1. المتتاليات

الكفاءات المستهدفة

- تبيان أنّ متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل أو محدودة.
- التعرّف إن كانت متتالية رتيبة.
- تبيان إن كانت متتالية متقاربة.
- التعرّف على متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = au_n + b$.
- البرهان بالتراجع على صحة خاصية في حالات بسيطة.

تصميم الدرس

تعريف

I. المتتالية الحسابية- المتتالية الهندسية

II. المتتاليات المحدودة والمتتاليات الرتيبة

III. نهاية متتالية

IV. الاستدلال بالتراجع

V. دراسة متتالية من الشكل: $u_{n+1} = au_n + b$ ، $(a \neq 0)$

VI. ملخص الدرس

VII. توظيف المعارف (تمارين + حلول وإرشادات)

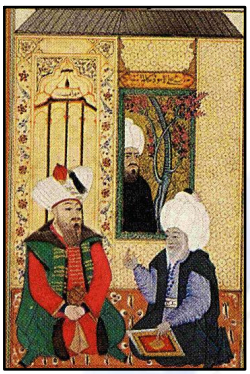
VIII. تقويم ذاتي (اختيار من متعدد + صحيح أم خاطئ)

IX. استعد للبكالوريا (مسائل محلولة مع سلّم التنقيط)

جميع الحقوق محفوظة ©

تعريف:

بن يحيى السموءل المغربي



ولد السموءل بالمغرب وقد نشأ في بيئة علمية، فقد كان عمه طبيبا وكان والده من علماء الرياضيات، الأمر الذي شجّعه على دراستها. درس كتاب " **الأصول** " لإقليدس وكتاب " **البديع في الجبر** " للكرخيوكتب أخرى وعمل على إتمامها وتحسينها.

طوّر السموءل الطريقة التحليلية في علم الجبر، استطاع أن يؤلف كتابا في الرياضيات أطلق عليه " **الباهر في الجبر**" وهو في التاسعة عشرة من عمره. نذكر لك هنا مقطعا بسيطا مما ورد في هذا الكتاب في المقالة الثانية من الباب الرابع الخاصّ بصناعة العدد. قال السموءل:

"..... وسنبرهن على ما قاله الكرجي ونصلحه بعد أن نقدم على ذلك مقدمات من أصول صناعة العدد القديمة بما لم يهتد إليه من انتهى إلينا خبره من المتقدمين. لكن الله جلّ ثناؤه أظهر على أيدينا إذا كانت أعداد مبتدئة من الواحد متوالية على النظم الطبيعي فإنّ مجموع مربعاتها مساو لمجموع تلك الأعداد مع ضرب كلّ واحد منها في العدد الذي يليه قبله ".

ويقصد السموءل، رحمه الله، المساواة التالية:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=2}^{n} i(i-1)$$

توفي السموءل المغربي حوالي عام 1174 م .

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

I. المتتالية الحسابية- المتتالية الهندسية:

نشاط

يزداد عدد سكان مدينة A بـِ 130 نسمة كلّ سنة في حين يزداد عدد سكان مدينة B بنسبة 2% من سنة إلى أخرى. في سنة 2005 بلغ عدد سكان كلّ مدينة من المدينتين A و B 6000 نسمة.

نرمز بـِ u_n إلى عدد سكان المدينة A و بـِ v_n إلى عدد سكان المدينة B خلال السنة $2005+n$.

1) عين u_0 و v_0 ثم أحسب u_1 و v_1.

2) أوجد علاقة بين u_{n+1} و u_n. تحقق أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها r.

3) عبّر عن u_n بدلالة n.

4) أوجد علاقة بين v_{n+1} و v_n. تحقق أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q.

5) عبّر عن v_n بدلالة n.

6) قارن بين عددي سكان المدينتين A و B في سنة 2010.

حل

1) نعلم أنّ عدد سكان كلّ مدينة هو 6000 نسمة في السنة 2005.

منه $u_0=6000$ ؛ $v_0=6000$

وليكن u_1 و v_1 عددي سكان المدينتين في السنة $2005+1$، أي في 2006.

لدينا: $u_1=6000+130=6130$ (لأنّ عدد السكان يزيد بـِ 130 نسمة كلّ سنة).

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

و $v_1 = 6000 + 6000 \times \frac{2}{100} = 6000 \times (1 + 0,02) = 6000 \times 1,02 = 6120$

(لأنّ عدد السكان يزيد بنسبة 2% من سنة إلى أخرى).

2) إذا كان عدد سكان المدينة A عند السنة $2005 + n$ هو u_n، هذا العدد يزيد بـــ 130 نسمة في السنة الموالية، وبالتالي:

$u_{n+1} = u_n + 130$

فالمتتالية (u_n) متتالية حسابية، أساسها $r = 130$.

3) من أجل كلّ n، $u_n = 6000 + 130 \times n$.

4) إذا كان عدد سكان المدينة B عند السنة $2005 + n$ هو v_n، هذا العدد يزيد بنسمة 2% في السنة الموالية، وبالتالي: $v_{n+1} = 1,02 \times v_n$

فالمتتالية (v_n) متتالية هندسية، أساسها $q = 1,02$.

5) من أجل كلّ n، $v_n = 6000 \times (1,02)^n$.

6) باستعمال عبارتي الحدين العامين للمتتاليتين، نجد:

$u_5 = 6650$ و $v_5 \approx 6624$.

1. المتتالية الحسابية

تعريف

نقول إنّ المتتالية (u_n) متتالية حسابية أساسها r (r عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n + r$.

مثال 1

المتتالية (u_n) حيث $u_n = 2n + 7$ هي متتالية حسابية أساسها 2، لأنّ:

$u_{n+1} = 2(n+1) + 7$، ومنه $u_{n+1} - u_n = 2$، وبالتالي $u_{n+1} = u_n + 2$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

الحدّ الأوّل لهذه المتتالية هو u_0، حيث $u_0 = 7$.

مثال 2

إذا اعتبرنا (v_n) المتتالية الحسابية التي أساسها 5، بحيث $v_0 = 17$ ،

فإنّ: $v_1 = v_0 + 5 = 17 + 5 = 22$ و $v_2 = v_1 + r = 22 + 5 = 27$

و $v_3 = v_2 + r = 27 + 5 = 32$ وهكذا، ...

عبارة الحدّ العام

الحد العام لمتتالية حسابية (u_n) أساسها r وحدّها الأوّل u_0 هو u_n، حيث: $u_n = u_0 + nr$.

ملاحظة

إذا كان الحدّ الأوّل هو u_1، فإنّ $u_n = u_1 + (n-1)r$. وبصفة عامة لدينا الخاصية الموالية:

خاصية 1 (تعميم)

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r، فإنّه من أجل كلّ عددين طبيعيين n و p : $u_n = u_p + (n-p)r$

مثال

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها 4، بحيث $u_2 = -5$، فإنّنا نستطيع حساب الحدّ u_{20} مثلا، بتطبيق العلاقة $u_n = u_p + (n-p)r$.

بتعويض $n = 20$ و $p = 2$ ، نجد: $u_{20} = u_2 + (20-2) \times r = -5 + 18 \times 4 = 67$.

جميع الحقوق محفوظة ©

مجموع $(n+1)$ حدّا

(u_n) متتالية حسابية، حدّها الأوّل u_0 وحدّها العام u_n.

يُعطى المجموع S، حيث: $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n$

كما يلي: $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$

وبصفة عامة:

$$S = (\text{عدد الحدود}) \times \frac{\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}}{2}$$

مثال 1

لحساب المجموع S، حيث $S = 1+2+3+\ldots+n$، نلاحظ أنّ حدود هذا المجموع تشكل حدود متتالية حسابية أساسها 1 وحدّها الأوّل 1. كما نلاحظ أنّ عدد حدود هذا المجموع هو n ، ومنه:

$$S = 1+2+3+\ldots+n = n \times \left(\frac{1+n}{2}\right)$$

مثال 2

نعتبر (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدّها الأوّل u_0 ، حيث $u_0 = 5$.

نحسب المجموع S ، حيث $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{20}$ ، انطلاقا من عدد حدوده وهو 21 حدا $(20+1$ عدد حدود المجموع هو $)$، فنجد:

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{20} = (20+1)\frac{5 + u_{20}}{2}$$

لكن $u_{20} = u_0 + 20r = 65$ ، منه: $S = 21 \times \dfrac{5+65}{2} = 735$.

جميع الحقوق محفوظة ©

تطبيق

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = -3n + 2$.

1) أحسب u_1 و u_2 .

2) أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r .

3) أحسب، بدلالة n، المجموع: $S = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$.

حل

1) $u_0 = -3(2) + 2 = -4$ و $u_1 = -3(1) + 2 = -1$.

2) **طريقة:** لإثبات أنّ (u_n) متتالية حسابية، يكفي أن نبيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت r.

لدينا من أجل كلّ عدد طبيعي n غير معدوم،

$u_{n+1} - u_n = \left[-3(n+1) + 2\right] - \left[-3n + 2\right] = -3$.

نستنتج هكذا أنّ المتتالية (u_n) حسابية، أساسها $r = -3$.

3) عدد حدود المجموع هو n.

بالتعويض نجد: $S = n \times \dfrac{u_1 + u_n}{2} = n \times \dfrac{-1 - 3n + 2}{2}$

وبالتالي: $S = \dfrac{n(1 - 3n)}{2}$.

خاصية 2

تكون الأعداد a، b و c، بهذا الترتيب، حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a + c = 2b$.

يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c.

http://www.onefd.edu.dz

مثال

الأعداد 41، 60، 79 ، بهذا الترتيب، هي حدود متتابعة من متتالية حسابية لأنّ: $60 \times 2 = 41 + 79$.

2. المتتالية الهندسية

تعريف

نقول إنّ المتتالية (u_n) متتالية هندسية، أساسها q (q عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \times q$

مثال 1

المتتالية (u_n) حيث $u_n = 0,5 \times 3^n$ هي متتالية هندسية أساسها 3، لأنّ:

$u_{n+1} = 0,5 \times 3^{n+1} = \left(0,5 \times 3^n\right) \times 3$.

وبالتالي $u_{n+1} = u_n \times 3$.

مثال 2

إذا اعتبرنا (u_n) المتتالية الهندسية التي أساسها 1,5 وحدّها الأوّل u_0 حيث $u_0 = 12$ ، فإنّ:

$u_1 = u_0 \times q = 12 \times 1,5 = 18$ و $u_2 = u_1 \times q = 18 \times 1,5 = 27$

$u_3 = u_2 \times q = 27 \times 1,5 = 40,5$. وهكذا، ...

عبارة الحدّ العام

الحدّ العام لمتتالية هندسية (u_n) أساسها q وحدها الأوّل u_0 هو u_n، حيث: $u_n = u_0 \times q^n$.

جميع الحقوق محفوظة ©

ملاحظة

إذا كان الحدّ الأوّل هو u_1، فإنّ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

وبصفة عامة، لدينا:

خاصية 1

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q، فإنّه من أجل كلّ عددين طبيعيين n و p، لدينا: $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

مثال

(u_n) هي المتتالية الهندسية التي أساسها 1,5، بحيث $u_4 = 3$.

عندئذ، يمكن حساب u_{10}، مثلا، وذلك بتعويض $n=10$ و $p=4$ في العلاقة $u_n = u_p \times q^{n-p}$، ونجد: $u_{10} = u_4 \times q^{10-4} = 3 \times 2^6 = 192$.

مجموع $(n+1)$ حدّا

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن1، فإنّ:

$$S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$$

وبصفة عامة:

$$S = (\text{الحد الأول}) \times \frac{\text{الأساس أس عدد الحدود} \; - \; 1}{\text{الأساس} \; - \; 1} .$$

مثال

(u_n) هي المتتالية الهندسية التي أساسها 3، بحيث $u_1 = 0,5$.

لحساب مجموع الحدود العشرة الأولى لهذه المتتالية، نكتب:

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

$$S = u_1 + \ldots\ldots + u_{10} = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

(حيث عدد حدود المجموع S هو $n=10$).

وبالتالي $S = 0{,}5 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = 14\,762$.

حالة خاصة

إذا كان $q=1$، فإنّ: $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0$

خاصية 2

تكون الأعداد غير المعدومة a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان: $a \times c = b^2$. يسمّى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

مثال

الأعداد 128، 256 و 512، بهذا الترتيب، هي حدود متتابعة من متتالية هندسية، لأنّ: $128 \times 512 = 65\,536 = 256^2$

تطبيق1

(v_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}^*$، حدّها الأوّل $v_1 = 3$ وأساسها $q=2$.

1) أحسب v_2 و v_3.

2) أحسب، بدلالة n، الحد العام v_n.

3) أحسب، بدلالة n، المجموع $S = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

حل

1) $v_2 = v_1 \times q = 3 \times 2 = 6$ ، $v_3 = v_2 \times q = 6 \times 2 = 12$.

