واحدا.

جـ) $f(x)=-5$ لا تقبل أي حل.

د) $f(x)=7$ تقبل بالضبط حلين.

## أ. أجوبة اختيار من متعدد

إرشادات:

1. قم بتوحيد المقامات في العبارة الأولى لـِ $f(x)$.
2. لابد من دراسة نهاية الدالة $f$ عند 2.
3. أدرس نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$.
4. عين في البداية عبارة $f(x)-(-2x+3)$ ثم أدرس نهايتها عند $+\infty$.
5. لا تنسى أن الدالة $f$ معرفة فقط على المجال $]2;+\infty[$.

| | صحيح | خاطئ |
|---|---|---|
| .1 | X | |
| .2 | X | |
| .3 | X | |
| .4 | X | |
| .5 | | X |

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## ب. أجوبة صحيح أم خاطئ

1)

| أ) | ب) | جـ) | د) |
|---|---|---|---|
| خاطئ | خاطئ | صحيح | خاطئ |

2)

| أ) | ب) | جـ) |
|---|---|---|
| صحيح | خاطئ | خاطئ |

3)

| أ) | ب) | جـ) | د) |
|---|---|---|---|
| خاطئ | صحيح | خاطئ | خاطئ |

4)

| أ) | ب) | جـ) | د) |
|---|---|---|---|
| خاطئ | خاطئ | خاطئ | صحيح |

ملاحظات

- في السؤالين 2- ب) و 2-جـ):يوجد مستقيم مقارب عمودي وحيد معادلته $y=3$
- في السؤال 3): $f'(1)=0$ أي معامل توجيه المماس في النقطة ذات الفاصلة1 معدوم أي هذا المماس يوازي محور الفواصل.
- في السؤال 4- أ):المعادلة $f(x)=2$ تقبل اربعة حلول، إذن تقبل ثلاثة حلول على الأقل( وليس على الأكثر).
- في السؤال 4- ب):المعادلة $f(x)=-1$ تقبل ثلاثة حلول أحدها1.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©