2. الإحصاء

الكفاءات المستهدفة

- تعريف سلسلة إحصائية لمتغيرين عددين.
- تمثيل سلسلة إحصائية لمتغيرين عددين بسحابة نقط.
- تعين احداثيي النقطة المتوسطة.
- إنشاء مستقيم تعديل تآلفي.

تصميم الدرس

سعيد الحزين

I. السلسلة الإحصائية لمتغيرين
II. التعديل التآلفي
III. ملخص الدرس
IV. توظيف المعارف (تمارين + حلول وإرشادات)
V. تقويم ذاتي (اختيار من متعدد + صحيح أم خاطئ)
VI. استعد للبكالوريا (مسائل محلولة مع سلّم التنقيط)

سعيد الحزين:

سعيد الحزين

الطالب سعيد حزين جدا وهو ينظر بحسرة إلى الجدول أدناه: لا شك أنك تتساءل لماذا ؟

إن جهوده المضنية في جمع البيانات حول دراسة إحصائية، كلفه بها أستاذه، تبخرت بسبب عبث أخيه الصغير بأوراقه، فضاعت منه كثير من المعلومات. سعيد يذكر أن عدد الأشخاص الذين استجوبهم هو 400.

فهل بإمكانك مساعدته على ملء باقي خانات الجدول ؟

الفئات	المراكز x_i	التكرارات n_i	النسب المئوية (%)	التكرارات المجمعة الصاعدة	الجداءات $n_i x_i$
$[14;16[$			5		
	17				1088
$[\ \ ;22[$					
		84		280	
$[24;\ \ [$		40			
$[26;30[$	28				

يمكنك أن تطّلع على الحل في آخر الفصل.

I. السلسلة الإحصائية لمتغيرين:

1. دراسة متغيرين إحصائيين في آن واحد

تمهيد

بحثت المصلحة التجارية لمؤسسة في معرفة العلاقة بين الإشهار والمبيعات التي تسمح بتبرير الميزانية التي تخصّصها للإشهار.

فكانت المبالغ المالية المخصصة للإشهار والمبيعات (مقدرة بملايين الدنانير) لأشهر السنة 2009 كما في الجدول:

الإشهار	2.3	3.2	1.8	5.3	3	7	4.7	3.8	10	7.1	4.6	3.3
المبيعات	34	39	26	63	37	80	52	57	108	70	56	44

تعريف

في مجتمع تكراره N، ندرس في آن واحد طبعين X و Y.

من أجل كلّ فرد i، حيث $1 \le i \le N$، نسجّل القيمة x_i للطبع X والقيمة y_i للطبع Y.

نسمّي متتالية الثنائيات $(x_i, y_i)_{1\le i\le N}$ سلسلة إحصائية للمتغيرين X و Y.

ملاحظة

يمكن استخراج من سلسلة إحصائية لمتغيرين، سلسلتين إحصائيتين بسيطتين $(x_i)_{1\le i\le N}$ و $(y_i)_{1\le i\le N}$ تسمحان بدراسة الطبعين منفصلين.

ويكون موضوع دراسة سلسلة إحصائية لمتغيرين معرفة إن كان الطبعان مرتبطين أم لا.

2. السلاسل الزمنية

مثال

يبيّن الجدول الآتي النسبة المئوية لسكان الريف لمنطقة معينة لبعض السنوات:

السنة	1987	1972	1966	1962	1953	1946	1920
النسبة المئوية	48	53	54	56	64	67	71

في هذا المثال، نهتم فقط بطبع واحد. لكن تطوّر سكان الريف في الزمن مهمّ أيضا.

ملاحظة

في سلسلة إحصائية لطبعين فيها أحد الطبعين معطى بدلالة الزمن، يقوم الزمن بمقام طبع إحصائي. السلسلة الزمنية هي أيضا سلسلة إحصائية لطبعين.

3. سحابة نقط والنقطة المتوسطة

تعاريف

- في معلم متعامد (مناسب) مجموعة النقط $M_i(x_i, y_i)$ هي **سحابة نقط** السلسلة ذات المتغيرين X و Y .
- **النقطة المتوسطة** لهذه السلسلة هي النقطة $G(\bar{x}, \bar{y})$ حيث

$\bar{x}$ الوسط الحسابي للقيم x_i (المعدل) و $\bar{y}$ الوسط الحسابي للقيم y_i :

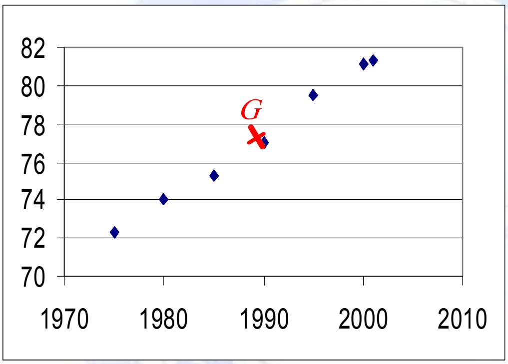
$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

مثال

يوّضح الجدول التالي ارتفاع نسبة النجاح في شعبة تسيير واقتصاد خلال سبعة سنوات في مؤسسة ما:

السنة x_i	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2001
النسبة y_i	72,3	74	75,3	77	79,5	81,1	81,3

سحابة النقط الممثلة لهذه السلسلة في معلم متعامد مبدؤه $O(1970;70)$ النقطة المتوسطة $G(1989;77,2)$



ملاحظة

- **تغيير المبدأ:** $z_i = x_i - a$ و $t_i = y_i - b$

باستعمال خواص الخطية للوسط: $\bar{z} = \bar{x} - a$ و $\bar{t} = \bar{y} - b$، واعتبار $a = 1975$ و $b = 70$، نجد في المثال السابق $G'(14,4;7,2)$.

- **تغيير الوحدة:** $u_i = ky_i$

باستعمال الخواص : $\bar{u} = k\bar{y}$، وباعتبار $z_i = x_i - 1975$ و $u_i = \dfrac{y_i}{100}$ ، نجد في المثال السابق $G''(14,4;0,772)$.

تطبيق 1

يبيّن الجدول التالي العدد x_i لخريجي الجامعات والمعاهد العليا في خمس بلدان بدلالة عدد سكانها y_i . (x_i و y_i بالآلاف).

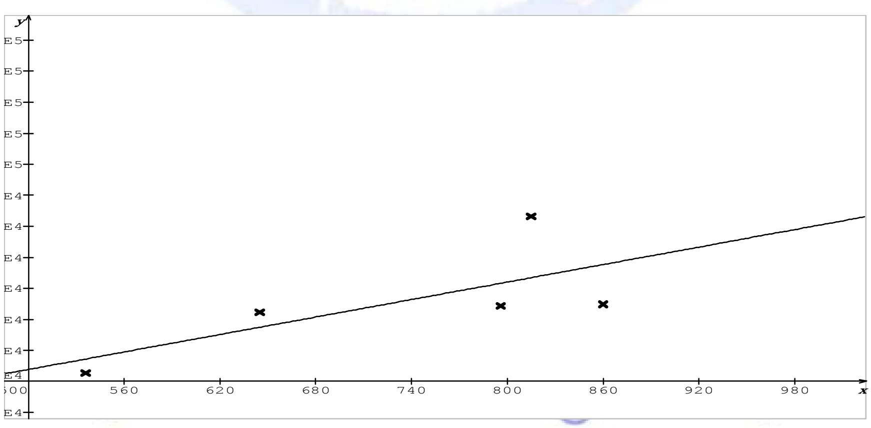
البلد	1	2	3	4	5
x_i	815	860	536	796	645
y_i	92539	69901	52198	69516	67804

مثّل في معلم متعامد ومناسب، سحابة النقط $(x_i;y_i)$ الممثلة لهذه السلسلة الإحصائية.

حل

لاختيار المعلم، نستعمل قيم مدورة للقيم الدنيا والقصوى لكلّ من المتغيرين X و Y.

نختار كمبدأ: النقطة $O'(500;50000)$، وكوحدة: 2cm لـــ 60 ألف خريج على محور الفواصل، و 1cm لـــ 8 ملايين نسمة على محور التراتيب.



تطبيق 2

يعرض مصنع أسعارا بالدينار لكميات مختلفة من مادة ينتجها كما يوضح الجدول التالي:

الكمية x (بالأطنان)	300	400	500	600	700
السعر y (بآلاف الدنانير)	40	45	51	54	57

1) عين النقطة المتوسطة $G\left(\overline{x};\overline{y}\right)$ لسحابة النقط $\left(x_i;y_i\right)$.

2) عين G_1 النقطة المتوسطة للنقطتين الأوليتين و G_2 النقطة المتوسطة للنقط الأخرى ثم تحقق أن G نقطة من المستقيم $\left(G_1G_2\right)$.

حل

1) باستعمال الحاسبة وبعد إدخال القيم x_i و y_i في القائمتين L_1 و L_2 على الترتيب، نستعمل STAT ثمّ (Calc)، ثمّ (L_1 2:2-Vat Stats L_2 ,) ونحصل على $\overline{x}=500$ و $\overline{y}=49,4$ أي: $G\left(500;49,4\right)$.

2) $G_1\left(350;42,5\right)$ ، $G_2\left(600;54\right)$.

معامل توجيه المستقيم $\left(G_1G_2\right)$ هو: $a=\dfrac{54-42,5}{600-350}=0,046$

معامل توجيه المستقيم $\left(G_1G\right)$ هو: $a'=\dfrac{54-49,4}{600-500}=0,046$.

لدينا $a=a'$. منه G ينتمي للمستقيم $\left(G_1G_2\right)$

ملاحظة

يمكن إجراء حسابات السؤال الأوّل باليد.

II. التعديل الخطي:

نشاط 1: استعمال الرمز " $\sum_{i=1}^{n}$ "

a_1 ، a_2 ، .... ، a_n ، n عددا حقيقيا.