2) $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$.

3) عدد حدود المجموع هو n.

إذن $S = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$.

ومنه $S = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} = -3\left(1-2^n\right) = 3\left(2^n - 1\right)$

تطبيق2

بلغ عدد سكان إحدى المدن الجزائرية 3000 نسمة، سنة 2005 و 3630 نسمة، سنة 2007.

نفرض أنّ α نسبة تزايد السّكان سنويا بهذه المدينة ثابتة.

1) عيّن α.

2) كم سيكون عدد سكان هذه المدينة سنة 2030 ؟ تعطى النتيجة مدوّرة إلى العشرات.

إرشاد:

نترجم الوضعية وننمذجها باستعمال متتالية هندسية أساسها $q = 1 + \alpha$.

حل

1) **تعيين** α

في البداية، نترجم الوضعية وننمذجها باستعمال متتالية هندسية كما هو مقترح في نصّ السؤال وذلك بالكيفية التالية:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

نرمز بـِ u_n إلى عدد سكان المدينة سنة $2005+n$ ونرمز بِـ u_{n+1} إلى عدد سكان هذه المدينة خلال السنة الموالية أي سنة $2005+(n+1)$.

منه $u_0=3000$ و $u_2=3630$.

بما أن نسبة التزايد α ثابتة، فإن العلاقة بين u_n و u_{n+1} هي من الشكل $u_{n+1}=u_n+\alpha u_n$. وبالتالي $u_{n+1}=(1+\alpha)u_n$.

ومنه نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=1+\alpha$ وحدّها الأوّل هو u_0 ، حيث $u_0=3000$.

إذن u_0 هو عدد السكان في سنة $2005+0$

و u_1 هو عدد السكان في سنة $2005+1$

و u_2 هو عدد السكان في سنة $2005+2$

لدينا إذن $u_2=u_0\times q^2$ ومنه $q^2=\dfrac{u_2}{u_0}$.

نجد هكذا: $q^2=1,21$، وبالتالي $q=1,1$. نستنتج أنّ $\alpha=0,1=10\%$.

2) حساب عدد السكان في سنة 2030

نلاحظ أنّ $2030=2005+25$.

نعلم أيضا أنّ $u_{25}=u_0\times q^{25}$.

منه $u_{25}=3000\times(1,1)^{25}$، أي $u_{25}\approx 32504,12$.

بما أنّه طلب منا إعطاء النتيجة مدوّرة إلى العشرات، فإننا نكتب $u_{25}=32504$ ، ونستنتج ما يلي:

يتعدى عدد سكان المدينة 32500 نسمة في سنة 2030، ولكنه لن يتجاوز 32504 نسمة.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

II. المتتاليات المحدودة والمتتاليات الرتيبة:

نشاط

(u_n)متتالية معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بحدّها العام: $u_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$

1)باستعمال مجدول إكسال، أنجز الحساب أدناه، ثمّ أنشئ سحابة النقط المناسبة.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
u_n										

2)ما هي التخمينات التي يمكن وضعها حول المتتالية (u_n).

3)أدرس إشارة كلّ من $u_n - \dfrac{1}{3}$ و $u_n - \dfrac{1}{2}$. ماذا تستنتج ؟

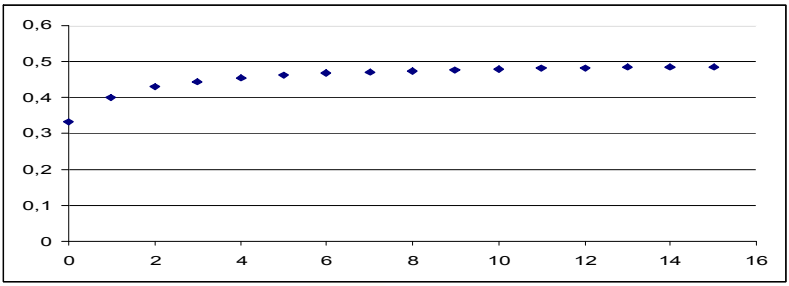
4)أدرس تغيرات الدالة f على المجال $\mathbb{R}_+$ حيث: $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$

5) شكّل جدول تغيّرات f . هل تخميناتك صحيحة ؟

حل

1) بعد حجز قيم لـــ n وحساب القيم الموافقة لها u_n ، نستعمل المساعد البياني ونحصل على الشكل الآتي:

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©



2) يظهر أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة.

3) $u_n - \frac{1}{3} \geq 0$ و $u_n - \frac{1}{2} < 0$ ، منه النتيجة: $\frac{1}{3} \leq u_n < \frac{1}{2}$.

4) جدول تغيّرات الدالة f :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	↗	$\frac{1}{2}$

5) من جدول التغيّرات، يتبيّن أنّ المتتالية محدودة ومتزايدة تماما.

I. المتتاليات المحدودة

تعاريف

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$، m و M عددان حقيقيان.

1. القول أنّ متتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني أنّ من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n \leq M$. نقول إنّ M عنصر **حادّ من الأعلى**.

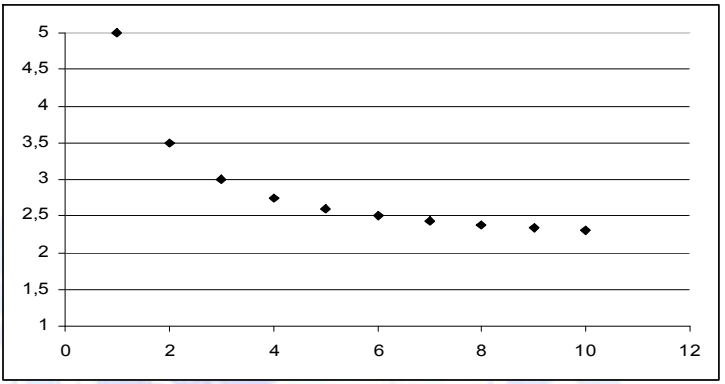
2. القول أنّ متتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني يعني أنّ من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n \geq m$. نقول إنّ m عنصر **حادّ من الأسفل**.

3. القول أنّ متتالية (u_n) محدودة بالعددين الحقيقيين m و M يعني من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $m \leq u_n \leq M$.

مثال

(u_n) هي المتتالية المعرّفة بالشكل: $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$

تمثيلها البياني كما هو مبيّن بالشكل الآتي:



من الشكل السابق، يبدو أنّ المتتالية محدودة.

بالفعل، لدينا:

- من أجل $n \geq 1$، لدينا $\frac{1}{n} \leq 1$ و $\frac{3}{n} \leq 3$ ومنه $2 + \frac{3}{n} \leq 2 + 3$.

أي أنّ $u_n \leq 5$.

هذا يعني أنّ (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 5.

- بالمثل، من أجل $n \geq 1$، لدينا $\frac{3}{n} > 0$ ونستنتج أنّ $u_n > 2$.

هذا يعني أنّ (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2.

ملاحظة

العدد 5 عنصر حادّ من الأعلى للمتتالية (u_n). كلّ عدد حقيقي M أكبر من 5 هو كذلك عنصر حادّ من الأعلى للمتتالية.

http://www.onefd.edu.dz

وبالمثل، العدد 2 عنصر حادّ من الأسفل للمتتالية (u_n). كلّ عدد حقيقي m أصغر من 2 هو كذلك عنصر حادّ من الأسفل للمتتالية.

II. المتتاليات الرتيبة

تعاريف

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$، القول أنّ (u_n):

1. متزايدة يعني أنّ من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} \geq u_n$.
2. متناقصة يعني أنّ من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \leq u_n$.
3. ثابتة يعني أنّ من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n$.
4. القول أنّ (u_n) رتيبة يعني أنّها إمّا متزايدة وإمّا متناقصة.

ملاحظات

- تبقى التعاريف السابقة صحيحة في حالة متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n حيث، $n \geq n_0$.
- توجد متتاليات ليست متزايدة وليست متناقصة. نقول عنها أنّها غير رتيبة. مثل المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها العام $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
- تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث، من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = k$.

تطبيق1

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام: $u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+4}$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

أثبت أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2.

طريقة

لإثبات أنّ متتالية (u_n) محدودة من الأعلى بعدد حقيقي M (أو محدودة من الأسفل بعدد حقيقي m)، يمكن اتباع إحدى الخطوتين التاليتين:

- دراسة إشارة الفرق $u_n - M$ (أو $u_n - m$) جبريا.
- استعمال اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;+\infty[$، إذا كان $u_n = f(n)$

حل

نحسب في البداية، $u_n - 2$:

فنجد $u_n - 2 = \frac{2n^2+1}{n^2+4} - 2 = \frac{2n^2+1-2n^2-8}{n^2+4} = \frac{-7}{n^2+4}$

ندرس إشارة $\frac{-7}{n^2+4}$ ، فنجد من أجل كلّ عدد طبيعي n : $\frac{-7}{n^2+4} < 0$.

وبالتالي، من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n - 2 < 0$. أي أنّ $u_n < 2$.

إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2.

تطبيق2

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها العام: $u_n = \frac{n^2+n+9}{n}$.

أثبت أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 7.

حل

نجد، بعد الحساب: $u_n - 7 = \frac{(n-3)^2}{n}$

ومنه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$، $u_n - 7 \geq 0$. أي أنّ $u_n \geq 7$.

http://www.

نستنتج أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 7.

تطبيق3

أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام:

$u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$.

طريقة

لدراسة اتجاه تغيّر متتالية (u_n)، يمكن:

- دراسة الفرق $u_{n+1} - u_n$.
- مقارنة $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1، عندما تكون كلّ الحدود موجبة تماما.
- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ في حالة $u_n = f(n)$

حل

الحدّ العام للمتتالية من الشّكل $u_n = f(n)$، حيث f الدالة المعرّفة على $[0;+\infty[$ بالعبارة: $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{2(x+3)-(2x-1)(1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$$

من أجل كلّ x من $[0;+\infty[$، $f'(x) > 0$.

منه f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة.

جميع الحقوق محفوظة ©

تطبيق4

ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:

$$u_n = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n}$$

حل

نلاحظ أنّ كلّ حدود المتتالية موجبة تماما. لذلك، نقارن، من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم، بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1.

نبدأ بحساب المقدار $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)\times(2(n+1)-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times2n\times2(n+1)}}{\dfrac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times2n}}$$

ننجز الاختزالات الممكنة فنجد : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2}$.

بما أن $2n+1<2n+2$، فإنّ $\frac{2n+1}{2n+2}<1$.

ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$.

إذن، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1}<u_n$.

نستنتج، هكذا، أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

III. نهاية متتالية:

نشاط

(u_n) هي المتتالية المعرّفة بالشكل:

من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

1) بالاستعانة بمجدول، ماذا تلاحظ بالنسبة إلى قيم u_n ، عندما يأخذ n قيما كبيرة ؟

2) هل يمكن أن يكون: $2 + 10^6 < u_n < 2$ ؟

حل

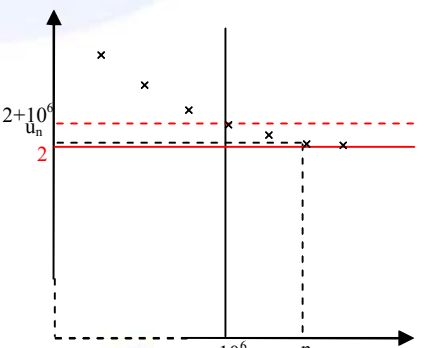
1) من جدول قيم المتتالية، يتبيّن أنّ u_n يقترب من $l = 2$.

2) نعم.

من أجل كلّ $n > 10^6$، $2 + 10^6 < u_n < 2$ يعني $0 < 10^{-6} < \frac{1}{n}$

أي $n > 10^6$.

n	Un
1	3
10	2,1
30	2,0333333
50	2,02
100	2,01
500	2,002
1000	2,001
10000	2,0001
100000	2,00001
1E+06	2,000001



http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

الكتابة $1E+06$ تعني 1×10^{6}

بصفة عامة، يمكن ان نبيّن انّ u_n يبقى قريبا من $l=2$ بالقدر الذي نريد، عندما يأخذ n قيما كبيرة بالقدر الكافي.

- نقول أنّ المتتالية (u_n) **متقاربة** نحو العدد الحقيقي $l=2$ ، ونكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

1. المتتاليات المتقاربة

تعريف

لما تأخذ الحدود u_n لمتتالية (u_n) قيما قريبة بالقدر الذي نريد من عدد حقيقي l لما يأخذ العدد الطبيعي n قيما كبيرة بالقدر الكافي، نقول إنّ نهاية المتتالية (u_n) هي l لما يؤول n إلى $+\infty$ وإنّ المتتالية (u_n) متقاربة نحو l. ونكتب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

أمثلة

- المتتالية (u_n) المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n غير معدوم بـِـ: $u_n = 3-\dfrac{1}{n}$ تقبل نهاية تساوي 3.

(لأنّ المتتالية ذات الحدّ العام $\dfrac{1}{n}$ تقبل نهاية تساوي 0)

- المتتالية ذات الحدّ العام $(-1)^n$ لا تقبل أيّة نهاية: لأنّ حدودها المساوية بالتناوب 1 أو -1 لا تقترب من أيّ عدد.

جميع الحقوق محفوظة ©

ملاحظة

إذا لم تكن متتالية متقاربة نقول عنها إنّها **متباعدة**.

2. المتتاليات ذات الحدّ العام $u_n = f(n)$

مبرهنة (تقبل بدون برهان)

يمثل α عددا حقيقيا ، $-\infty$ أو $+\infty$.

(u_n) متتالية معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بحدّها العام

$u_n = f(n)$، حيث f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

ملاحظة

العمليات على النهايات الخاصة بالدوال تبقى صحيحة بالنسبة للمتتاليات.

مثال

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)=3$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}\right)=3$.

3. حالة متتالية حسابية أو متتالية هندسية

يعبّر عن الحدّ العام لمتتالية حسابية ومتتالية هندسية في شكل دالة $f(n)$.

وتستنتج نهاية المتتالية من نهاية الدالة f عند $+\infty$.

مبرهنة2

(u_n) متتالية حسابية، أساسها r :

1. إذا كان $r > 0$ ، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. إذا كان $r < 0$ ، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. إذا كان $r = 0$ ، فإنّ (u_n) ثابتة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.

برهان

لدينا $u_n = u_0 + r$. نعتبر الدالة $f: x \mapsto rx + u_0$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$. نعلم أنّه:

- إذا كان $r > 0$ ، فإنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، وإذا كان $r < 0$ ، فإنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- إذا كان $r = 0$ ، فإنّه من أجل كلّ n لدينا $u_n = u_0$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$

مبرهنة3

(u_n) متتالية هندسية، أساسها $q > 0$:

- إذا كان $q > 1$ ، فإنّ:
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ، عندما يكون $u_0 > 0$.
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ، عندما يكون $u_0 < 0$.
- إذا كان $0 < q < 1$، فإنّ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

برهان

لدينا $u_n = u_0 \times q^n$. نعتبر الدالة $f: x \mapsto u_0 q^x$.

نعلم أنّ $\lim\limits_{n \to +\infty} q^x = +\infty$ في الحالة $q > 1$، و $\lim\limits_{n \to +\infty} q^x = 0$ في الحالة $0 < q < 1$.

في الحالة $q = 1$ ، فإنّ من أجل كلّ n ، $u_n = u_0 \times 1^n = u_0$ وبالتالي (u_n) ثابتة و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.

http://www.onefd.edu.dz

4. الرتابة والتقارب

مبرهنة4 (تقبل بدون برهان)

1. كل متتالية عددية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي متتالية متقاربة
2. كل متتالية عددية متناقصة ومحدودة من الأسفل هي متتالية متقاربة

ملاحظات

- تسمح هذه المبرهنة بإثبات تقارب متتالية ولكن لا تعطي النهاية.
- ليست كل متتالية محدودة هي متقاربة، مثلا المتتالية (u_n) حيث $u_n=(-1)^n$ محدودة من الأعلى ومن الأسفل لكنّها ليست متقاربة.

مثال1

المتتالية (u_n) حيث: $u_n=-\frac{1}{2^n}+3$ من أجل كلّ عدد طبيعي n ، هي:

*متزايدة تماما لأنّ: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2^{n+1}}$ ومن الواضح أنّ $u_{n+1}-u_n>0$

*ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 لأنّ: $-\frac{1}{2^n}<0$ ومنه $-\frac{1}{2^n}+3<3$

أي $u_n<3$

إذن (u_n)متقاربة وحيث أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2^n}\right)=0$ فإنّها تتقارب نحو 0.

مثال2

المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة $v_n=\frac{1}{3^n}+5$ هي:

متناقصة تماما ومحدودة من الأدنى بالعدد 5 فهي متقاربة وتتقارب نحو العدد 5.

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

تطبيق1

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n ، كما يلي:

$$u_n = \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + 5}$$

بيّن أنّ (u_n) متقاربة.

حل

نحن أمام متتالية، حدّها العام $u_n = f(n)$ ، حيث f هي الدالة المعرّفة على $[0;+\infty[$ بالشكل: $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 5}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 2.

تطبيق2

هل المتتالية (u_n) متقاربة، حيث $u_n = 2n + \frac{1}{n+2}$ من أجل $n \in \mathbb{N}$ ؟

حل

نلاحظ أنّ $u_n = f(n)$ ، حيث f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بالشكل: $f(x) = 2x + \frac{1}{x+2}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$.

من العمليات على النهايات، نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. منه: المتتالية (u_n) غير متقاربة.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

تطبيق3

(u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدّها الأوّل $u_0=2$.

نضع، من أجل كلّ عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

1. عبّر عن u_n بدلالة n ، ثمّ أدرس نهاية المتتالية (u_n).

2. عبّر عن S_n بدلالة n ، ثمّ احسب نهاية S_n .

حل

1. من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n=u_0\times q^n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

بما أنّ $0<\frac{2}{3}<1$ ، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$.

نستنتج أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

وهكذا، فإنّ المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0.

2. من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $S_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=2\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$

ومنه $S_n=6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

بما أنّ $0<\frac{2}{3}<1$ ، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0$.

نستنتج أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=6$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

IV. الاستدلال بالتراجع:

نشاط

- **الجزء الأول**

نهدف، في هذا الجزء، إلى حساب S_n مجموع الأعداد الطبيعية n الأولى الفردية: $S_n = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$

	A	B
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	
5		
6		
7		
8		
9		
10		

1. أحسب S_1، S_2 و S_3.
2. أنجز ورقة الحساب المقابلة بإتباع الخطوات التالية:

– أحجز في العمود A الأعداد الطبيعية الفردية الأولى.

– أحجز في الخلية $B1$: $=SOMME(\$A\$1:A1)$، وذلك باستعمال الوظيفة $SOMME$ في مجدول اكسال.

– بعد تحديد الخلية $B1$، اسحب إلى الأسفل للحصول في كلّ مرة على المجموع S_n.

3. ماذا تلاحظ ؟ ضع تخمينا.
4. أثبت صحة تخمينك.

- **الجزء الثاني**

نهدف في هذا الجزء إلى إيجاد خاصية $P(n)$ متعلقة بالعدد الطبيعي n يحققها المقداران α_n و β_n من خلال مقارنتهما، حيث:

$\alpha_n = 1+2+3+\ldots+n$ و $\beta_n = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	2	3	8	9
3	3	6	27	36
4	4		64	
5	5		125	
6				
7				
8				
9				
10				

1. أحسب α_n بدلالة n.

2. أنجز ورقة الحساب المقابلة بحجز الأعداد الطبيعية غير المعدومة الأولى في العمود A، حجز مجموعها في العمود B، حجز مكعبات الأعداد الطبيعية غير المعدومة الأولى في العمود C وحجز مجموعها في العمود D، مستعملا في كل حساب الطلبية المعطاة في السؤال الثاني من الجزء الأول.

أ) ماذا تلاحظ ؟ ضع تخمينا حول الخاصية $P(n)$.

ب) تحقق أنّ الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل $n=1$، $n=2$ و $n=3$.

ج) بفرض الخاصية $P(n)$ صحيحة، من عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$، أثبت صحتها من أجل $n+1$.

د) في رأيك، هل أثبتت صحة التخمين ؟ ضع خلاصة.

نقول عن الخاصية $P(n)$ أنها **وراثية**.

حل

- **الجزء الأول**

1. $S_1=1$، $S_2=1+3=4$ و $S_3=1+3+5=9$.

2. بعد حجز الأعداد الطبيعية الفردية الأولى في العمود A وحجز المجاميع الموافقة بالدالة $=SOMME(\$A\$1:A1)$ في العمود B، تحصل على الجدول المقابل.

n	S_n
1	1
3	4
5	9
7	16
9	25
11	36
13	49
15	64
17	81
19	100

http://www.onefd.edu.dz

3. بملاحظة هذه المجاميع، تجد:

$S_1 = 1^2 = 1$ ؛ $S_2 = 2^2 = 4$ ؛ $S_3 = 3^2 = 9$ ؛ ...

وهكذا، يمكن أن تضع التخمين: من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $S_n = n^2$.

4. للبرهان عن صحة هذا التخمين، تلاحظ من كتابة العبارة S_n ، أي:

$S_n = 1+3+5+...+(2n-1)$ ، أنّ الأمر يتعلق بمجموع n حدّا أولى لمتتالية حسابية أساسها 2 وحدّها الأوّل 1.

وفي هذه الحالة، $S_n = n \times \frac{(1+(2n-1))}{2}$.

وتجد: $S_n = n \times \frac{2n}{2} = n^2$.

- **الجزء الثاني**

1. $\alpha_n = n \times \frac{1+n}{2}$ لأنّ الأمر يتعلق بمجموع n حدّا أولى لمتتالية حسابية أساسها 1 وحدّها الأوّل 1.

2. بعد الحجز، تحصل على الجدول المقابل

A	B	C	D
n	α_n	n^3	β_n
1	**1**	1	**1**
2	**3**	8	**9**
3	**6**	27	**36**
4	**10**	64	**100**
5	**15**	125	**225**
6	**21**	216	**441**
7	**28**	343	**784**
8	**36**	512	**1296**
9	**45**	729	**2025**
10	**55**	1000	**3025**

أ) بملاحظة العمود الثاني، يتبيّن أنّ:

$\beta_1 = \alpha_1 = 1$ ؛ $\beta_2 = (\alpha_2)^2$ ؛ $\beta_3 = (\alpha_3)^2$

نلاحظ في الجدول أنّ هذه الخاصية تبقى محقّقة إلى غاية $n = 10$ حيث $\beta_{10} = (\alpha_{10})^2$

وحيث $\beta_1 = \alpha_1 = 1$ إذن يمكننا أن نضع $\beta_1 = (\alpha_1)^2$ كذلك.

وهكذا، يمكن أن نضع تخمينا حول الخاصية $P(n)$ كما يلي:

من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 1$ ، لدينا $\beta_n = (\alpha_n)^2$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة

وحيث أنّ $\alpha_n = n \times \frac{1+n}{2}$ حسب السؤال 1 من الجزء الثاني، فإنّنا نصيغ الخاصية $P(n)$ كما يلي:

من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $\beta_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

ب) نتحقق من صحّة $P(n)$ من أجل $n=1$ ، $n=2$ و $n=3$ بالتعويض المباشر في العبارة $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ حيث نجد: $\beta_1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$

$\beta_2 = \frac{2^2(2+1)^2}{4} = 9$ ؛ $\beta_3 = \frac{3^2(3+1)^2}{4} = 36$

وهي نتائج مطابقة للنتائج التي ظهرت في الجدول السابق.

ج) نفرض أنّ الخاصية $P(n)$ صحيحة، من العدد الطبيعي n حيث $n \geq 1$ ، ونثبت صحتها من أجل $n+1$.

أي نفرض أنّ $\beta_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ونثبت أنّ $\beta_{n+1} = \frac{(n+1)^2\left((n+1)+1\right)^2}{4}$

أي نثبت أنّ: $\beta_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ معتمدين على الفرض $\beta_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

لدينا $\beta_{n+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3$

أي $\beta_{n+1} = \beta_n + (n+1)^3$

بتعويض β_n نجد: $\beta_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

بتوحيد المقامات نجد: $\beta_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4(n+1)\right)$

ومنه نجد: $\beta_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4n + 4\right)$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

وأخيرا نكتبه على الشكل $\beta_{n+1}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

د) نعم لقد أثبتنا صحة التخمين في خطوتين نلخصهما كما يلي:

الخطوة الأولى: تحققنا من صحة المخمنة $P(n)$ من أجل الأعداد الطبيعية الأولى 1، 2، 3،

الخطوة الثانية: فرضنا صحة الخاصية $P(n)$ من أجل العدد الطبيعي n ثمّ برهنا صحة هذه الخاصية من أجل العدد الطبيع الموالي له وهو $n+1$

1. مبدأ الاستدلال بالتراجع

$P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n.

للبرهان أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي n ، يكفي أن:

1. نتأكّد من أنّ $P(0)$ صحيحة.
2. نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة، من أجل عدد طبيعي كيفي n، ونبرهن أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل $n+1$.

صيغة أخرى

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كلّ عدد طبيعي $n\geq n_0$، يكفي أن:

1. نتأكد من أنّ $P(n_0)$ صحيحة.
2. نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة، من أجل عدد طبيعي كيفي n حيث $n\geq n_0$، ونبرهن صحّة الخاصية من أجل $n+1$.