نذكّر بالتعريف:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

1. a_1 ، a_2 ، .... ، a_n و b_1 ، b_2 ، .... ، b_n أعداد حقيقية و λ عدد حقيقي كيفي. برهن أنّ:

أ) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

ب) $\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$

2. x_1 ، x_2 ، .... ، x_n سلسلة إحصائية، $\overline{x}$ وسطها و V تباينها حيث:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{و} \quad V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

أ) اشرح لماذا يكونّ: $V = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x}\right)^2\right]$

ب) استنتج أنّ: $V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\overline{x}\right)^2$

حل

1.أ) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n)$

لكن

$$\left(a_1+b_1\right)+\left(a_2+b_2\right)+\ldots+\left(a_n+b_n\right)=\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)+\left(b_1+b_2+\ldots+b_n\right)$$

منه $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$.

ب) لدينا: $\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda a_i\right)=\lambda a_1+\lambda a_2+\ldots+\lambda a_n$

لكن $\lambda a_1+\lambda a_2+\ldots+\lambda a_n=\lambda\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)$

منه $\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda a_i\right)=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i$.

2.أ) لدينا: $V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2x_i\overline{x}+\left(\overline{x}\right)^2\right)$

بتطبيق النتائج المحصل عليها في السؤال السابق، نجد:

$$V=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\overline{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x}\right)^2\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\overline{x}\right)^2$$

نشاط 2

إليك العلامات المحصّل عليها في مادة المحاسبة من طرف خمسة تلاميذ لنفس القسم في البكالوريا وفي التقويم المستمر:

العلامات x_i البكالوريا	7	10	11	13	16
العلامات y_i التقويم المستمر	8	9	12	12	13

1. مثّل، في معلم متعامد سحابة النقط A_i المرفقة بهذه السلسلة. هل هي على استقامية ؟

2. أ) ارسم، في نفس المعلم السابق، المستقيم $\left(A_1A_4\right)$ وجد معادلته المختصرة. نسمّي P_i نقط هذا المستقيم ذات الفواصل x_i .

احسب المجموع $S_1=\sum\left(A_iP_i\right)^2$.

ب) احسب الوسطين $\bar{x}$ و $\bar{y}$ للعلامات x_i و y_i .

علّم النقطة المتوسطة G للسحابة. ارسم المستقيم (A_1G) ثمّ جد معادلته المختصرة. نسمّي Q_i نقط هذا المستقيم ذات الفواصل x_i . احسب المجموع $S_2=\sum\left(A_iQ_i\right)^2$ ، ثمّ قارن مع S_1 .

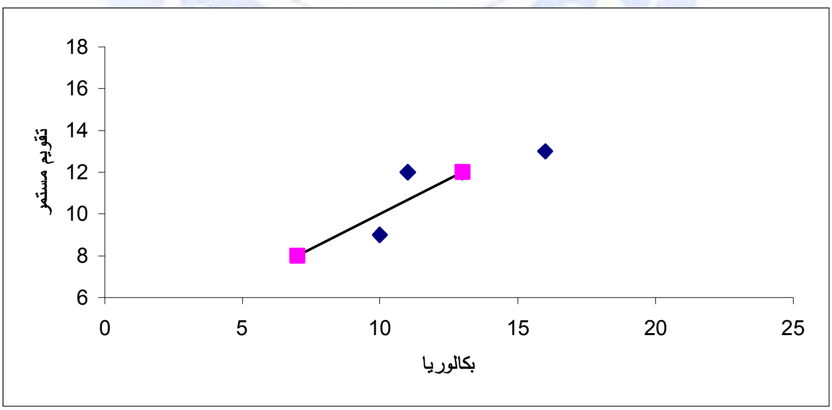
3. ليكن d المستقيم الذي معادلته المختصرة: $y=\frac{66}{113}x+\frac{468}{113}$.

تحقق من أنّ G ينتمي إلى d ، ثمّ احسب $S_3=\sum\left(A_iH_i\right)^2$ (النقط H_i هي نقط d ذات الفواصل x_i .

ما هو أقرب مستقيم إلى السحابة ؟

حل

1. في معلم متعامد مبدؤه النقطة $O(0;6)$ ، وباختيار وحدات مناسبة على المحورين، يكون تمثيل سحابة النقط كالآتي:



ذ

لاحظ أنّ النقط ليست على استقامية.

2. أ) المستقيم (A_1A_4) كما هو مبيّن على الشكل، معادلته المختصرة

هي: $y=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}$

لدينا $S_1=\sum(A_iP_i)^2=\sum\left(y_i-\frac{2}{3}x_i-\frac{10}{3}\right)^2$ مع $1\leq i\leq 5$

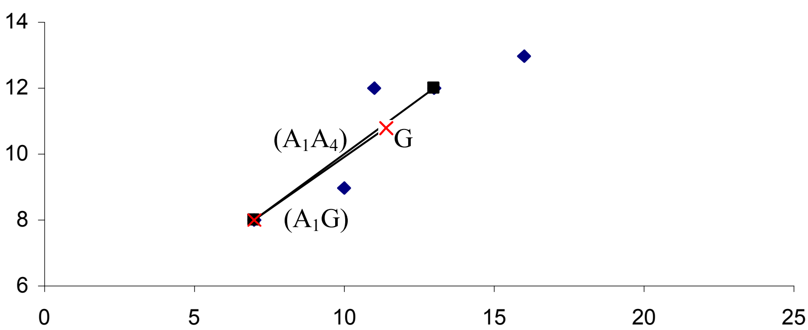
أي أنّ: $S_1=\sum\left(y_i-\frac{2}{3}x_i-\frac{10}{3}\right)^2$

ومنه $S_1=\left(y_1-\frac{2}{3}x_1-\frac{10}{3}\right)^2+\ \ldots\ +\left(y_5-\frac{2}{3}x_5-\frac{10}{3}\right)^2$

وباستعمال حاسبة، نجد: $S_1=\frac{34}{9}$

ب) $\bar{x}=11,4$ و $\bar{y}=10,8$

في نفس المعلم السابق، نعلّم النقطة G وننشئ المستقيم (A_1G) الذي معادلته المختصرة $y=\frac{7}{11}x+\frac{36}{11}$.



وبنفس الطريقة كما في السؤال 1. أ)، نجد:

$$S_2=\sum(A_iQ_i)^2=\sum\left(y_i-\frac{7}{11}x_i-\frac{36}{11}\right)^2$$

أي أنّ: $S_2 = \dfrac{424}{121}$

وبمقارنة S_1 و S_2 ، نجد: $S_1 < S_2$.

3. نتحقق من أنّ G تنتمي إلى d : ويكون ذلك إذا كان احداثيا G يحققان المعادلة $y=\dfrac{66}{113}x+\dfrac{468}{113}$

لدينا $\dfrac{66}{113}\times 11,4+\dfrac{468}{113}=\dfrac{1220,4}{113}=10,8$

إذن G تنتمي إلى d .

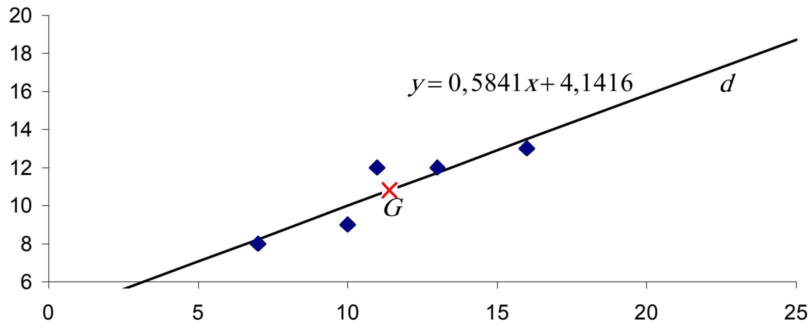
لحسب $S_3 = \sum\left(A_iH_i\right)^2$ ، نعمل كما في السؤالين السابقين:

$$S_3 = \sum\left(A_iH_i\right)^2 = \sum\left(y_i - \frac{66}{113}x_i - \frac{468}{113}\right)^2$$

ونجد: $S_3 = \dfrac{43166}{127690}$

بمقارنة المجاميع S_1 ، S_2 و S_3 ، نجد: $S_1 < S_2 < S_3$

نستنتج أنّ المستقيم d هو الأقرب إلى سحابة النقط المرفقة بالسلسلة الإحصائية.

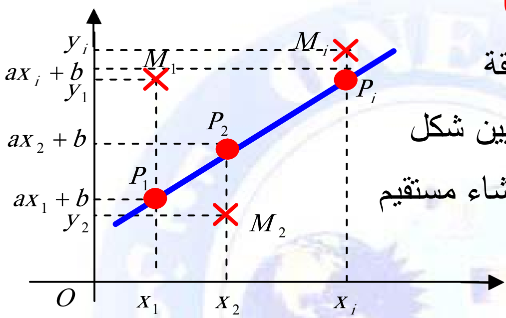


التعديل التآلفي

تعريف

القيام **بتعديل تآلفي** لسحابة نقط $M(x_i;y_i)$ يعني إيجاد دالة تآلفية تعبّر بكيفية تقريبية عن y بدلالة x.

التعديل التآلفي بالمربعات الدنيا



عندما يكون لسحابة النقط المرفقة بسلسلة إحصائية لمتغيرين عدديين شكل متطاول، نتساءل عن إمكانية إنشاء مستقيم تقع حوله نقط السحابة.

مبدأ المربعات الدنيا

نحسب المجموع: $S=M_1P_1^2+M_2P_2^2+...+M_nP_n^2$

أي: $S=\sum_{i=1}^{n}M_iP_i^2$ ، حيث $M_i(x_i;y_i)$ هي نقط السحابة.

نقبل بوجود مستقيم (يسمّى **مستقيم الانحدار** بالمربعات الدنيا) يشمل النقطة المتوسطة للسحابة ويجعل S أصغريا.

تعريف ومبرهنة

مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هو المستقيم الذي يشمل النقطة المتوسطة لسحابة النقط و الذي معادلته المختصرة $y=ax+b$ ، حيث:

$a=\dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}$ و $b=\overline{y}-a\overline{x}$.