جميع الحقوق محفوظة ©

مثال

لنثبت، باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ ، $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

نسمّي هذه الخاصية $P(n)$.

- **المرحلة الأولى:** من أجل $n=1$ ، لدينا: $1=\frac{1\times 2}{2}$

ومنه $P(1)$ صحيحة.

- **المرحلة الثانية:** نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة، من أجل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، أي: $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

ونبرهن أنّ $P(n+1)$ صحيحة، أي نبرهن أنّ:

$$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

لدينا: $1+2+3+...+n+(n+1)=(1+2+3+...+n)+(n+1)$

لكن $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (حسب فرضية التراجع)

منه بالتعويض $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

ونجد: $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)}{2}(n+2)$

- **خلاصة:**

من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

تطبيق 1

برهن بالتراجع، أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، العدد n^3-n مضاعف للعدد 3.

حل

الخاصية " n^3-n مضاعف للعدد 3 " متعلقة بالعدد الطبيعي n، نستعمل الاستدلال بالتراجع.

- المرحلة الأولى: من أجل $n=0$ ، $0^3-0=0=3\times 0$

ومنه 0^3-0 مضاعف للعدد 3.

ونستنتج أنّ الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

- المرحلة الثانية: نفرض أنّ الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي $n\geq 0$، أي أنّ: n^3-n مضاعف للعدد 3، ونبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$، أي $\left[(n+1)^3-(n+1)\right]$ مضاعف للعدد 3.

نضع $n^3-n=3k$، حيث k عدد طبيعي.

منه $n^3=3k+n$

لدينا

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=(3k+n)+3n^2+2n$$

$$(n+1)^3-(n+1)=3k+3n^2+3n=3(k+n^2+n)$$

وبما أن $3(k+n^2+n)$ مضاعف للعدد 3، نستنتج أنّ $(n+1)^3-(n+1)$ مضاعف للعدد 3.

- الخلاصة: من أجل كلّ عدد طبيعي n، n^3-n مضاعف للعدد 3.

جميع الحقوق محفوظة ©

طريقة أخرى للحل

المرحلة الأولى: تبقى هي نفسها الواردة في الطريقة السابقة

المرحلة الثانية: نضع $\alpha_n = n^3 - n$ ومنه $\alpha_{n+1} = (n+1)^3 - (n+1)$

لدينا فرضا α_n مضاعف للعدد 3، إذا استطعنا أن نبرهن أنّ الفرق $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ مضاعف للعدد 3 فهذا يعني أنّ α_{n+1} مضاعف للعدد 3

وبالفعل لدينا $\alpha_{n+1} - \alpha_n = (n+1)^3 - (n+1) = (n+1)\left((n+1)^2 - 1\right)$

ومنه $\alpha_{n+1} - \alpha_n = (n+1)(n^2+2n) = n^3 + 3n^2 + 2n$

ومنه $\alpha_{n+1} - \alpha_n = (n+1)(n^2+2n) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$

لقد كتبنا الفرق $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ على شكل مجموع عددين مضاعفين للعدد 3

إذن فهو مضاعف للعدد 3، وبهذا ننهي البرهان.

تطبيق2

(u_n) متتالية معرّفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 1 \quad ; \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. برهن بالتراجع أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.
2. برهن بالتراجع أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2-.

ماذا تستنتج ؟

حل

1. للبرهان أنّ (u_n) متناقصة، نبرهن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1} \leq u_n$ بمعنى $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

- المرحلة الأولى: لدينا $u_1 = \dfrac{1}{2} \times 4 - 1 = 1$ و منه $u_1 \leq u_0$.

نستنتج أنّ الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

- المرحلة الثانية: نفرض أنّ الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي $u_{n+1} \leq u_n$. ونبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1} \leq u_n$. (حسب فرضية التراجع)

منه $\frac{1}{2}u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}u_n - 1$ ، أي $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

ونستنتج أنّ الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

- الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \leq u_n$.

وهذا يعني أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

2. للبرهان أنّ (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2، نبرهن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $u_n \geq -2$.

- المرحلة الأولى: لدينا $u_0 = 4$ ومنه $u_0 \geq -2$.

نستنتج أنّ الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

- المرحلة الثانية: نفرض أنّ الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$، أي $u_n \geq -2$، ونبرهن أنّها صحيحة من أجل $n+1$، أي $u_{n+1} \geq -2$.

لدينا $u_n \geq -2$ ، ومنه $\frac{1}{2}u_n - 1 \geq \frac{1}{2}(-2) - 1$ أي $u_{n+1} \geq -2$

فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

- الخلاصة: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n \geq -2$.

وهذا يعني أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2.

المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي إذن متقاربة.

http://www.oneld.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

V. دراسة متتالية من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$ ، $(a\neq 0)$:

نشاط

في أوّل جانفي 2000، أودع نبيل $10\,000\,DA$ ببنك يقترح فائدة مركبة نسبتها 5% سنويا. بالإضافة إلى ذلك، فإنّه يودع في كلّ أوّل جانفي من السنوات الموالية مبلغ $2000\,DA$. نرمز بـِ u_n إلى رصيد نبيل أوّل جانفي من السنة $2000+n$.

1. عيّن u_0، ثمّ تحقق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n،
$u_{n+1}=1,05\ u_n+2000$.
2. بيّن أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية ولا هندسية.
3. نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=u_n+40000$
أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $1,05$. أحسب v_n، ثمّ u_n بدلالة n.
ب) كم يكون رصيد نبيل في السنة 2010 ؟

حل

1. $u_0=10\ 000$.

لدينا:

$$\begin{aligned}u_1&=10\ 000+10\ 000\times\frac{5}{100}+2000\\&=10\ 000(1+0,05)+2000\\&=1,05\times u_0+2000\end{aligned}$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

و $u_2 = 1,05 \times u_1 + 2000$ وهكذا ...

من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1,05\ u_n + 2000$.

2. المتتالية (u_n) من الشكل: $u_{n+1} = au_n + b$. وبما أنّ $a \neq 0$ ، فهي ليست حسابية وبما أنّ $b \neq 0$ ، فهي أيضا ليست هندسية.

3. لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} + 40\ 000$ و $u_{n+1} = 1,05\ u_n + 2000$

منه $v_{n+1} = 1,05\ u_n + 2\ 000 + 40\ 000$

فيما يلي، نحاول أن نظهر عبارة v_n في الطرف الثاني من العلاقة الأخيرة. نجد:

$$v_{n+1} = 1,05\left(u_n + \frac{2\ 000 + 40\ 000}{1,05}\right) = 1,05\left(u_n + 40\ 000\right)$$

أي أنّ $v_{n+1} = 1,05 \times v_n$.

وهذا يعني أنّ (v_n) متتالية هندسية، أساسها $1,05$ وحدّها الأوّل $v_0 = 50\ 000$.

وبالتالي يكون من أجل كلّ n ، $v_n = v_0 \times (1,05)^n = 50\ 000 \times 1,05^n$

ونستنتج عبارة u_n بدلالة n :

$$u_n = v_n - 40\ 000 = 50\ 000 \times 1,05^n - 40\ 000$$

أي أنّه من أجل كلّ n ، $u_n = 50\ 000 \times 1,05^n - 40\ 000$.

4. في السنة 2010، يصبح رصيد نبيل: $u_{10} \simeq 41\ 445\ DA$.

$u_{10} = 50\ 000 \times 1,05^{10} - 40\ 000 \simeq 41\ 445$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

دراسة المتتاليات من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$ $(a\neq 0)$

(u_n) متتالية حدّها الأوّل u_0، ومن أجل كلّ عدد طبيعي n،

$u_{n+1}=au_n+b$ ، حيث a و b عددان حقيقيان و $a\neq 0$.

نلاحظ أنّ $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f هي الدالة التآلفية: $x\mapsto ax+b$.

الحالة الأولى: $a=1$

- من الواضح أنّ (u_n) متتالية حسابية، أساسها b.

ولدينا من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=b$.

نستنتج أنّه:

- إذا كان $b<0$، فإنّ (u_n) متناقصة،
- وإذا كان $b>0$، فإنّ (u_n) متزايدة،
- وإذا كان $b=0$ تكون (u_n) ثابتة.

- لدينا $u_n=u_0+bn$. ومنه

إذا كان $b<0$، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ وإذا كان $b>0$، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

الحالة الثانية: $a\neq 1$

- لدراسة اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)، ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$، من أجل كلّ عدد طبيعي n.

لدينا من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=(au_n+b)-(au_{n-1}+b)$

أي $u_{n+1}-u_n=a(u_n-u_{n-1})$.

نواصل بنفس الكيفية لنحصل هكذا على التوالي على المساويات التالية:

جميع الحقوق محفوظة ©

$$u_{n+1}-u_n=a\left(u_n-u_{n-1}\right)$$
$$u_n-u_{n-1}=a\left(u_{n-1}-u_{n-2}\right)$$
$$u_{n-1}-u_{n-2}=a\left(u_{n-2}-u_{n-3}\right)$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$u_3-u_2=a\left(u_2-u_1\right)$$
$$u_2-u_1=a\left(u_1-u_0\right)$$

نقوم بالضرب طرفا في طرف، وبعد عملية الاختزال، نحصل على:

$$u_{n+1}-u_n=a^n\left(u_1-u_0\right)$$

- إذا كان $a>0$ أي إذا كانت الدالة f متزايدة تماما تكون المتتالية (u_n) رتيبة وإشارة الفرق u_1-u_0 هي التي تحدد رتابة (u_n).
- إذا كان $a<0$ أي إذا كانت الدالة f متناقصة تماما فإن a^n لا يحتفظ بإشارة ثابتة ومنه الفرق $u_{n+1}-u_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة.

نستنتج في هذه الحالة أن المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

نتيجة

إذا كانت متتالية (u_n) تحقق العلاقة $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ وكانت f دالة تآلفية متزايدة، فإنّ المتتالية (u_n) تكون متزايدة تماما إذا كان $u_1>u_0$ ومتناقصة تماما إذا كان $u_1<u_0$ وثابتة إذا كان $u_1=u_0$.

- لدراسة تقارب (u_n) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n، بحدّها العام: $v_n=u_n-\frac{b}{1-a}$.

http://www.onefd.edu.dz

لدينا من أجل كلّ عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n - \frac{ab}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = av_n$$

معنى ذلك أنّ (v_n) متتالية هندسية، أساسها a وحدّها الأول v_0.

وفي هذه الحالة، يكون من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 \times a^n$.

وبما أنّ $u_n = v_n + \frac{b}{1-a}$ ، فإنّ $u_n = v_0 \times a^n + \frac{b}{1-a}$.

– إذا كان $-1 < a < 1$ ، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$.

نستنتج أنّ (u_n) متقاربة نحو $\frac{b}{1-a}$.

– إذا كان $a > 1$ ، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ وذلك حسب إشارة v_0.

– إذا كان $a \le -1$ ، فإنّ المتتالية (a^n) لا تقبل نهاية.

وبالتالي ليس للمتتالية (u_n) نهاية.

نتيجة

المتتالية (u_n) ليست متقاربة في الحالتين $a > 1$ أو $a \le -1$.

تطبيق

(u_n) هي المتتالية المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = \alpha$ وبالعلاقة:

$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1. نفرض $\alpha = 3$.

أ) أحسب u_1 ، u_2 و u_3. ضع تخمينا حول طبيعة المتتالية (u_n) ثم أثبت صحة تخمينك.

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

ب) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

2. نفرض $\alpha = 2$، ونعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n، بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب) أحسب v_n بدلالة n، ثمّ استنتج u_n بدلالة n.

حـ) بين أنّ المتتالية (u_n) متقاربة محددا نهايتها.

د) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3. نفرض $\alpha = 6$. أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

حل

1. عندما يكون $\alpha = 3$، نجد: $u_0 = 3$.

أ) منه: $u_1 = 3$، $u_2 = 3$ و $u_3 = 3$.

يظهر أنّ المتتالية (u_n) ثابتة.

لنبيّن ذلك بالتراجع، أي أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = 3$.

المرحلة الأولى: الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$، لأنّ $u_0 = 3$.

المرحلة الثانية: نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي $n \geq 0$، ونبرهن صحتها من أجل $n+1$.

أي نفرض أنّ $u_n = 3$ (فرضية التراجع)، ونبرهن أنّ $u_{n+1} = 3$

لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

منه $u_{n+1} = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

خلاصة: نستنتج، حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع، أنّ الخاصية صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي n . أي أنّ (u_n) ثابتة.

ب) المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 3 .

2. عندما يكون $\alpha = 2$، نجد: $u_0 = 2$

أ) $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3)$

ومنه $v_{n+1} = \frac{1}{3} \times v_n$.