ملاحظة

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)-\overline{xy}$$

و $$V(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\overline{x}\right)^2$$

تطبيق 1

ندرس النسبة المخصّصة لتكاليف (الماء، الغاز ، الكهرباء والهاتف) من دخل عائلي.

السنة	1978	1984	1992	1994	2000	2004
السنة x_i (بدءً من 1970)	8	14	22	24	30	34
النسبة y_i (%)	4,4	5,2	4,3	3,2	3,3	2,8

1. مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد مختار بعناية ثم أحسب إحداثيي النقطة المتوسطة G.
2. **التعديل بمستقيم الأطراف**

أحسب التزايد المتوسّط السنويّ لحصة التكاليف ثمّ استنتج المعادلة المختصرة للمستقيم (M_1M_6) (مستقيم الأطراف).

3. **التعديل بمستقيم مايير** $(MAYER)$

عيّن G_1 النقطة المتوسطة للنقط الثلاثة الأولى و G_2 النقطة المتوسطة للنقط الأخرى ثمّ استنتج المعادلة المختصرة للمستقيم (G_1G_2). أنشئ هذا المستقيم في نفس المعلم السابق.

4. **التعديل بمستقيم الإنحدار**

أكتب معادلة مستقيم الإنحدار $y = ax + b$. أنشئ هذا المستقيم في نفس المعلم السابق. أيّ المستقيمات أقرب للسحابة ؟

حل

1. في معلم متعامد مبدؤه $O'(0;2)$ ، نمثّل سحابة النقط المرفقة بالسلسلة الإحصائية كما في الشكل. لدينا: $G(22;3,87)$.

2. التزايد المتوسّط السنويّ لحصة التكاليف هو: $\overline{Y} = 3,87$.

المعادلة المختصرة للمستقيم (M_1M_6) هي: $y = -0,03x + 3,87$.

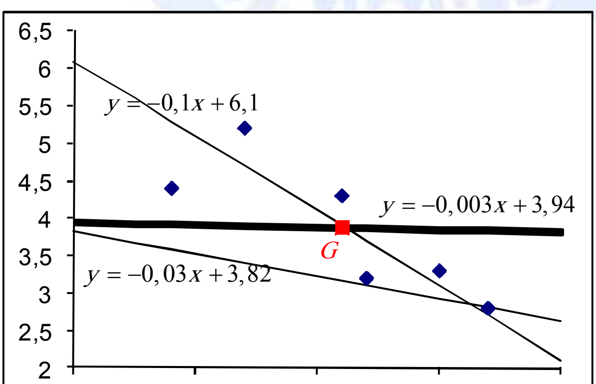
3. $G_1(14,67;4,63)$ و $G_2(29,33;3,1)$

والمعادلة المختصرة للمستقيم (G_1G_2) هي: $y = -0,1x + 6,1$.

4. نعلم أنّ المعادلة المختصرة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا والذي يشمل النقطة المتوسطة $G(22;3,87)$ لسحابة النقط هي $y = ax + b$ ، حيث:

$$a = \frac{\left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i y_i\right) - \overline{XY}}{\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\left(x_i - \overline{X}\right)^2} \quad \text{و} \quad b = 3,87 - 22a$$.

منه متحصل على التمثيلات المقابلة



تطبيق 2

نعتبر معطيات المثال 2 الواردة في الفقرة الثانية الخاصة بالسلاسل الزمنية:

السنة	1920	1946	1953	1962	1966	1972	1987
النسبة المئوية	71	67	64	56	54	53	48

1. مثّل، باستعمال طريقة *Mayer*، سحابة النقط المرفقة بهذه السلسلة. علّم النقطة المتوسطة للسحابة.
2. عيّن معادلة مستقيم التعديل الخطي بالمربعات الدنيا (يعطى الميل a بالتقريب 10^{-3} والترتيب إلى المبدأ b بالتقريب 10^{-2}).
3. باستعمال هذا التعديل الخطي، أعط تقديرا لنسبة سكان الريف في السنة 1992.

حل

لنقسم الجدول إلى جزأين، كما يلي:

1920	1946	1953	1962
71	67	64	56

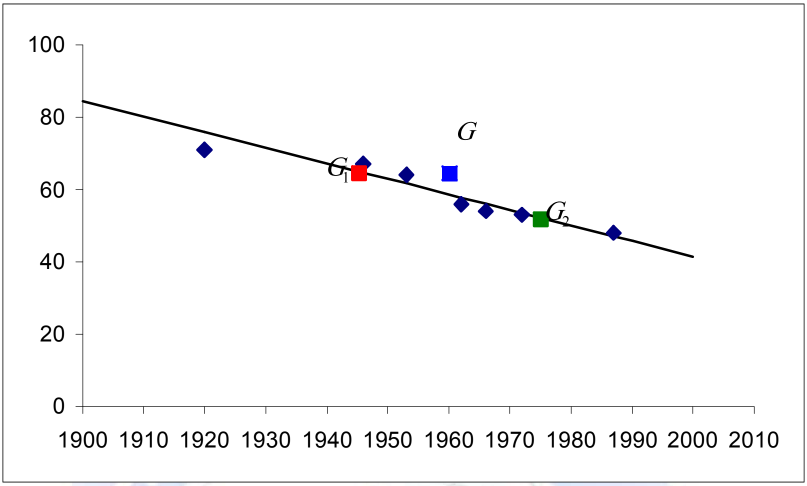
1966	1972	1987
54	53	48

نجد: $G_1(x_1 ; y_1) = (1945,25;\ 64,5)$ و $G_2(x_2 ; y_2) = (1975;\ 51,7)$.

ولدينا أيضا $G(1958 ; 59)$.

المستقيم (G_1G_2) له معادلة: $y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

ميله هو $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -0,43$ ومنه: $y = -0,43x + 901,45$



.2

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1920\times 71+\ \dots\ +1987\times 48}{7}-1958\times 59$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{807\,622}{7}-115522\approx -147,43$$

$$V(X)=\frac{1920^2+\ \dots\ +1987^2}{7}-1958^2\approx 390$$

ويكون ميل مستقيم التعديل الخطي $a=\dfrac{\operatorname{cov}(X;Y)}{V(X)}\approx -0,378$

والترتيب إلى المبدأ $b=\overline{y}-a\overline{x}$ أي $b=799,12$

منه: $y=-0,378x+799,12$.

3. باستعمال هذا التعديل، يمكن تقدير النسبة المئوية لسكان الريف بنسبة 46% وذلك بتدوير النتيجة إلى الوحدة.

.$\left(y=-0,378\times 1992+799,12=46,144\approx 46\right)$

وهي النتيجة التي يمكن إيجادها كذلك باستعمال التمثيل البياني السابق وذلك بتعيين ترتيب النقطة من المستقيم (G_1G_2) التي فاصلتها 1992.

ملاحظة

- نقوم باستكمال داخلي (*interpolation*) عندما نحصل على تقدير عند زمن معيّن غير مرفق بنقطة من السحابة ومحصور بين زمنين من السحابة.
- نقوم باستكمال خارجي(*extrapolation*) عندما نحصل على تقدير عند زمن معيّن غير مرفق بنقطة من السحابة ويكون خارج أزمنة السحابة مع اعتبار النموذج ممكنا خارج هذا المجال.

III. ملخص الدرس:

1.السلاسل الزمنية

- في معلم متعامد (مناسب) مجموعة النقط $M_i\left(x_i, y_i\right)$ هي سحابة نقط السلسلة ذات المتغيرين X و Y.

- النقطة المتوسطة لهذه السلسلة هي النقطة $G\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ حيث $\bar{x}$ هو الوسط الحسابي للقيم x_i (المعدل) و $\bar{y}$ الوسط الحسابي للقيم y_i:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$$

2. التعديل الخطي

- القيام بتعديل تآلفي لسحابة نقط $M\left(x_i; y_i\right)$ يعني إيجاد دالة تآلفية تعبّر بكيفية تقريبية عن y بدلالة x.

- مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هو المستقيم الذي يشمل النقطة المتوسطة لسحابة النقط و الذي معادلته المختصرة $y = ax + b$ ، حيث:

$$a = \frac{\operatorname{cov}\left(X, Y\right)}{V\left(X\right)} \quad \text{و} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

IV. توظيف المعارف:

1. التعديل بقطع مكافئ

يوضّح الجدول الآتي درجات التلوّث في مدينة صناعية على مدار سبع سنوات:

السنة x_i	1	2	3	4	5	6	7
الدرجة y_i	9.8	9.6	9.7	10,3	11,5	12,7	14,6

1. في معلم متعامد ومناسب، مثّل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$. ما هو الشكل الذي تُوحي به السحابة ؟.

2. نبحث عن تعديل من الشكل $f(x) = a(x-2)^2 + b$. نضع $z_i = (x_i - 2)^2$ من أجل $x_i \geq 2$. مثّل سحابة النقط $M_i(z_i; y_i)$.

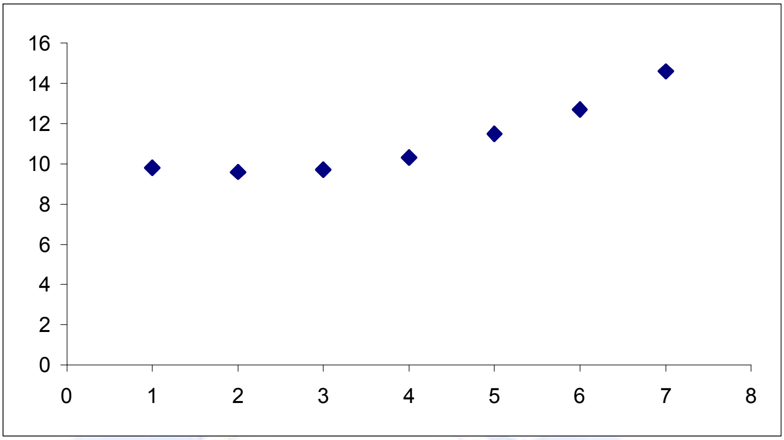
3. أكتب معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا لــ y بدلالة z ، ومثّله في نفس المعلم السابق. (تعطى قيمتي a و b مدورتين الى 10^{-1}).

4. استنتج معادلة القطع المكافئ المعدّل لسحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$.

5. نستغّل دالة التعديل للقيام باستكمالات داخلية أو خارجية. توقّع درجة التلوّث خلال السنة العاشرة.

حل

1. بعد تمثيل السحابة، نلاحظ أنّ شكلها يوحي بقطع مكافئ ذروته $x = 2$ (الشكل).



2. نضع $z_i = (x_i - 2)^2$ من أجل $x_i \geq 2$. نحصل على السلسلة الجديدة:

z_i	0	1	4	9	16	25
y_i	9.6	9.7	10,3	11,5	12,7	14,6

لتعيين المعادلة المختصرة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا لـــ y بدلالة z ، نحسب المعاملين a و b :

لدينا $\bar{z} = 9{,}17$ و $\bar{y} = 11{,}4$

و $\operatorname{cov}(Z;Y) = \dfrac{0\times 9{,}6 + \ldots + 25\times 14{,}6}{6} - 9{,}17\times 11{,}4 = 15{,}76$

و $V(z) = \dfrac{0^2 + 1^2 + \ldots + 25^2}{6} - (9{,}17)^2 = 69{,}74$

منه $a = \dfrac{15{,}76}{69{,}74} \approx 0{,}2$ و $b = 11{,}4 - 0{,}2\times 9{,}17 \approx 9{,}6$

منه المعادلة: $y = 0{,}2z + 9{,}6$

ونستنتج معادلة قطع المكافئ المعدّل: $f(x) = 0{,}2(x-2)^2 + 9{,}6$

وتكون درجة التلوّث المتوقعة خلال السنة العاشرة حوالي 22,4.

2. استعمال مجدول

نقارن في الجدول التالي نسبتي الناجحين بدرجة جيّد في امتحان البكالوريا في ثانويتين (1) و (2) خلال سنوات معينة كما يوضح الجدول.

السنة	1985	1990	1995	2000	2001	2002	2003
الرتبة x_i	0	5	10	15	16	17	18
الثانوية (1) y_i	3,7	3,2	4,2	5,8	6	6,5	6,4
الثانوية (2) z_i	9	7,5	10,2	8,2	7,4	7,7	8,3

➢ **تعيين النزعة باستعمال المجدول إكسال**

لتعيين مستقيمي الإنحدار بالمربعات الدنيا لسحابتي النقط $(x_i;y_i)$ و $(x_i;z_i)$، نملأ ورقة العمل كما يلي:

- العمود الأول خاص بالسنوات من الخلية A3 الى الخلية A9
- العمود الثاني خاص بالرتبة x_i من الخلية B3 الى الخلية B9
- العمود الثالث خاص بالقيم y_i من الخلية C3 الى الخلية C9
- العمود الرابع خاص بالقيم z_i من الخلية D3 الى الخلية D9

ونخصّص الخلايا الخلايا A2 ، B2 ، C2 و D2 للعناوين.

➢ **تعيين سحابتي النقط في نفس المعلم**

حدّد الحيز B2:D9 من ورقة العمل، ثمّ أنقر على المساعد البياني  ، اختر سحابة نقاط(*nuage de point*) ثمّ إنهاء.

$$V(z)=\frac{0^2+1^2+4^2+9^2+16^2+25^2}{6}-(9,17)^2$$ سيظهر المخطط المطلوب.

أنقر بالزّر الأيمن للفأرة على إحدى نقط السحابة لفتح نافذة.

أنقر على "إضافة خط اتجاه" (*ajouter un courbe de tendance*)، ثمّ اختر "خطي" (*linéaire*) ثم موافق.

- بنفس الكيفية السابقة، ضف مستقيم الإنحدار للسحابة $(x_i ; z_i)$.

ملاحظة

لإظهار معادلة منحنى النزعة، أنقر باليمين على المستقيم ثمّ تتبع الخطوات التالية:

1) تنسيق خط الاتجاه (*format de la courbe de tendance*).

2) خيارات (*options*).

3) عرض المعادلة على التخطيط.
(*afficher l'équation sur le graphique*)

4) موافق (OK).

- **البحث عن تعديل آخر (أدق)**

- أنقر باليمين على إحدى النقط ثم أنقر على "إضافة خط اتجاه" (*ajouter un courbe de tendance*) ثم اختر الشكل " متعدد الحدود " (*polynomiale*) وكذلك الرتبة التي تناسب كثير الحدود .

- ماهو الإختيار الذي يبدو أكثر ملائمة ؟

بنفس الطريقة أبحث عن تعديل أدق للسحابة $(x_i ; z_i)$

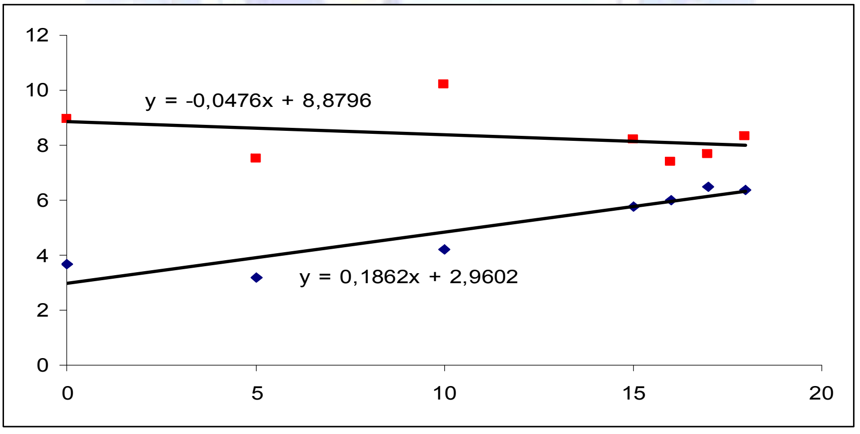
- ماهي النسبة المتوقعة للناجحين بدرجة جيّد في الثانوية (1) في 2008 ؟

حل

نملأ الخانات كما يلي:

السنوات	xi	yi	zi
1985	0	3,7	9
1990	5	3,2	7,5
1995	10	4,2	10,2
2000	15	5,8	8,2
2001	16	6	7,4
2002	17	6,5	7,7
2003	18	6,4	8,3

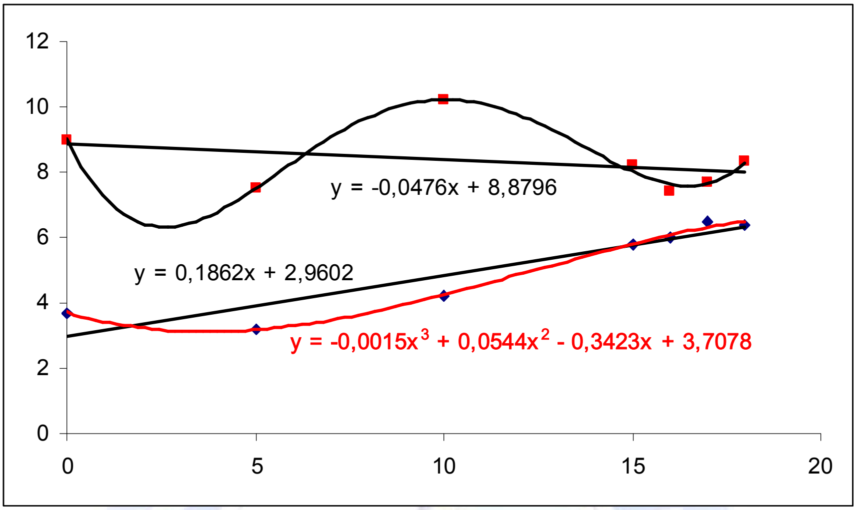
لتمثيل السحابتين، نتبع الخطوات الواردة في الجزء الثاني من السؤال، ونحصل على الشكل:



وعند البحث عن تعديلات أدق نحصل على ما يلي:

منحني كثير حدود من الدرجة الثالثة بالنسبة إلى السلسلة (x_i, y_i).

منحني كثير حدود من الدرجة الرابعة بالنسبة إلى السلسلة (x_i, z_i).



لتعيين النسبة المتوقعة للناجحين بدرجة جيّد في الثانوية (1)، نعتمد على معادلة منحني الدالة كثير الحدود من الدرجة الثالثة (التعديل الثاني للسلسلة (x_i, y_i))، المستظهرة كما في حالة استتظهار معادلة مستقيم الانحدار، أي:

$$y=-0.0015x^3+0.0544x^2-0.3423x+3.7078 .$$

ونجد: $\approx 6.4\%$.

أ.تمارين

سلسلة إحصائية ذات متغيرين

1. أحسب الوسط الحسابي لكلّ من السلاسل التالية (دون حاسبة) باستعمال خواص الخطية للوسط الحسابي.

أ) 101 102 103 104 105 106

ب) 23550 23575 23600 23650 23700

حـ) 0,0052 0,0055 0,0057 0,0062

د) 16 14 9 12 10 10 13 14 17

2. أ) أحسب وسط السلاسل التالية ووسط مربعاتها.

- 2 5 7 8 4 12 7 9 10 11
- 0,4 0,1 0,2 0,3 0,5 0,1

ب) هل وسط مربعات قيم السلسلة يساوي مربع وسط قيم السلسلة ؟

3. باستعمال حاسبة، أحسب الوسط والانحراف المعياري لكلّ من السلاسل التالية :

أ) 2,4 3,1 2,3 0,1 3,3 1 1,9 2,5 2,2 0,9 1,6 2,6 1,2 3,5 2,4

ب) 11 12 10 11 12 13 10 11 14 12 13 12

حـ) 2 5 18 5 2 12 6 7 16 15 12 17 4 7 10

4. السلسلة المرتبة التالية تمثل علامات تلاميذ في اختبار ما.