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية، أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدّها الأوّل $v_0 = -1$ $(v_0 = u_0 - 3)$.

ب) لدينا من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$، $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

وبما أن $u_n = v_n + 3$، فإنّ $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$.

حـ) بما أنّ $-1 < \frac{1}{3} < 1$ ، فإنّ $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

نستنتج أنّ (u_n) متقاربة نحو 3 .

د) نلاحظ أنّ $u_{n+1} = f(u_n)$ ، حيث $f : x \mapsto \frac{1}{3}x + 2$.

كون $\frac{1}{3} > 0$ و $u_1 - u_0 > 0$ $\left(u_1 - u_0 = \frac{2}{3}\right)$، فإنّ المتتالية (u_n) متزايدة.

3. عندما يكون $\alpha = 6$، نجد: $u_0 = 6$.

كون $\frac{1}{3} > 0$ و $u_1 - u_0 < 0$ $(u_1 - u_0 = -2)$،

فإنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

http://www.onefd.edu.dz

VI. ملخص الدرس:

1. تعيين نهاية متتالية (u_n)

* (u_n) متتالية حسابية، أساسها r :

1. إذا كان $r>0$ ، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
2. إذا كان $r<0$ ، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.
3. إذا كان $r=0$ ، فإنّ (u_n) ثابتة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u_0$.

* (u_n) متتالية هندسية، أساسها $q>0$:

- إذا كان $q>1$ ، فإنّ:
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ ، عندما يكون $u_0>0$.
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ ، عندما يكون $u_0<0$.
- إذا كان $0<q<1$، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.
- إذا كان $q=1$، فإنّ (u_n) ثابتة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=u_0$.

* في حساب النهايات يمكن استعمال نفس المبرهنات كما في الدوال.

* يمكن وضع تخمين حول نهاية متتالية انطلاقا من ملاحظة قيمها.

2.استعمال الاستدلال بالتراجع

* نعيّن بوضوح الخاصية $P(n)$ المطلوب البرهان عليها،

تكون هذه الخاصية:

- إما معطاة بنصّ.
- وإما مُخمنة انطلاقا من ملاحظة القيم الأولى المتعلقة بالأعداد الطبيعية الأولى.

http://www.onefd.edu.dz

* نعمل وفق مبدإ الاستدلال بالتراجع حيث

1. نتأكّد من أنّ $P(0)$ صحيحة.

2. نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة، من أجل عدد طبيعي كيفي n، ونبرهن أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل $n+1$.

3. دراسة إتجاه تغيّرات متتالية

نختار واحد من الاقتراحين المواليين تبعا للطريقة التي عرّفت بها المتتالية

*إما بدراسة إشارة $u_{n+1}-u_n$ وتحديد اتجاه التغير حسب هذه الإشارة بحيث:

إذا كانت الإشارة موجبة فإنّ المتتالية متزايدة

وإذا كانت الإشارة سالبة فإنّ المتتالية متناقصة

أما إذا كان الفرق معدوما فإنّ المتتالية ثابتة

* أو بدراسة تغيّرات الدالة المرفقة بهذه المتتالية.

4. دراسة تقارب متتالية

نثبت وجود النهاية باستعمال مبرهنة تقارب المتتاليات الرتيبة

1. إذا كانت متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى، فإنّ هذه المتتالية متقاربة.

2. إذا كانت متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل، فإنّ هذه المتتالية متقاربة.

3. إذا كانت المتتالية هندسية أساسها q حيث $q\in]-1;1[$ فإنّها متقاربة وتتقارب إلى العدد 0 .

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

VII. توظيف المعارف :

- **النمو الديموغرافي**

ملاحظة: (الجزءان 1 و2 مستقلان).

في أوّل جانفي 2005، بلغ عدد سكان مدينة 100 000 نسمة.

1. نفرض أنّ عدد سكان هذه المدينة يرتفع سنويا بنسبة قدرها 3% ونرمز بـِ u_n إلى عدد سكانها في أوّل جانفي من السنة $2005+n$، حيث n عدد طبيعي.

أ) ما هي قيمة u_0 ؟ أحسب u_1 و u_2.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1,03\times u_n$.

استنتج طبيعة المتتالية (u_n).

حـ) عبر بدلالة n عن u_n.

د) كم يكون عدد سكان المدينة في أول جانفي 2010 ؟ في أول جانفي 2025 ؟ (تدوّر النتائج).

هـ) باستعمال حاسبة بيانية أو مجدول، عيّن ابتداء من أي سنة يتجاوز عدد سكان هذه المدينة 200 000 نسمة ؟

2. نفرض أنّ عدد الوفيات هو نفسه عدد الولادات بهذه المدينة، إلا أنّه ونظرا لنشاطها الاقتصادي المتميّز، فإن 5000 شخص إضافي يستقرون بها سنويا.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

نرمز بـِ v_n إلى عدد سكانها في أوّل جانفي من السنة $2005+n$، حيث n عدد طبيعي.

أ) ما هي قيمة v_0 ؟ أحسب v_1 و v_2.

ب) عبّر عن v_{n+1} بدلالة v_n. استنتج طبيعة المتتالية (v_n).

حـ) عبّر عن u_n بدلالة n.

د) كم يكون عدد سكان المدينة في أول جانفي 2010 ؟ في أول جانفي 2025 ؟ (تدور النتائج).

هـ) ابتداء من أي سنة يتجاوز عدد سكان هذه المدينة 200 000 نسمة ؟

حل

1.

أ) u_0 يمثّل عدد السّكان في السنة $2005+0$ ، أي في السنة 2005 .

وحسب المعطيات $u_0=100\,000$.

نعلم أنّ عدد السكان يزداد سنويا بنسبة 3%.

منه $u_1=100\,000+100\,000\times\frac{3}{100}=100\,000\times1,03=103\,000$

وبنفس الكيفية، نجد: $u_2=106\,090$.

ب) بفرض u_n عدد سكان المدينة في أوّل جانفي من السنة $2005+n$ حيث n عدد طبيعي كيفي و u_{n+1} عدد سكانها في أوّل جانفي من السنة $2005+(n+1)$، لدينا:

$$u_{n+1}=u_n+u_n\times\frac{3}{100}=u_n(1+0,03)=1,03\times u_n$$

حيث نعلم أنّ عدد سكان المدينة يزداد سنويا بنسبة 3%.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

هذا يعني أنّ (u_n) متتالية هندسية، أساسها $1,03$ وحدّها الأوّل $u_0 = 100000$.

حـ) الحدّ العام لمتتالية هندسية (u_n) أساسها q وحدّها الأوّل u_0 هو u_n، حيث: $u_n = u_0 \times q^n$.

منه $u_n = 100000 \times (1,03)^n$.

د) بتطبيق عبارة الحدّ العام، نجد:

عدد سكان المدينة في أوّل جانفي 2010 هو:

$u_5 = 100000 \times (1,03)^5 \approx 115927$.

وعدد سكان المدينة في أوّل جانفي 2025 هو:

$u_{20} = 100000 \times (1,03)^{20} \approx 180611$.

النتائج معطاة مدوّرة إلى الوحدة.

هـ) باستعمال مجدول، نحسب عدد سكان المدينة من أجل بعض قيم n ونجد الجدول المقابل.

15	155796,742
16	160470,644
17	165284,763
18	170243,306
19	175350,605
20	180611,123
21	186029,457
22	191610,341
23	197358,651
24	203279,411
25	209377,793
26	215659,127

ونقرأ على الجدول أنّ عدد سكان المدينة سيتجاوز 200 000 نسمة ابتداء من السنة $2005 + 24$ أي 2029.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

2.

أ) v_0 يمثّل عدد سكان المدينة في 2005، أي 100000.

حسب المعطيات، عدد السكان يزداد كلّ سنة بـــ 5000 نسمة.

منه $v_1 = 105000$ و $v_2 = 110000$.

ب) بفرض v_n عدد سكان المدينة في أوّل جانفي من السنة $2005 + n$ حيث n عدد طبيعي كيفي و v_{n+1} عدد سكانها في أوّل جانفي من السنة $2005 + (n+1)$، لدينا:

$$v_{n+1} = v_n + 5000$$

نستنتج أنّ (v_n) متتالية حسابية، أساسها 5000 وحدّها الأوّل $v_0 = 100000$.

حـ) نعلم أنّ الحدّ العام لمتتالية حسابية (v_n) أساسها r وحدّها الأوّل v_0 هو v_n، حيث: $v_n = v_0 + nr$.

منه، من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n = 100000 + 5000 \times n$.

د) باستعمال عبارة الحدّ العام، نجد:

عدد سكان المدينة في أوّل جانفي 2010 هو:

$v_5 = 100000 + 5000 \times 5 = 125000$.

وعدد سكانها في أوّل جانفي 2025 هو:

$$v_{20} = 100000 + 5000 \times 20 = 200000$$

هـ) حسب السؤال السابق، يتجاوز عدد سكان هذه المدينة 200 000 نسمة ابتداء من سنة 2025.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

- **تخمين عبارة الحدّ العام ثم إثباتها**

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بالشّكل:

$u_0 = 0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

- **تخمين عبارة u_n**

1. أنجز وأتمم ورقة الحساب الموالية وذلك بإتباع الخطوات التالية:

- أحجز في السّطر 1 الأعداد الطبيعية ابتداء من 0.
- أحجز في الخلية $B2$ العدد 0 وهو يمثل قيمة الحدّ الأوّل.
- أحجز في الخلية $C2$: $=B2*2+1$ وهو يمثل قيمة الحدّ الثاني.
- حدّد الخلية $C2$ ، ثمّ اسحب إلى اليمين.
- أحجز في الخلية $B3$: $=B2+1$ للحصول على u_n+1 وليس u_{n+1}.
- حدّد الخلية $B3$ ، ثمّ اسحب إلى اليمين.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	Un	0	1	3											
3	Un+1	1	2												

2. خمّن عبارة u_n+1 بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

- **إثبات صحة التخمين**

طريقة أولى: استعمال الاستدلال بالتراجع

أثبت باستعمال البرهان بالتراجع تخمينك الخاص بعبارة u_n بدلالة n .

طريقة ثانية: استعمال متتالية مساعدة

نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـِ:

$v_n = u_n + 1$.

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.
2. أحسب v_n بدلالة n، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.
3. قارن مع تخمينك.

حل

1. عند إنجاز ورقة الحساب المطلوبة نجد:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	U_n	0	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191
3	U_{n+1}	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

2. من الواضح أنّ هي حدود متتالية حسابية أساسها 2 محدّها اللأوّل 1 ومنه فهي تكتب على الشكل 2^n وبالتالي نستطيع أن نخمن الحد العام للمتتالية (u_n+1) وهو $u_n+1=2^n$ ومنه $u_n=2^n-1$

- **استعمال الاستدلال بالتراجع**

من أجل $n=0$، لدينا $u_0=2^0-1=1-1=0$.

أي أنّ الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

نفرض أنها صحيحة من أجل n ونبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$.

لدينا $u_n=2^n-1$ فرضا ونبرهن أنّ $u_{n+1}=2^{n+1}-1$

لدينا $u_{n+1}=2u_n+1$

وبالتعويض عن u_n نجد: $u_{n+1}=2u_n+1=2(2^n-1)+1$

ومنه $u_{n+1}=2(2^n-1)+1=2\times 2^n-2+1=2^{n+1}-1$

أي أنّ الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

نستنتج أنّ من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=2^n-1$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

- **استعمال متتالية مساعدة**

نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـِ: $v_n = u_n + 1$.

لدينا: من أجل كلّ عدد طبيعي n،

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (2u_n + 1) + 1 = 2(u_n + 1) = 2v_n$$

أي أنّ (v_n) متتالية هندسية، أساسها 2 وحدّها الأوّل $v_0 = u_0 + 1 = 1$.

منه الحدّ العام v_n بدلالة n هو $v_n = 2^n$.

نستنتج الآن عبارة u_n بدلالة n باعتبار أنّ $u_n = v_n - 1$

نجد بعد التعويض، أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = 2^n - 1$.

تطبيق

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بالشّكل:

$u_0 = 6$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 3u_n - 10$.

1. أنجز وأتمم ورقة الحساب الموالية وذلك بإتباع نفس الخطوات كما هو الشأن في المسألة السابقة:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Un	6	8									
3	Un-5											

2. خمن عبارة $u_n - 5$ بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3. اثبت صحة تخمينك بإتباع طريقتين مختلفتين.

حل

1. عند إنجاز ورقة الحساب المطلوبة نحصل على النتائج الموالية:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	6	8	14	32	86	248	734	2192	6566	19688	59054
u_n-5	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

http://www.manfaluty.com

2. نلاحظ أنّ قيم $u_n - 5$ عبارة عن القوى المتتابعة للعدد 3 وبالتالي يمكن وضع التخمين: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n - 5 = 3^n$.