4	4	4	4	5	6	6	6	6	6	7
7	8	8	8	8	8	9	9	10	11	11
11	12	12	13	13	14	15	16	18		

أ) حدّد الوسيط والربعيين الأوّل والثالث.

ب) احسب Q_1 و Me و Q_3 ثم أنشئ المخطط بالعلب.

د) أحسب الوسط الحسابي وقارنه مع الوسيط.

5. نعتبر السلسلتين الإحصائيتين التاليتين:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0,42	0,76	0,60	0,08	0,21	0,92	0,61	0,58	0 , 3	0,26

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_i	15,9	16,0	17,0	17,5	17,8	18,0	18,5	19,0	20,1	20,3

أ) مثل سحابة النقط $(x_i;y_i)$ في معلم متعامد، طول الوحدة $1\ cm$ على محور الفواصل و $0{,}1\ cm$ على محور التراتيب.

ب) مثّل سحابة النقط $(t_i;z_i)$ في معلم مناسب.

6. الجدول التالي يبين x_i نسبة الأمية و y_i متوسط عمر النساء في 15 دولة نامية.

x_i	30,2	57,8	43,4	21,7	38,4	28,6	31	22,7
y_i	55	59,4	56,8	57,6	50,3	58,7	55,5	58,9
x_i	51,4	45,6	52,5	47,1	69,1	35,7	25,8	
y_i	52,4	56,4	51,5	52,7	41	47,5	54,6	

1) أحسب إحداثيي النقطة المتوسطة $G(\bar{x};\bar{y})$.

2) مثل هذه السلسلة ذات المتغيرين في معلم متعامد مبدؤه $O(20;40)$، وبوحدة $1cm$ لـــ 2% على محور الفواصل و $1cm$ لكل سنتين على محور التراتيب وبين النقطة المتوسطة على البيان.

7. نعتبر السلسلة (x_i , y_i) التالية والتي تمثل إنتاج الحبوب في الجزائر (الوحدة: مليون قنطار).

x_i	1962	1968	1976	1978	1980
y_i	23	16	23,1	15,3	24,2
x_i	1982	1990	1997	2001	2002
y_i	15,2	16,2	8,6	26,5	19,5

المصدر :الديوان الوطني للإحصاء (الجزائر بالأرقام 2005)

مثّل سحابة النقط لهذه السلسلة ، ثم احسب إحداثيتي النقطة المتوسطة G.

.8 إليك الجدول التالي:

t_i	1996	1997	1998	1999	2000	2001
x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	4,399	4,305	4,157	4,188	4,201	4,353

1) مثل سحابة النقط (t_i, y_i) في معلم متعامد مبدؤه $O(1996;4,1)$ وبوحدة $2cm$ لكل وحدة على محور الفواصل و $1cm$ لكل 0,05 على محور التراتيب.

2) بأيّ تحويل يمكن الحصول على سحابة النقط (x_i, y_i) انطلاقا من سحابة النقط (t_i, y_i) ؟

.9 أوجد إحداثيي النقطة المتوسطة للسلسلة (t_i, y_i) المعطاة في التمرين (8) واستنتج دون حساب إحداثيي النقطة المتوسطة للسلسلة (x_i, y_i).
حدد خاصية الوسط المستعملة.

التعديل الخطي بالمربعات الدنيا

.10 الجدول التالي يبين دراسة نسبة الكراء في مدخول المواطن.

a	1978	1984	1992	1994	2000	2004
$x_i = a - 1970$	8	14	22	24	30	34
$y_i\,\%$	4,4	5,2	4,3	3,2	3,3	2,8

1) مثّل سحابة النقط (x_i , y_i) في معلم متعامد مختار جيدا.

أحسب إحداثيي النقطة المتوسطة G للسحابة.

2) **التعديل بمستقيم (الطرفين)**

أحسب التزايد المتوسط السنوي لنسبة الكراء واستنتج معادلة مختصرة للمستقيم (M_1M_2).

3) **التعديل بمستقيم ماير** $Mayer$

– حدد إحداثيي النقطة المتوسطة G_1 للنقط الثلاث الأولى والنقطة المتوسطة G_2 للنقط الثلاثة الأخيرة.

– أكتب معادلة مختصرة للمستقيم (G_1G_2) وأنشئه على البيان.

4) **التعديل بمستقيم الانحدار**

أوجد معادلة مستقيم الانحدار $y = ax + b$. أنشئ هذا المستقيم.

5) **استكمال**

باستعمال كلّ من التعديلات السابقة قدّر نسبة الكراء سنة 2010، ثم سنة 2030 حسب التعديل بمستقيم الانحدار.

.11 الجدول التالي يبيّن متوسط العمر لدى النساء في إحدى الدول المتقدمة.

a_i	1990	1991	1992	1993	1994	1995
q_i	80,9	81,1	81,4	81,4	81,8	81,9
a_i	1996	1997	1998	1999	2000	2001
q_i	82,0	82,3	82,4	82,4	82,7	82,7

نضع $x_i = a_i - 1990$ و $y_i = q_i - 80$

1) أكتب معادلة مختصرة لمستقيم الإنحدار y بدلالة x ، تعطى المعاملات مدورة إلى 10^{-3}.

2) أ) حسب هذا التعديل الخطي، ما هو التزايد المتوسط لمتوسط العمر خلال 10 سنوات ؟

ب) أحسب متوسط العمر المتوقع سنة 2005 .

ح) في أية سنة يتجاوز متوسط العمر 85 سنة ؟

3) نفرض أنّ متوسط العمر للنساء في سنة 2004 هو 83,8 سنة. هل التعديل الخطي بالمربعات الدنيا يعطي هذه النتيجة ؟ أعط بالنسبة المئوية الخطأ المرتكب ؟

12. يمثّل الجدول التالي نسب الإنفاق على البحث العلمي في إحدى الدول.

x_i	1992	1993	1994	1995	1996	1997
y_i	2,38	2,4	2,34	2,31	2,3	2,22
x_i	1998	1999	2000	2001	2002	
y_i	2,17	2,18	2,18	2,23	2,2	

1. مثل سحابة النقط $(x_i ; y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O(1990; 2\%)$ وبوحدة $1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $1cm$ لكل $0,05\%$ على محور التراتيب.

2. أ) أعط معادلة لمستقيم التعديل $y = ax + b$ بطريقة المربعات الدنيا. يعطى a و b مدورين الى 10^{-3}.

ب) أرسم هذا المستقيم في المعلم السابق .

ح) بفرض أن تغيّر النسب يبقى على هذه الوتيرة في السنوات القادمة، قدّر النسبة المئوية لانفاق الدولة على البحث العلمي في سنة 2005.

3. أ) أعط معادلة لمستقيم التعديل لــ y بدلالة x فقط من أجل السنوات من 1998 الى 2002.

ب) ماذا ترى في نسبة الإنفاق سنة 2005 مع هذا التعديل الأخير؟

مسألة للتعمق

13. على مستوى سوق الجملة للخضر والفواكه، يعرض التجار سلعة كَثُرَ الطلبُ عليها من قبل المستهلكين. x_i الكميات المعروضة بالأطنان، السعر المحدّد من قبل المنتجين هو سعر العرض y_i (بِــ DA لِــ kg) السعر الذي سيدفعه المستهلك حسب الكمية هو سعر الطلب z_i.

من أجل 50 طن، سعر العرض هو$8DA$ لِــ $1kg$ وسعر الطلب هو $5DA$ لِــ $1kg$.

x_i	10	25	35	50	65	70
y_i	4,9	6,05	6,05	8	9,35	9,8
z_i	11	7	6	5	4,4	4,2

نستعمل معلما متعامدا وبوحدة $1cm$ لكلّ 5 طن على محور الفواصل و$1cm$ لكلّ دينار على محور التراتيب.

1. أ) مثّل سحابة النقط الموافقة للسلسلة الإحصائية $M_i\left(x_i;y_i\right)$ واحسب إحداثيي النقطة المتوسطة G للسحابة، ثمّ حدّدها على المعلم.

ب) أوجد معادلة (Δ) مستقيم الإنحدار لــ y بدلالة x بالمربعات الدنيا. (يعطى المعاملان مدورين إلى 10^{-2}).

لتكن f "**دالة العرض**" للمنتوج التي منحناهاهذا المستقيم. أنشئ (Δ) في نفس المعلم السابق.

حـ) ما ثمن العرض من أجل كمية تقدر بــ 60 طن ؟

2. أ) في نفس المعلم، مثّل سحابة النقط $N_i(x_i;z_i)$.

ب) نقترح تعديلا لسحابة النقط باستعمال دالة g، تسمى **دالة الطلب**، معرفة على المجال $[0;100]$ كمايلي:

$g(x)=a+\dfrac{b}{x+10}$ ؛ حيث a و b عددان حقيقيان.

علما أن منحنى الدالة g يمرّ بالنقطتين $N_1(10;11)$ و $N_4(50;5)$ ، أوجد العددين a و b.

أرسم منحنى الدالة g.

3) يتحقق التوازن في سوق ما عندما يكون العرض مساويا الطلب.

أ) حل المعادلة: $0,08x+4=2+\dfrac{180}{x+10}$

ب) استنتج كمية التوازن مدورة الى 0,1 طن، ثمّ سعر التوازن.

إشرح ومثّل النتيجة على البيان.

ب.حلول التمارين

.1

x و y متغيران حقيقيان.

نعلم أنّه إذا عوّضنا المتغير x بالمتغير y المعرّف بالشكل $y=ax+b$ ،

حيث a و b عددان حقيقيان، فإنّ الوسط (الحسابي) للمتغيّر y هو:

$\bar{y}=a\bar{x}+b$.

نلاحظ أنّ كلّ قيم السلسلة قريبة من العدد 100. نطرح إذن من كلّ قيمة 100 ونطبق خاصية الخطية للوسط السابقة مع اعتبار $a=1$ و $b=-100$ ، فنحصل على السلسلة الجديدة: 1 2 3 4 5 6 التي وسطها الحسابي يساوي 3,5:

لدينا $\bar{y}=\bar{x}-100$ ، منه $\bar{x}=\bar{y}+100$

ويكون وسط السلسلة الأصلية 103,5.

وبنفس الكيفية، نحسب وسط السلاسل الأخرى.

.2 أ)

- الوسط: 6,5 وسط مربعات القيم:65,3
- الوسط: 0,27 وسط مربعات القيم:0,09

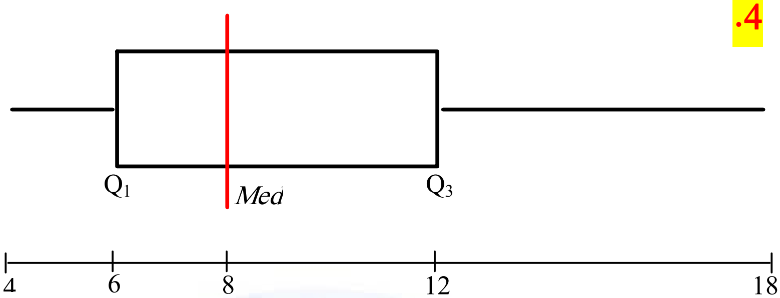
ب) لا. $6,5^2 \neq 65,3$

.3 أ) $\bar{x}=2,06667$ و $\sigma=0,922798$

ب) $\bar{x}=11,75$ و $\sigma=1,16369$

حـ) $\bar{x}=9,2$ و $\sigma=5,29402$

.4

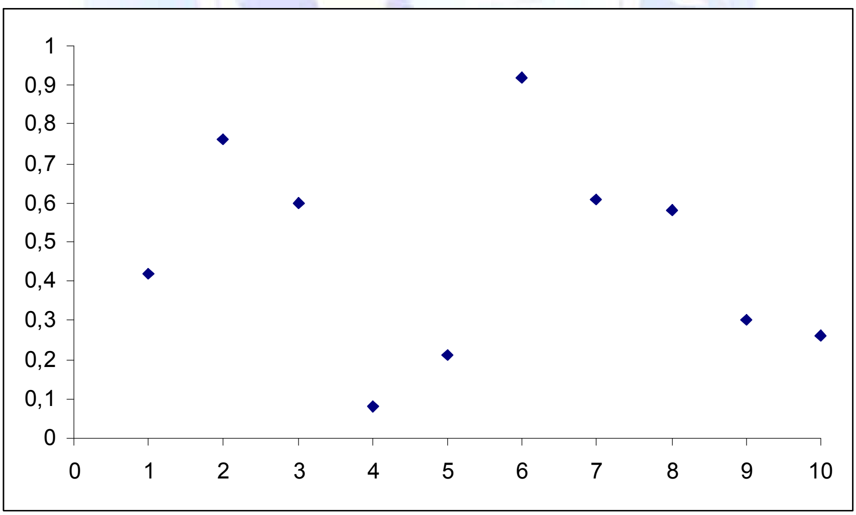


الوسيط: 8

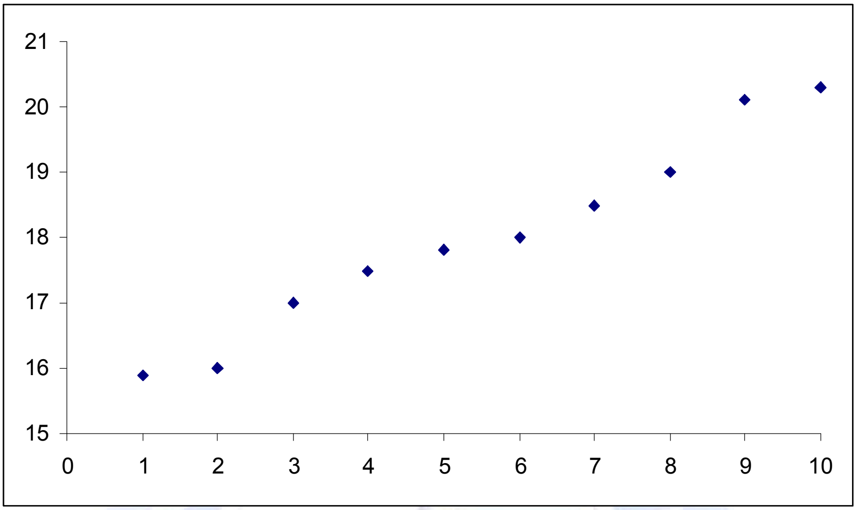
$Q_3 = 12$ ، $Q_1 = 6$

الوسط الحسابي: 9

.5



تمثيل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$

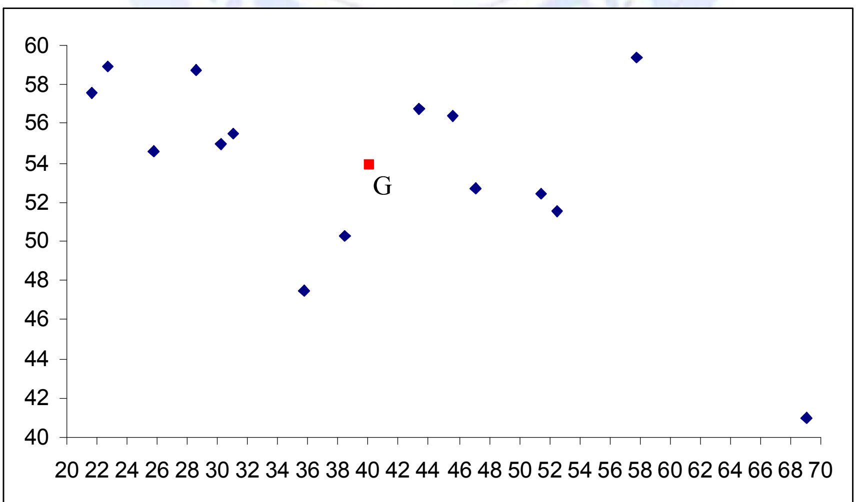


تمثيل سحابة النقط $M'_i(t_i; z_i)$

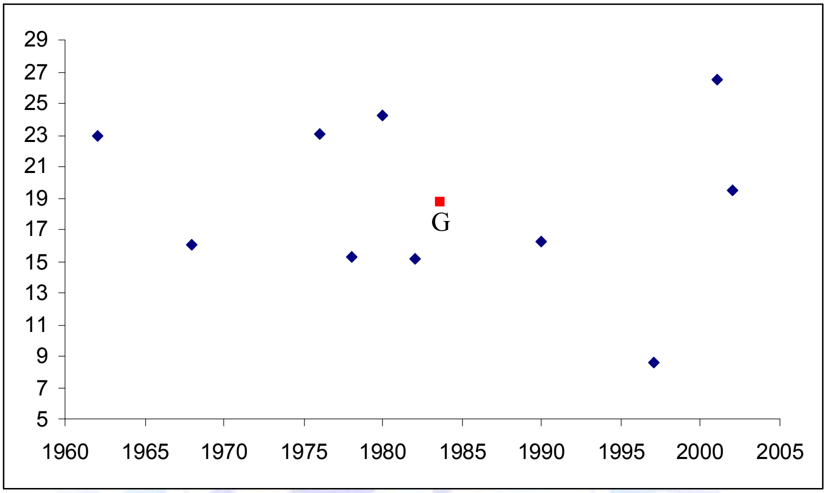
.6

أ) $G(40,07\ ;\ 53,89)$.

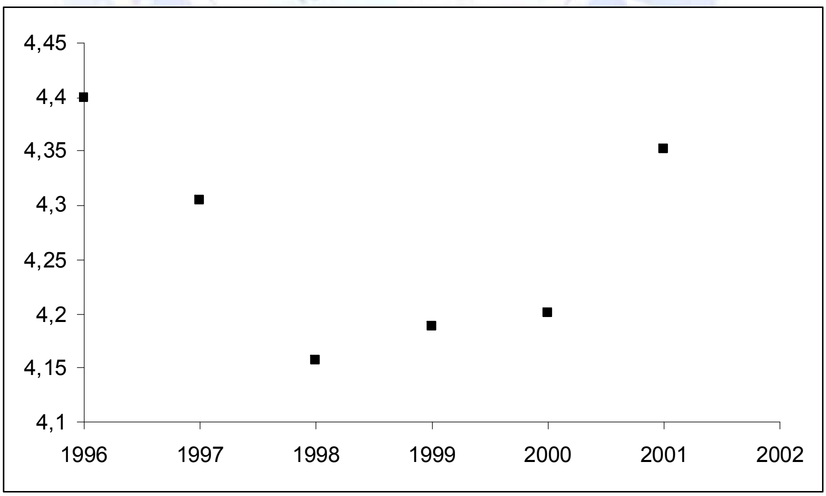
ب) تمثيل سحابة النقط و النقطة المتوسطة.



.7 $G(1983,6\ ;\ 18,76)$



.8 1) مثل سحابة النقط (t_i , y_i)

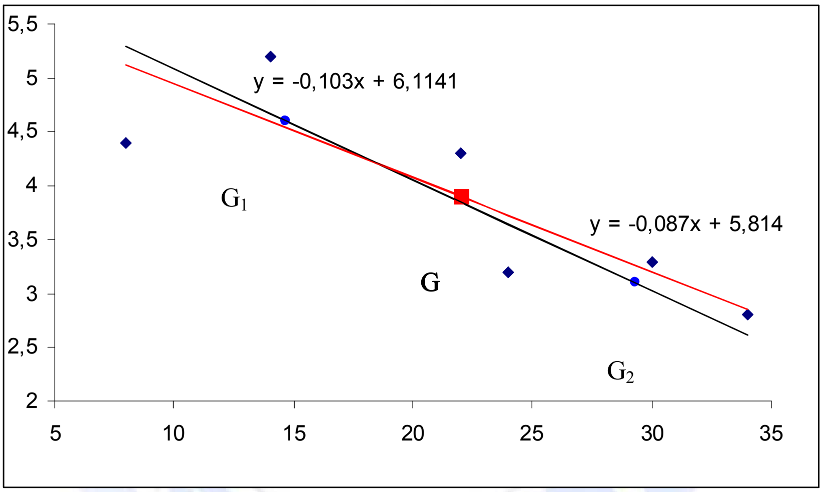


2) $x_i = t_i - 1996$

.9 $\left(\overline{t};\overline{y}\right)=\left(1998,5\ ;\ 4,27\right)$

لدينا كذلك $x_i=t_i-1996$. باستعمال خاصية الخطيّة للوسط الحسابي، أي $\overline{x}=\overline{t}-1996$ ، نجد: $\left(\overline{x};\overline{y}\right)=\left(2,5\ ;\ 4,27\right)$.