ونستنتج: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = 3^n + 5$.

لإثبات ذلك، يمكن اتباع واحدة من الطريقتين المقترحتين في المسألة:

- **استعمال الاستدلال بالتراجع**

من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 3^0 + 5 = 1 + 5 = 6$.

أي أنّ الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أنها صحيحة من أجل n ونبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$.

لدينا $u_{n+1} = 3u_n - 10$.

باستعمال فرضية التراجع، نجد:

$$u_{n+1} = 3\left(3^n + 5\right) - 10 = 3^{n+1} + 15 - 10 = 3^{n+1} + 5$$

أي أنّ الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

نستنتج أنّ من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = 3^n + 5$.

- **استعمال متتالية مساعدة**

نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـِ: $v_n = u_n - 5$.

لدينا: من أجل كلّ عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 3u_n - 15 = 3\left(u_n - 5\right) = 3v_n$$

أي أنّ (v_n) متتالية هندسية، أساسها 3 وحدّها الأوّل

$v_0 = u_0 - 5 = 6 - 5 = 1$.

منه الحدّ العام v_n بدلالة n حيث $v_n = 3^n$. ونستنتج عبارة u_n بدلالة n ونجد: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = 3^n + 5$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

أ. تمارين

تذكير حول المتتاليات العددية

1. (u_n) متتالية حسابية حدّها الأوّل $u_0 = 70$ وأساسها -5.

أحسب $S = u_0 + u_1 + ... + u_{13}$.

2. (u_n) متتالية حسابية أساسها r. (v_n) و (w_n) متتاليتان معرّفتان من أجل كلّ عدد طبيعي n على الترتيب بِالشكلين:

$v_n = 3u_n - 1$ و $w_n = u_{2n} + 3$.

بيّن أنّ المتتاليتين (v_n) و (w_n) حسابيتان، يطلب تعيين أساس كلّ منهما.

المتتاليات المحدودة

3. نعتبر الدالة f المعرّفة على $[0; +\infty[$ حيث جدول تغيّراتها هو كالتالي :

x	0		3		$+\infty$
$f(x)$	-1	↗	3	↘	0

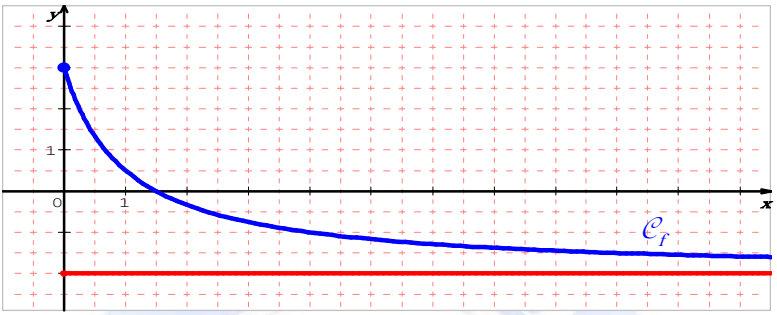
لتكن المتتالية (u_n) حيث $u_n = f(n)$.

أ) عيّن الحد الأول u_0.

ب) برّر أنّ المتتالية (u_n) محدودة.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

4. لتكن f دالة معرّفة على $[0;+\infty[$ و $\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .



لتكن المتتالية (u_n)، حيث $u_n = f(n)$.

باستعمال التمثيل البياني :

أ) عيّن الحد الأول u_0 .

ب) برّر أنّ المتتالية (u_n) محدودة .

5. نعتبر الدالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـــ : $f(x) = x^2 - 2x$.

لتكن المتتالية (u_n)، حيث $u_n = f(n)$.

أ) شكل جدول تغيّرات الدالة f .

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل.

حـ) هل المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى ؟

اتجاه تغيّر ورتابة متتالية

6. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بالشكل: $u_n = \dfrac{1-n^2}{n}$

1) أدرس إشارة العبارة $u_{n+1} - u_n$، واستنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

جميع الحقوق محفوظة ©

2) أعط دالة f تحقق $u_n = f(n)$. باستعمال اتجاه تغيّر الدالة f، تحقّق من النتيجة المحصّل عليها في السؤال السابق.

7. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بالشكل: $u_n = \dfrac{4^n}{n^2}$

1) أحسب $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

2) برهن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة.

تقارب متتالية

8. نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بالعبارة: $3^n u_n = 2^n$.

1) برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

2) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.

9. نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بالشكل: $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

1. أ) عيّن اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ب) عيّن إشارة u_n.

حـ) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

2. نضع $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. أحسب S_n بدلالة n، ثمّ $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

الاستدلال بالتراجع

10. برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n،

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

11. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0 = 3$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

أثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة .

12. أثبت بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7 .

تمارين للتعمّق

تذكير حول المتتاليات العددية

13. وضع أحمد في أوّل يناير 2000 مبلغ $500\,DA$ في بنك بدون فوائد، وقرّر أن يضيف $50\,DA$، في أوّل كلّ شهر وبانتظام، زيادة على المبلغ المدفوع في الشهر السابق.

نسمي u_1 أوّل المبلغ دفعه أحمد و u_n المبلغ الذي دفعه في الشهر رقم n .

1) أكتب u_n بدلالة n .

2) ما هو المبلغ الذي يضعه أحمد في أوّل ديسمبر 2007 ؟

3) ما هو المبلغ الذي جمعه أحمد في رصيده إلى غاية 31 ديسمبر 2007 ؟

14. يوجد بمحطة توزيع البنزين $32000\,L$ من البنزين. يريد صاحب المحطة توزيع هذه الكمية خلال 10 أيام.

باع في اليوم الأوّل $5000\,L$، ثمّ قرّر أن ينقص من البيع في كلّ يوم نفس الكمية.

ما هي الكمية التي يجب تخفيضها يوميا حتى ينتهي البنزين بعد 10 أيام ؟

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

15. في سنة 1990، كان عدد سكان بلد ما 45,4 مليون نسمة. انتقل إلى 52,6 مليون نسمة في سنة 2002.

نسمي v_0 عدد السكان في 1990 و v_n عدد السكان بعد n سنة. نفرض أنّ عدد السكان يتزايد كلّ سنة بتزايد ثابت r.

1) أحسب التزايد r.

2) ما هو عدد سكان هذا البلد في عام 2020 ؟

16. السعر p_0 لبضاعة في تزايد بنسبة 5% سنويا .

1) أحسب p_1 سعر البضاعة خلال سنة، و p_2 سعرها خلال سنتين، و p_n سعرها خلال n سنة ، بدلالة p_0.

2) خلال كم سنة يصبح سعر البضاعة أكثر من الضعف ؟

17. يقترح أحمد على عمر عقدين لكراء مسكن لمدة 8 سنوات. يدفع عمر $5000\,DA$ في السنة الأولى.

1) في العقد الأول، ثمن الكراء يزداد كلّ سنة بقيمة ثابتة $150\,DA$.

نضع u_n ثمن الكراء للسنة n.

أ) أحسب الثمن u_2.

ب) أكتب u_n بدلالة n ثم أحسب u_8 .

حـ) أحسب ثمن الكراء لثماني سنوات.

2) في العقد الثاني، ثمن الكراء يزداد كلّ سنة بنسبة 3%.

نضع v_n ثمن الكراء للسنة n .

أ) أحسب الثمن v_2 .

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم أحسب v_8.

http://www.onefd.edu.dz

حـ) أحسب ثمن الكراء لثماني سنوات.

3) ما هو العقد الذي يختاره عمر.

المتتاليات المحدودة

18. نعتبر المتتالية (u_n) ذات الحدّ العام $u_n = \frac{n-1}{2n-5}$ مع $n \geq 1$.

ولتكن الدالة f المعرّفة على $]3;+\infty[$ بالشكل:

$$f(x) = \frac{x-1}{2x-5}$$

1. أ) أدرس تغيرات الدالة f واستنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]3;+\infty[$، $f(x) \leq 2$.

ب) نضع $l = 1$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$. عبّر عن $f(x) - l$ بدلالة x استنتج أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]3;+\infty[$، $f(x) \geq l$.

حـ) أنشئ المنحنى $\mathcal{C}$ للدالة f في معلم متعامد، حيث تؤخذ وحدة الرسم $1cm$ على محور الفواصل و $4cm$ على محور التراتيب.

2. أ) مثل المتتالية (u_n) في المعلم السابق.

ب) استنتج، من دراسة الدالة f، أنّ المتتالية (u_n) محدودة.

19. نعتبر المتتالية (u_n)، حيث $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_0^2}$.

1. أ) برّر أنّ (u_n) متتالية هندسية.

ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

حـ) ما هو اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) ؟

2. برهن أنّ المتتالية (u_n) محدودة بالعددين 0 و 2.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

اتجاه تغيّر ورتابة متتالية

20. أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 للمتتالية (u_n) المعرفة كما يلي:

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 0,9u_n - 13$.

21. a عدد حقيقي كيفي. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بالشكل:

$u_0 = a$ و $u_{n+1} = 2,5u_n - 1,5$. بين أنّه:

أ) إذا كان $a = 0$، فإنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

ب) إذا كان $a = 1$، فإنّ المتتالية (u_n) ثابتة.

حـ) إذا كان $a = 2$، فإنّ المتتالية (u_n) متزايدة.

22. (u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $u_n = \dfrac{3^n}{n+2}$

1) أحسب قيم الحدود الخمسة الأولى.

2) أثبت أنه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n > 0$.

3) أدرس إشارة $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

4) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

تقارب متتالية

23. احتمال النجاح في لعبة هو $0,7$.

1) بيّن أنّ احتمال النجاح مرّة على الأقل خلال n لعبة هو:

$p_n = 1 - 0,3^n$، مع $n \geq 1$.

2) عيّن اتّجاه تغيّر المتتالية (p_n) ونهايتها .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

3) عيّن أصغر عدد طبيعي n الذي من أجله يتجاوز الاحتمال p_n القيمة $0,999$.

24. كان إنتاج مؤسسة 2000 قطعة في أوّل السنة والإنتاج يتزايد بنسبة 4% سنويا .

1. أ) أحسب الإنتاج للسنة الرابعة .

ب) بفرض u_n الإنتاج للسنة n . عبّر عن u_n بدلالة n .

حـ) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. أ) عيّن الإنتاج الكلّي (المجمّع) للسنوات الأربع الأخيرة

ب) عبّر عن الإنتاج الكلّي p_n من خلال n سنة بدلالة n .

حـ) ما هي نهاية p_n ؟

د) عيّن السنة n التي يتجاوز الانتاج فيها 4000 قطعة.

الاستدلال بالتراجع

25. نضع $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ ، حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

1. أ) أحسب s_1 ، s_2 ، s_3 و s_4 .

ب) عبر عن s_{n+1} بدلالة s_n .

2. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم،

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad .$$

26. من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 2$ ، نضع:

$$S_n = 1 + 2\times 2 + 3\times 2^2 + 4\times 2^3 + \ldots + (n-1)2^{n-2}$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 2$ ،

$$S_n = (n-1)2^n - n \times 2^{n-1} + 1 = 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)2^n$$

.27 (u_n) متتالية معرفة كما يلي:

$u_0 = 1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 2$.

2) أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ماما .

المتتاليات التراجعية من الشكل: $u_{n+1} = au_n + b$

.28 لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة بالشكل: $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 1)$.

1) عيّن الحدّ الأوّل u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) نضع $u_0 = 4$ و $v_n = 2u_n + 1$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها حدّها الأوّل v_0 .

ب) استنتج v_n بدلالة n ، ثمّ u_n .

حـ) عين نهاية المتتالية (u_n).

مسألتان

.29 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $u_0 = 1$ ومن أجل $n \geq 1$ ،

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2} .$$

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) α عدد حقيقي غير معدوم . من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$v_n = u_n + \alpha$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

أ) عين قيمة العدد α التي تكون من أجلها المتتالية (v_n) هندسية .

ب) عبر عن v_n بدلالة n ؛ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4) عين نهاية المتتالية (u_n) .

5) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

30. قرّر شخص أن يستهلك للتدابير المنزلية 80% من مداخله.

يزداد مدخله 3% سنويا وتنقص مصاريفه المنزلية 2,5% سنويا.

في البداية، كان المدخل السنوي $y_0 = 400000$.

1. أ) أحسب القيمة C_0 التي يستهلكها في البداية.

ب) أحسب المداخل y_1 والاستهلاك C_1 للسنة الموالية $(n=1)$.

حـ) أحسب y_2 و C_2 $(n=2)$.

2. أ) برهن أن $C_n = 0,8\times 0,975^n \times y_n$. مع C_n و y_n هما على الترتيب الاستهلاك والمداخل للسنة n .

ب) استنتج الاستهلاك C_n بدلالة n .

3. أ) أدرس تغيّرات المتتالية (C_n).