.10 1) $G\left(22\ ;\ 3,9\right)$



2) التزايد المتوسط السنوي لنسبة الكراء: $\overline{y}=3,9$

منه المعادلة المختصرة للمستقيم $\left(M_1M_2\right)$: $y=\dfrac{5,2-4,4}{14-8}\left(x-8\right)+4,4$

أي $y=0,13x+3,36$

3) $G_1\left(14,7\ ;\ 4,6\right)$ ، $G_2\left(29,3\ ;\ 3,1\right)$

منه المعادلة المختصرة للمستقيم $\left(G_1G_2\right)$: $y=-0,103x+6,1$

4) لدينا: $a=\dfrac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{V\left(X\right)}$ و $b=\overline{y}-a\overline{x}$

منه $a=-0,087$ و $b=5,814$

ونجد المعادلة المختصرة لمستقيم الانحدار: $y=-0,087x+5,814$

(5

التعديل	2010	2030
مستقيم الطرفين	8,6	11,2
(G_1G_2)	2	-0,1
مستقيم الانحدار	2,3	0,6

.11 بوضع $x_i = a_i - 1990$ و $y_i = q_i - 80$ ، نجد السلسلة الجديدة الآتية:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i	0,9	1,1	1,4	1,4	1,8	1,9	2	2,3	2,4	2,4	2,7	2,7

1) $y = 0,167x + 0,997$

2) أ) التزايد المتوسط هو: 2,7

ب) 3,5

حـ) 2014

3) التعديل الخطي يعطي القيمة: 3,337

يكون الخطأ المرتكب مقدرا بـــ : 0,463 أي $46\% \approx$

.12

1. نمثّل سحابة النقط مع النقطة المتوسطة $G(1997\,;\,2,265)$ في المعلم المطلوب كما في الشكل.

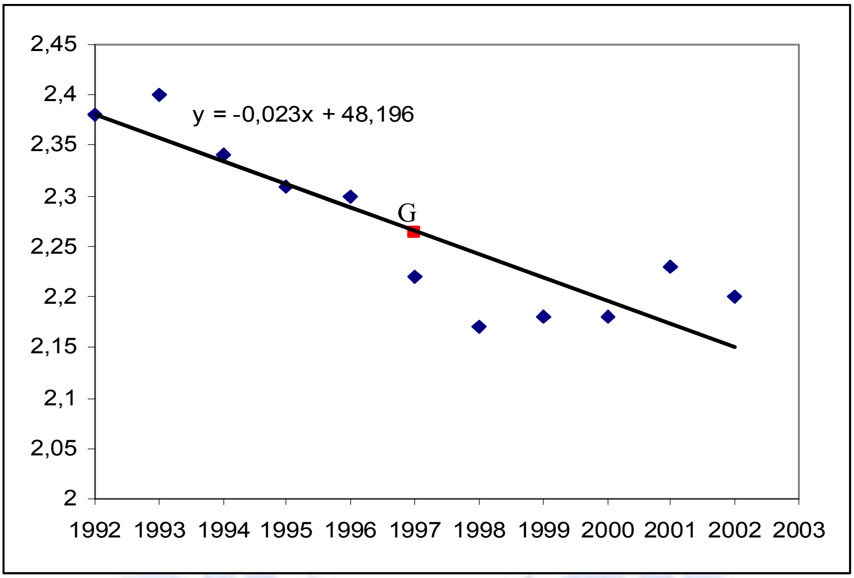
2. أ) لتعيين معادلة لمسقيم التعديل بطريقة المربعات الدنيا، نحسب أولا المعاملين a و b:

$$b = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \quad \text{و} \quad a = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)$$

ونجد: $a=-0.023$ و $b=48,196$.

منه المعادلة: $y=-0,023x+48,196$

ب) ونمثّل مستقيم الانحدار في نفس المعلم كما في الشكل.



ح) تقدير النسبة المئوية لانفاق الدولة على البحث العلمي في سنة 2005 وفق هذا التعديل هو: $2,081\%$.

3. أ) بنفس الطريقة كما في السؤال 1)، نعيّن معادلة لمسقيم التعديل لــ y بدلالة x للفترة من 1998 الى 2002: $y=0,011x-19,81$.

ب) حسب هذا التعديل الجديد، تكون النفقات المتوقعة للسنة 2005 مقدرة بــ: $2,25\%$.

حل المسألة

.13

1. أ) تمثيل $M_i(x_i;y_i)$ و النقطة المتوسطة $G(42,5\ ;\ 7,358)$ (كما على الشكل).

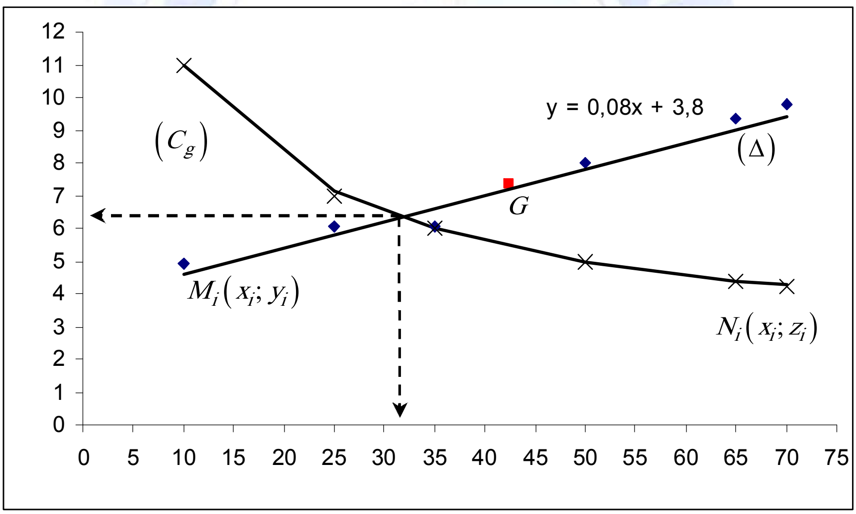
ب) معادلة (Δ): $y=0,08x+3,8$

حـ) $f(60)=8,6$

2. أ) تمثيل سحابة النقط $N_i(x_i;z_i)$

ب) $g(x)=2+\dfrac{180}{x+10}$

تمثيل g كما يظهر على الشكل.



3. أ) الحلّ المقبول للمعادلة: $x=30,625$

ب) كمية التوازن: $30,6$ طن.

سعر التوازن الموافق: $6,5\ DA$ للكيلوغرام الواحد.

(وهي النتائج التي يمكن قراءتها على البيان).

V. تقويم ذاتي:

أ. اختيار من متعدد

1. إليك جدول القيم المقابل.

x_i	1	2	3	5	6
y_i	4	7	10	14	16

بيّن العبارات الصحيحة والعبارات الخاطئة في كلّ مما يلي.

أ) المستقيم (D_1) الذي معادلته $y = 2x + 4$ يشمل ثلاث نقط من السلسلة، وبالتالي (D_1) تعديل مناسب.

ب) المستقيم (D_2) الذي معادلته $y = 3x + 1$ يشمل ثلاث نقط من السلسلة، وبالتالي (D_2) هو أحسن تعديل.

ح) مستقيم الانحدار (Δ) لــ y بدلالة x معادلته: $y = 2{,}36\ x + 2{,}17$ المعاملان مقربان الى $\frac{1}{100}$.

2. نعتبر نفس معطيات التمرين السابق.

أ) لتحديد أفضل تعديل لسحابة نقط وفق طريقة المربعات الدنيا لكلّ من المستقيمين (D_1) و (D_2) نحسب $S = \sum\left(y_i - \left(ax_i + b\right)\right)^2$

ب) من اجل المستقيم (D_1) الحدود الثلاثة الأخيرة في المجموع S معدومة.

ح) من أجل المستقيم (Δ)، كلّ الحدود في المجموع S معدومة.

د) المجموع S يأخذ نفس القيمة من أجل (D_1) و (D_2).

ه) المجموع S يأخذ القيمة الدنيا له من آجل المستقيم (Δ).

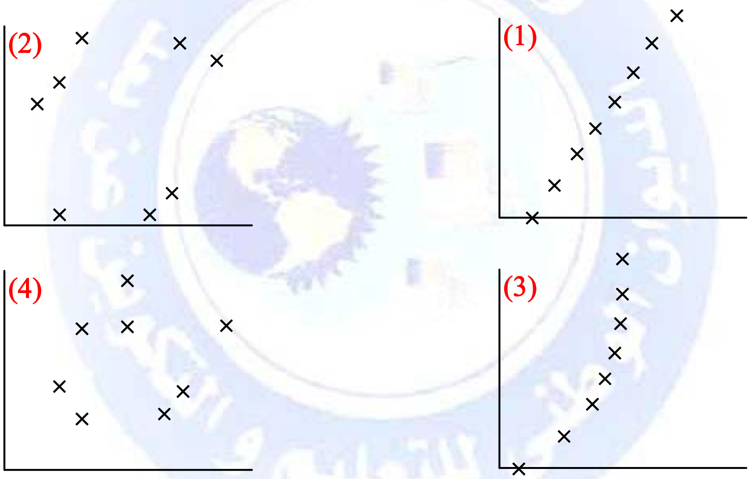
و) $S = 5$ من أجل المستقيم (D_1).