ب) عيّن نهاية C_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

4. أدرس تغيّرات المتتالية (C_n) في الحالة التي يرتفع فيها الدخل بـــ 3% وينقص الاستهلاك بـــ 3% سنويا.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ب. حلول التمارين

تذكير حول المتتاليات العددية

1. $S=5$

2. من أجل كلّ عدد طبيعي n،

$$v_{n+1}-v_n=3u_{n+1}-1-3u_n+1=3\left(u_{n+1}-u_n\right)$$

أي أنّ $v_{n+1}-v_n=3r$، لأنّ $\left(u_n\right)$ متتالية حسابية، أساسها r.

منه $\left(v_n\right)$ متتالية حسابية، أساسها $3r$.

بالمثل، من أجل كلّ عدد طبيعي n،

$$w_{n+1}-w_n=u_{2(n+1)}+3-u_{2n}+3=u_{2n+2}-u_{2n}.$$

لكن $u_{2n+2}=u_{2n}+\left(2n+2-2n\right)r$

أي أنّ $w_{n+1}-w_n=u_{2(n+1)}+3-u_{2n}+3=2r$

منه $\left(w_n\right)$ متتالية حسابية، أساسها $2r$.

المتتاليات المحدودة

3. أ) $u_0=f(0)=0$

ب) $\left(u_n\right)$ محدودة من الأعلى بالعدد 3: لأنّه من أجل كلّ x من المجال $[0;+\infty[$، $f(x)\le 3$.

4. أ) بقراءة بيانية، نجد: $u_0=f(0)=3$

ب) $\left(u_n\right)$ محدودة من الأسفل بالعدد -2: لأنّه من أجل كلّ x من المجال $[0;+\infty[$، $f(x)\ge -2$.

جميع الحقوق محفوظة ©

5. أ)

x	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	0 ↘	-1	↗ 0	↗ $+\infty$

ب) المتتالية محدودة من الأسفل بالعدد -1، لأنّه من أجل كلّ x من المجال $[0;+\infty[$، $f(x)\geq -1$.

حـ) المتتالية ليست محدودة من الأعلى.

اتجاه تغيّر ورتابة متتالية

6. 1) $0<u_{n+1}-u_n=-\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

نستنتج أنّ المتتالية متناقصة تماما.

2) من أجل كلّ x من المجال $]0;+\infty[$، $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$.

3) جدول تغيّرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘ $-\infty$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$. نستنتج أنّ المتتالية متناقصة تماما.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

7. 1) من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدود n ،

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{4^{n+1}}{(n+1)^2}\times\frac{n^2}{4^n}=\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2$$

2) كون كلّ حدود المتتالية موجبة تماما، فلدراسة رتابة المتتالية، يمكن مقارنة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1. نجد: من أجل كلّ عدد طبيعي $n\geq 1$ ،

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2\geq 1$. فالمتتالية متزايدة.

تقارب متتالية

8. 1) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2) المتتالية (u_n) هندسية وأساسها $q=\frac{2}{3}$.

وكون $0<q<1$ ، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

9. 1. أ) f الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) والمعرفة على $]0;+\infty[$ بالشكل: $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

جدول تغيّراتها كما يلي:

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	↘	0

من الجدول، يتضح أنّ (u_n) متناقصة تماما.

ب) إشارة u_n: من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>0$.

http://www.oneld.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

حـ) المتتالية (u_n) متقاربة، لأنها متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \quad .2$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

ونستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

الاستدلال بالتراجع

10. الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$: $0^2 = \frac{0\times(0+1)\times(2\times 0+1)}{6}$

نفرض أنّها صحيحة من أجل n ونبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$.

لدينا:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

إذن من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

11. الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$: $u_0 = 3$

نفرض أنّها صحيحة من أجل n ، ونبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$.

لدينا: $u_{n+1} = 2u_n - 3$ و $u_n = 3$ (فرضية التراجع).

http://www.onefd.edu.dz © حقوق الطبع محفوظة

منه $u_{n+1}=2\times 3-3=3$.

الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

فالمتتالية (u_n) ثابتة.

12. الخاصية صحيحة من أجل $n=0$: $2^{3\times 0}-1=0$ و 0 مضاعف 7 .

نفرض أنّها صحيحة من أجل n ، أي $2^{3n}-1$ مضاعف 7 ، ونبرهن أنها صحيحة من أجل $n+1$ ، أي $2^{3(n+1)}-1$ مضاعف 7 .

لدينا: $2^{3n}-1$ مضاعف 7 (فرضية التراجع).

منه $2^{3n}-1=7k$ أي $2^{3n}=7k+1$ $(k\in\mathbb{Z})$

لدينا أيضا: $2^{3(n+1)}-1=2^{3n}\times 2^3-1$

منه $2^{3n}\times 2^3-1=8(7k+1)-1=7\times 8k+7$

أي أنّ $2^{3(n+1)}-1=7(8k+1)$.

بوضع $k'=8k+1$ ، نجد: $2^{3(n+1)}-1=7k'$.

وهذا يعني أنّ $2^{3(n+1)}-1$ مضاعف 7 .

فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

خلاصة: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $2^{3n}-1$ مضاعف 7 .

13.

1) $u_1=500$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n+50$.

(u_n) متتالية حسابية، أساسها $r=50$.

منه $u_n=u_1+(n-1)r=50n+450$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

2) ليكن u_n المبلغ الموضوع في 2007/12/01، حيث $n = 8 \times 12 = 96$.

لدينا: $u_{96} = 50 \times 96 + 450 = 5\ 250\ DA$

3) ليكن S المبلغ المدخر إلى غاية 2007/12/31.

لدينا: $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{96} = 96\left(\frac{u_1 + u_{96}}{2}\right) = 276\ 000\ DA$.

14. لدينا $u_1 = 5000$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n - c$، حيث c هي الكمية الثابتة من البنزين التي يخفضها صاحب المحطة في المبيعات يوميا.

منه (u_n) متتالية حسابية، أساسها $-c$.

ليكن u_{10} الكمية المباعة في اليوم العاشر.

لدينا: $u_1 + u_2 + \ldots + u_{10} = 32\ 000$.

لكن $u_1 + u_2 + \ldots + u_{10} = 10\left(\frac{u_1 + u_{10}}{2}\right)$ ومنه $10\left(\frac{2u_1 - 9c}{2}\right) = 32\ 000$.

وبالتالي: $c = 400\ l$

تمارين للتعمّق

تذكير حول المتتاليات العددية

15. 1) (الوحدة: مليون نسمة).

(v_n) متتالية حسابية، حدّها الأوّل $v_0 = 45,4$ وأساسها r، بحيث $v_{12} = 52,6$.

لدينا: $v_{12} = v_0 + 12r = 52,6$.

http://www.onefd.edu.dz

منه $r = 0,6$: النسبة الثابتة لتزايد السكان هي $0,6$ مليون نسمة لكلّ سنة.

2) عدد السكان في العام 2020 يوافق v_{30} .

لدينا: $v_{30} = v_0 + 30r = 63,4$

أي أنّ عدد السكان في العام 2020 سيكون $63,4$ مليون نسمة.

.16 1) $p_1 = p_0 + 0,05 \times p_0 = 1,05 \times p_0$

و $p_2 = p_1 + 0,05 \times p_1 = 1,05 \times p_1 = (1,05)^2 \ p_0$

وبصفة عامة، يكون من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $p_{n+1} = 1,05 \times p_n$.

وهذا يعني أنّ (p_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1,05$.

ونستنتج أنّ من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $p_n = (1,05)^n \times p_0$.

n	(1,05)^n
1	1,05
2	1,1025
3	1,1576
4	1,2155
5	1,2763
6	1,3401
7	1,4071
8	1,4775
9	1,5513
10	1,6289
11	1,7103
12	1,7959
13	1,8856
14	1,9799
15	2,0789
16	2,1829

2) نعيّن n ، بحيث $p_n \geq 2p_0$.

$p_n \geq 2p_0$ يعني $(1,05)^n \ p_0 \geq 2p_0$ أي أنّ

$(1,05)^n \geq 2$ حيث p_0 عدد موجب تماما.والمسألة

تؤول إلى تعيين n ، بحيث $(1,05)^n \geq 2$.

لذلك، يمكن الاستعانة بحاسبة أو مجدول ونجد $n = 15$

وهي النتيجة التي نجدها كذلك بالحساب كما يلي:

$(1,05)^n \geq 2$ يكافئ $\ln(1,05)^n \geq \ln 2$

حيث $\ln$ هي الدالة اللوغاريتم النيبيري.

وبتطبيق خواص هذه الدالة نجد:

$n \times \ln(1,05) \geq \ln 2$ أي $n \geq \dfrac{\ln 2}{\ln(1,05)}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة

بعد الحساب، نجد: $\frac{\ln 2}{\ln(1,05)} \simeq 14,20669$

أي أنّ $n \geq 15$.

يتعدى سعر البضاعة ضعف سعرها الابتدائي بعد 15 سنة.

.17

1. أ) $u_2 = u_1 + 150 = 5150\ DA$

ب) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 150$.

إذن المتتالية (u_n) حسابية، أساسها 150.

وبالتالي، $u_n = u_1 + (n-1) \times 150 = 150n + 4850$.

ونجد: $u_8 = 150 \times 8 + 4850 = 9600\ DA$.

حـ) $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_8 = \frac{8}{2}(u_1 + u_n) = 58\ 400\ DA$

2. أ) $v_2 = v_1 + 0,03 \times v_1 = 5150\ DA$

ب) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = 1,03\, v_n$.

إذن المتتالية (v_n) هندسية، أساسها 1,03.

وبالتالي، $v_n = v_1 \times (1,03)^{n-1}$.

ونجد: $v_8 = 5000(1,03)^7 = 6149,37\ DA$.

حـ) $S' = v_1 + v_2 + \ldots + v_8 = v_1 \frac{(1,03)^8 - 1}{1,03 - 1} = 44\ 461,68\ DA$

3. يختار عمر العقد الثاني لأنّه أقلّ تكلفة.

جميع الحقوق محفوظة ©

المتتاليات المحدودة

18.

1. أ) جدول تغيرات الدالة f :

x	3	$+\infty$
$f'(x)$	−	
$f(x)$	2 ↘	$\frac{1}{2}$

ونستنتج أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[3;+\infty[$، $f(x) \leq 2$.

ب) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

منه $f(x) - \frac{1}{2} = \frac{4}{2(2x-5)}$.

وكون $\frac{4}{2(2x-5)} > 0$ (x من المجال $[3;+\infty[$)، نستنتج أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[3;+\infty[$، $f(x) \geq \frac{1}{2}$.

19.

1. أ) المتتالية (u_n) هندسية: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$.

ب) عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

حـ) المتتالية (u_n) متناقصة.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

2. زيادة عن النتائج السابقة، نلاحظ أنّ كلّ حدود المتتالية (u_n) موجبة تماما، فهي محدودة بالعددين 0 و 2.

اتجاه تغيّر ورتابة متتالية

20. $u_1 = -11,2$ ؛ $u_2 = -23,08$ ؛ $u_3 = -33,772$

21. لدينا من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 1,5(u_n - 1)$

أ) في حالة $u_0 = a = 0$، نجد: $u_1 = 2,5 \times 0 - 1,5 = -1,5$

و $u_2 = 2,5 \times (-1,5) - 1,5 = -5,25$ وهكذا، ...

فالمتتالية (u_n) متناقصة.

ب) إذا كان $u_0 = a = 1$، نجد: $u_1 = 2,5 \times 1 - 1,5 = 1$

و $u_2 = 2,5 \times 1 - 1,5 = 1$ وهكذا، ...

فالمتتالية (u_n) ثابتة.

حـ) إذا كان $u_0 = a = 2$، نجد: $u_1 = 2,5 \times 2 - 1,5 = 3,5$

و $u_2 = 2,5 \times 3,5 - 1,5 = 7,25$ وهكذا، ...

فالمتتالية (u_n) متزايدة.

وهي النتائج التي نحصل عليها كذلك عند دراسة إشارة $u_{n+1} = 1,5(u_n - 1)$

22. (u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $u_n = \dfrac{3^n}{n+2}$.

1) $u_0 = \dfrac{1}{2}$ ؛ $u_1 = 1$ ؛ $u_2 = \dfrac{9}{4}$ ؛ $u_3 = \dfrac{27}{5}$ ؛ $u_4 = \dfrac{81}{6}$.

2) نبرهن بالتراجع، أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n > 0$.

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

3) نجد: $\frac{u_{n+1}}{u_n}-1>0$.

4) نستنتج أنّ المتتالية (u_n) متزايدة.

تقارب متتالية

.23

1) احتمال عدم التوفيق في اللعبة هو $0,3$.

منه احتمال التوفيق مرّة على الأقل خلال n لعبة: $p_n=1-0,3^n$ ، مع $n\geq 1$.