ب. صحيح أم خاطئ

أجب بصحيح أم خاطئ عن الإفادات السبعة أدناه.

نعتبر السلاسل الخمسة مع سحابات النقط الأربعة.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1	1	8	5	3	8	9	8
z_i	0	3	8	15	24	35	48	63
t_i	0	10	20	30	40	50	60	70
w_i	6,71	9,29	10,71	0,23	1,68	11,96	8,64	0,23



أ) سحابة النقط $M_i(x_i\,; w_i)$ هي (4).

ب) سحابة النقط $N_i(x_i\,; z_i)$ هي (2).

ح) النقطة المتوسطة في السحابة (1) هي نقطة من السحابة.

د) نقط السحابة (2) على استقامة واحدة.

ه) النقطة المتوسطة (2) على استقامة واحدة مع بقية نقط السحابة.

و) نقط السحابة (3) تنتمي إلى قطع مكافئ.

ى) النقطة المتوسطة في السلسلة $(x_i\,; y_i)$ هي: $\sigma_1(4,5;4)$.

أ. أجوبة اختيار من متعدد

.1

أ) .... صحيح

ب) .... تعديل مناسب آخر وليس أفضل

ج) .... صحيح

.2

أ) .... صحيح

ب) .... صحيح

ج) .... خاطئ

د) .... خاطئ

ه) .... صحيح

و) .... صحيح

ب. أجوبة صحيح أم خاطئ

أ) .... خاطئ

ب) .... خاطئ

ج) .... صحيح

د) .... خاطئ

ه) .... خاطئ

و) .... صحيح

ى) .... خاطئ

VI. استعد للبكالوريا:

.1

أعطت نتائج دراسة حول منتوج مستهلك السلسلة الإحصائية $(x_i ; y_i)$
حيث x_i هو الثمن بالدينار للكيلوغرام و y_i الكمية المطلوبة بالطن .

الثمن x_i	100	115	120	130	137	150	165	188	200
الكمية y_i	5,8	5,2	5,1	4,8	4,6	4,3	4	3,7	3,5

1.مثّل سحابة النقط $M_i(x_i ; y_i)$ في معلم متعامد ومناسب.
هل التعديل الخطي مبرّر ؟

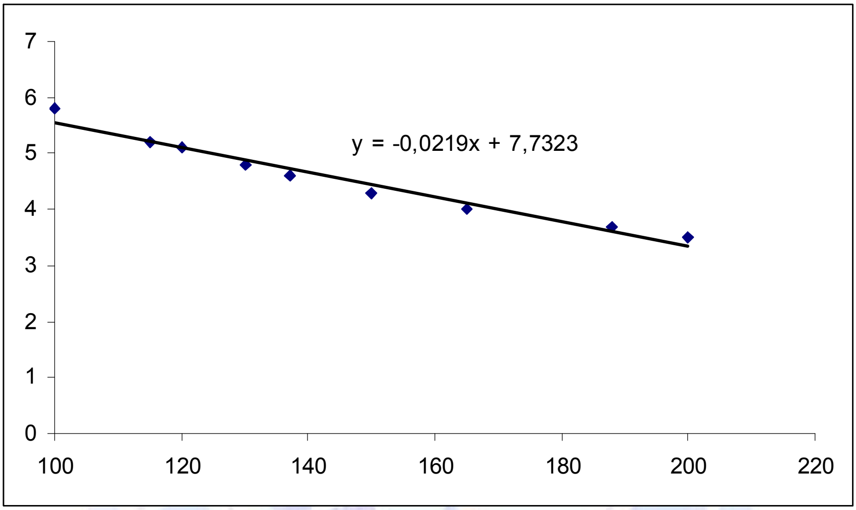
2.أ) أكتب المعادلة المختصرة لمستقيم الانحدار (Δ) (y بدلالة x).
(يعطى المعاملان مدورين إلى 10^{-2}).
ب) أنشئ هذا المستقيم في نفس المعلم .
حـ) أحسب الكمية المطلوبة المنتوج بالنسبة لثمن مقداره 245 دينارا للكيلوغرام .

3. نضع $z = \frac{100}{y}$. احسب القيم z_i مدورة إلى 10^{-1}، ثمّ عيّن المعادلة المختصرة لمستقيم الانحدار (z بدلالة x).(يعطى المعاملان مدوران إلى 10^{-2})
استنتج الدالة f التي ترفق الثمن x الكمية المطلوبة y حسب هذا التعديل ثمّ عيّن $f(245)$.

4. نعلم أنه، من أجل الثمن 245 دينارا، تكون الكمية المطلوبة المنتوج هي 3,2 طن. أيّ التعديلَيْن أدّق؟

حل

1. بعد تمثيل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد ومناسب، تظهر أنّ لها شكل متطاول. وبالتالي، يكون التعديل مبرّرا.



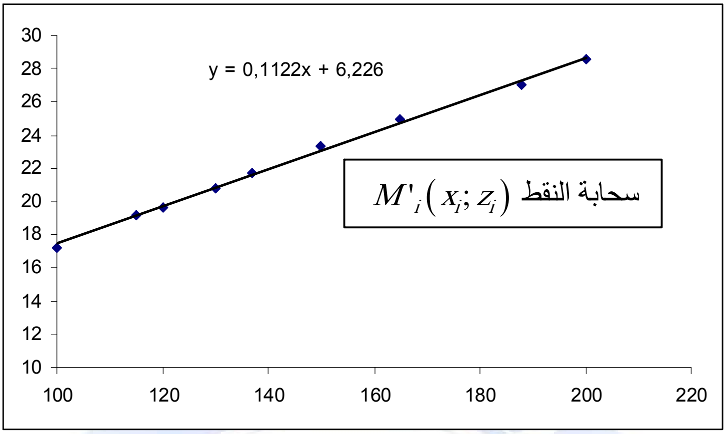
سحابة $M_i(x_i;y_i)$ وتمثيل (Δ)

2. أ) المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار (Δ) (y بدلالة x) هي:
$y=-0,02x+7,73$ حيث المعاملان مدوران الى 10^{-2}.

حـ) $2,83$ طن

3.

الثمن x_i	100	115	120	130	137	150	165	188	200
الكمية y_i	5.8	5.2	5.1	4.8	4.6	4.3	4	3.7	3.5
z_i	17.2	19.2	19.6	20.8	21.7	23.3	25.0	27.0	28.6



المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار (Δ') (z بدلالة x) هي:

$z = 0{,}11x + 6{,}23$ حيث المعاملان مدوران الى 10^{-2}.

ونستنتج $f(x) = \dfrac{100}{0{,}11x + 6{,}23}$ ، ونجد: $f(245) \approx 3{,}01$

بالمقارنة مع القيمة 3,2 طن المفروضة، يكون التعديل الثاني أدّق.

.2 (5 نقاط)

يوضح الجدول التالي x_i ثمن شراء عشر شاحنات (بمئات آلاف الدنانير أي 100.000 DA) و y_i ما يقابله من استهلاك متوسط للبنزين (باللتر في كلّ 100 Km، أي $l/100$).

x_i	30,82	31,2	31,62	32,25	33,65	34,4	34,8	36,2	36,8	43,4
y_i	7,4	7,6	7,7	7,8	8,4	8,5	8,6	8,9	9	9,8

1. مثّل سحابة النقط $(x_i;y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O'(30;7)$ ، وباختيار كوحدة: $1\,cm$ لكلّ 100.000 دينار على محور الفواصل، و $1\,cm$ لكلّ $0{,}5\,l$ على محور التراتيب. هل التعديل الخطي مبرّر ؟

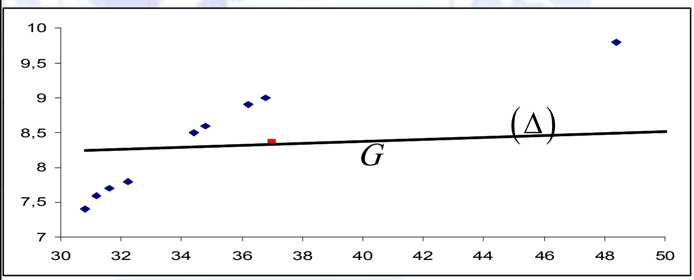
2. عيّن إحداثيي G النقطة المتوسطة للسحابة وعلّم G في نفس المعلم.

3. أكتب معادلة (Δ) مستقيم التعديل الخطي بالمربعات الدنيا على الشكل: $y = ax + b$. أنشئ (Δ) في نفس المعلم.

4. اشترى أحد الخواص شاحنة بثمن 000 510 6 دينارا. باستعمال التعديل الخطي السابق، بكم يقدّر الاستهلاك المتوسط في كلّ 100 كيلومتر لهذه الشاحنة ؟

5. لاحظ المشتري أن الاستهلاك هو 13 لتر في كلّ 100 كيلومتر، هل التعديل الخطي المقترح مناسب ؟

سلّم التنقيط

عناصر الإجابة	توزيع النقط
1. شكل سحابة النقط متطاول، التعديل مبرّر. 	$2\times 0,5$
2. $G(37,01\ ;\ 8,37)$	1
3. معادلة (Δ): $y = 0,0141x + 7,807$	1
4. الاستهلاك المتوسط في كلّ 100 كيلومتر للشاحنة حسب التعديل السابق هو: $8,7l$	1
5. التعديل غير مناسب، باعتبار 13>8,7.	1

حلّ المشكل الوارد في صفحة المقدمة:

الجداءات $n_i x_i$	التكرارات المجمعة الصاعدة	النسب المئوية (%)	التكرارات n_i	المراكز x_i	الفئات
300	20	5	20	15	[14 ; 16]
1088	84	16	64	17	[16 ; 18]
2240	196	28	112	20	[18 ; 22 [
1932	280	21	84	23	[22 ; 24]
1000	320	10	40	25	[24 ; 26]
2240	400	20	80	28	[26 ; 30]