2) المتتالية (p_n) متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=1$.

3) باستعمال مجدول أو حاسبة أو خواص الدالة اللوغاريتم النيبيري، نجد: $n=6$.

.24

1. أ) $u_1=2000$ ؛ $u_2=2000\times\left(1+\frac{4}{100}\right)=2080$ ؛ $u_1=2163,2$ ؛ $u_4=2249,728$.

ب) من أجل كلّ عدد طبيعي $n\geq 1$ ، $u_n=2000\times(1,04)^{n-1}$

حـ) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

2. أ) $8492,928$ قطعة.

ب) $p_n=2000\times\frac{1-1,04^n}{1-1,04}$

حـ) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=+\infty$.

د) $n=18$.

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

الاستدلال بالتراجع

25. نضع $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ ، حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

1. أ) $s_1 = 1$ ، $s_2 = 5$ ، $s_3 = 14$ و $s_4 = 12$.

ب) $s_{n+1} = S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2$.

2. نبرهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم،

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad .$$

- من أجل $n = 1$ ، لدينا $S_1 = \frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \frac{2\times 3}{6} = 1$

و $s_1 = 1$ حسب نتيجة السؤال السابق.

الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$.

- نفرض أنّ الخاصية صحيحة من أجل n ، بنرهن أنّها صحيحة من أجل $n+1$.

لدينا $s_{n+1} = S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2$

وبتطبيق فرضية التراجع، نجد: $s_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

منه $s_{n+1} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

- خلاصة

من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n ، $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

http://www.onefd.edu.dz

26. من أجل $n=2$ ، لدينا $S_2=1$ و $1+\left(\frac{1}{2}\times 2-1\right)2^2=1$.

الخاصية صحيحة من أجل $n=2$.

نفرض أنّها صحيحة من أجل n ، ونبرهن أنّها صحيحة من أجل $n+1$.

أي أنّ:

$$S_{n+1}=1+\left[\left(\frac{1}{2}(n+1)-1\right)\right]2^{n+1}=1+2\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\right)2^n=1+(n-1)2^n$$

لدينا:

$$S_{n+1}=1+2\times 2+\ldots+(n-1)2^{n-2}+n\times 2^{n-1}$$

(فرضية التراجع)

$$=1+\left(\frac{1}{2}n-1\right)2^n+n\times 2^{n-1}$$

منه

$$S_{n+1}=1+\left(\frac{1}{2}n-1\right)2^n+n\times 2^{n-1}$$

$$=1+\left[2\left(\frac{1}{2}n-1\right)+n\right]2^{n-1}$$

$$=1+(2n-2)2^{n-1}$$

$$=1+(n-1)2^n$$

فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

خلاصة: من أجل كلّ عدد طبيعي $n\geq 2$ ،

$$S_n=(n-1)2^n-n\times 2^{n-1}+1=1+\left(\frac{1}{2}n-1\right)2^n$$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

.27

1) نبرهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le 2$.

لدينا $u_0 = 1$. منه $0 \le u_0 \le 2$.

نفرض أنّ $0 \le u_n \le 2$ ونبرهن أنّ $0 \le u_{n+1} \le 2$.

نعلم أنّ الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

من فرضية التراجع، نجد: $\sqrt{2} \le \sqrt{u_n + 2} \le \sqrt{2+2}$.

منه $0 \le \sqrt{2} \le u_{n+1} \le 2$.

إذن من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le 2$.

2) للبرهان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما، نبرهن بالتراجع أنّ من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \ge u_n$.

لدينا $u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{3} \ge u_0$.

نفرض أنّ $u_n \le u_{n-1} \le ... \le u_1 \le u_0$ ونبرهن أنّ $u_0 \le u_1 \le ... \le u_n \le u_{n+1}$.

لدينا بالخصوص $u_{n-1} \le u_n$ كما نعلم أنّ الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

منه $\sqrt{u_{n-1}+2} \le \sqrt{u_n+2}$.

أي أنّ $u_n \le u_{n+1}$.

إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

المتتاليات التراجعية من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$

28. 1) $u_0=-\frac{1}{2}$

2) أ) من أجل كلّ عدد طبيعي n ،

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2u_{n+1}+1 \\ &= 2\left[\frac{1}{3}(u_n-1)\right]+1 \\ &= \frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}+1 \\ &= \frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(2u_n+1)=\frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

فالمتتالية (v_n) هندسية: يطلب تعيين أساسها $\frac{1}{3}$، وحدّها الأوّل $v_0=9$.

ب) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $v_n=9\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $u_n=-\frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}$

حـ) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$.

29.

1) بالتعويض في عبارة الحدّ العام، نجد:

$u_1=0$ ، $u_2=-\frac{1}{2}$ ، $u_3=-\frac{3}{4}$.

2) أ) لدينا: $v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha$.

منه $v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha=\frac{u_n-1}{2}+\alpha$.

ونجد، بعد الحساب والاختزال: $v_{n+1}=\frac{v_n-1+\alpha}{2}$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

وحتى تكون المتتالية (v_n) هندسية، يجب أن نختار $\alpha = 1$.

عندئذ، يصبح من أجل كلّ عد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$.

ب) الحدّ العام v_n بدلالة n يعطى بتطبيق عبارة الحدّ العام لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدهاالأوّل $v_0 = u_0 + \alpha = 2$:

من أجل كلّ عد طبيعي n ، $v_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ومنه نستنتج عبارة u_n بدلالة n :

أجل كلّ عد طبيعي n ، $u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$.

3) لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)، يمكن مقارنة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1.

نجد: $u_{n+1} \leq u_n$. معنى ذلك أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) = -1$

5) لحساب المجموع S_n ، نستعين بمجموع حدا الأولى لمتتالية هندسية أساسها يختلف عن 1 ونجد: $(n+1)$

$$S_n = 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) - (n+1) .$$

ونستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = -1$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

VIII. تقويم ذاتي:

أ. اختيار من متعدد

1) اختر، في كلّ سؤال، الاقتراح الصحيح.

المتتالية (u_n) المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n هي متتالية متناقصة.

أ) $u_0=-1$ و $u_{n+1}=u_n+0,1$

ب) $u_n=\dfrac{1}{n+1}$.

ج) $u_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

د) $u_0=4$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}$

2) المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ هي متتالية هندسية.

أ) $u_n=-3n+1$

ب) $u_0=4$ و $u_{n+1}=-3u_n$

ج) $u_n=n+\dfrac{1}{2}$

د) $u_0=1$ و $u_{n+1}=u_n+1$

3) من بين الاقتراحات الأربعة المعطاة للسؤال، يوجد اقتراح واحد صحيح يطلب تعيينه.

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان كما يلي: $u_0=14$

جميع الحقوق محفوظة ©

ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=4u_n+3$

و $v_n=u_n+1$

أ) (v_n) متتالية هندسية أساسها 4

ب) (u_n) متتالية هندسية أساسها 4

ج) (v_n) متتالية متقاربة

د) (u_n) متتالية متقاربة.

ب. صحيح أم خاطئ

1) ميّز بين الجمل الصحيحة والجمل الخاطئة.

أ) إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=6$ فإن المتتالية (u_n) متقاربة.

ب) إذا كانت متتالية محدودة فهي متقاربة .

ج) إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ فإن المتتالية ذات الحد العام $\frac{-u_n}{3}$ هي متتالية متباعدة.

د) إذا كانت متتالية متناقصة ومتقاربة فهي محدودة.

هـ) كل متتالية متزايدة فهي محدودة أو متقاربة.

2) أذكر في كلّ حالة إن كانت الجملة المقترحة صحيحة أم خاطئة.

(u_n)هي المتتالية المعرفة بحدّها العام (u_n) حيث :

$u_n=\dfrac{2n-3}{n+1}$.

أ) (u_n) متتالية متناقصة .

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ب) المتتالية (u_n) ليست متقاربة .

ج) المتتالية (u_n) محدودة .

د) المتتالية (u_n) هندسية أساسها 2 .

هـ) المتتالية $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ متناقصة ومتقاربة.

و) يمكن كتابة الحد العام للمتتالية (u_n) يعطى على الشكل:

$u_n = f(n)$ حيث $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

أ. أجوبة اختيار من متعدد

1) ب، ج، د.

2) أ، ج، د.

3) أ.

ب. أجوبة صحيح أم خطئ

الحالة	النصوص الصحيحة	النصوص الخاطئة
1)	أ. ج .	ب. د. هـ.
2)	ج. هـ . و .	أ . ب . د.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

IX. استعد للبكالوريا :

1.

في 1 جانفي 2001 أودع زكرياء رصيد 10000 DA ببنك يقدّم فوائد مركبة نسبتها 5% سنويا إلا أن مصاريف تنقله إلى الجامعة تفرض عليه سحب مبلغ 1500 DA في نهاية كلّ سنة (بعد حساب الفوائد).

نرمز بـ u_n إلى رصيد زكرياء في أوّل جانفي من السنة $2001+n$.

1. عين u_0، ثمّ احسب u_1.

كم كان رصيد زكرياء في أوّل جانفي 2003 ؟

2. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1,05u_n-1500$.
3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
4. نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=u_n-30000$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

5. ابتداء من أيّ سنة يكون رصيد زكرياء دائنا ؟

حل

عناصر الإجابة	سلم التنقيط
1. $u_0=10000$ ، $u_1=90000$	$0,25\times 2$
u_2 هو رصيد زكرياء في أوّل جانفي 2003.	0,5
$u_2=u_1+\frac{5}{100}\times u_1-1500$ ومنه $u_2=7950$.	

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة

2. $u_{n+1}=u_n+\frac{5}{100}\times 10000-1500$ ومنه $u_{n+1}=1,05u_n-1500$.	0,5
3. نلاحظ أنّ $u_{n+1}=f(u_n)$ ، حيث $f(x)=1,05x-1500$. f متزايدة، ومنه المتتالية (u_n) رتيبة. وبما أن $u_1-u_0<0$، فإنّ المتتالية (u_n) متناقصة.	0,75
4. أ) $v_{n+1}=u_{n+1}-30000=1,05u_n-31500$ ومنه $v_{n+1}=1,05(u_n-30000)$ ، أي $v_{n+1}=1,05\,v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=1,05$ وحدّها الأول $v_0=-20000$.	0,75
ب) لدينا $v_n=v_0\,q^n=-2\times 10^4\times(1,05)^n$. بما أنّ $u_n=v_n+30000$ ،فإنّ $u_n=-2\times 10^4\times(1,05)^n+3\times 10^4$. ومنه $\lim u_n=-\infty$.	1
5. لدينا $u_8=540,89$ و $u_9=-1027$. وبما أنّ u_9 هو رصيد زكرياء في 2010/01/01 ، فإنّ رصيده يكون دائنا ابتداء من سنة 2010.	1

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

2.

في أوّل جانفي 2005، بلغ عدد عمّال إحدى المؤسسات 1500 عاملا. أثبتت دراسة أنّه خلال كلّ سنة من السنوات القادمة سيُحال 10% من العمّال على التقاعد. وبهدف تعديل عدد عمّالها مع احتياجاتها، توظّف المؤسسة خلال السنة 100 شاب.

من أجل كلّ عدد طبيعي n، نرمز بـِ u_n إلى عدد عمّال المؤسسة في أوّل جانفي من السنة $2005+n$.

أجب بصحيح أو خاطئ، بوضع العلامة × في الخانة المناسبة، مع تبرير اختيارك.

	صحيح	خاطئ
1.في2006/01/01 ، بلغ عدد عمّال المؤسسة 1450 عاملا.		
2.المتتالية (u_n) متتالية هندسية.		
3.من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=0,9\times u_n+100$.		
4.من أجل كلّ عدد طبيعي n ، المتتالية (v_n)، حيث $v_n=u_n-1000$ متتالية هندسية.		
5.من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $v_n=500\times(0,9)^n$.		
6.من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n=500\times(0,9)^n-1000$.		
7.يرتفع عدد عمّال المؤسسة من سنة إلى أخرى.		
8.لن يقلّ أبدا عدد عمّال المؤسسة عن 500.		

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

إرشادات لحل التمرين

1. يتم حساب u_1 انطلاقا من u_0.
2. استعمل تعريف أو خواص المتتالية الهندسية.
3. لاحظ العلاقة بين الأجوبة المقترحة في السؤالين 2 و3. هل اختياراتك في هاتين الحالتين متجانسة ؟
4. عبّر عن v_{n+1} بدلالة v_n.
5. استعمل عبارة الحدّ العام لمتتالية هندسية.
6. استنتج عبارة u_n انطلاقا من عبارة v_n، باستعمال العلاقة $v_n = u_n - 1000$.
7. اربط الجواب المقترح باتجاه تغير المتتالية (u_n).
8. استعمل اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ونهايتها.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©