2. التزايد المقارن

الكفاءات المستهدفة

- دراسة الدالة اللوغاريتم ذات الأساس a.
- حل مشكلات متعلقة بإيداع أو تسديد تتدخل فيها اللوغاريتمات أو الأسيات.
- معرفة وتفسير النهايات الخاصة بالتزايد المقارن.

تصميم الدرس

I. تعريف، تغيرات والتمثيل البياني، خواص الدالة $\log_a$.

II. قوى عدد حقيقي موجب تماما.

III. دراسة الدوال $x \mapsto a^x$ و $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

IV. التزايد المقارن.

V. ملخص الفصل

VI. توظيف المعارف (تمارين + حلول وإرشادات)

VII. التقويم الذاتي (اختيار من متعدد + صحيح أم خاطئ)

VIII. استعد للبكالوريا (مسألة محلولة مع سلّم التنقيط)

جميع الحقوق محفوظة ©

I. دالة اللوغاريتمية ذات الأساس a :

نشاط

من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما و مختلف عن 1، نعتبر الدالة f_a المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f_a(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

1. لماذا في رأيك وضع الشرطان: $a>0$ و $a\neq 1$ ؟ تعرف على الدالتين f_e و f_{10} .

2. من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما x ، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n بين أن:

أ) $f_a(x\times y)=f_a(x)+f_a(y)$ ب) $f_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=f_a(x)-f_a(y)$

ج) $f_a\left(x^n\right)=nf_a(x)$.

3. بملاحظة أنه من كل x من $]0;+\infty[$ ، $f_a(x)=\dfrac{1}{\ln(a)}\times\ln(x)$

أ)عين اتجاه تغير الدالة f_a (نميز حالتين).

ب)عين نهايتي الدالة f_a عند 0 و عند $+\infty$. أحسب $f_a(a)$ و $f_a(1)$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ج)ارسم المنحني (C_a) الممثل للدالة f_a في معلم متعامد ومتجانس (نميز حالتين).

تعريف: تسمى f_a الدالة اللوغاريتم للأساس a و نرمز إليها بالرمز " $\log_a$ ".

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

حلّ

1.وضع $a>0$ و $a\neq 1$ لأن $\dfrac{1}{\ln(a)}$ معرف فقط من أجل $\begin{cases} a>0 \\ \ln(a)\neq 0 \end{cases}$

أي من اجل $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$.

$f_e(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(e)}=\dfrac{\ln(x)}{1}=\ln(x)$ و $f_{10}(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

2.

أ) $f_a(x\times y)=\dfrac{\ln(xy)}{\ln(a)}=\dfrac{\ln(x)+\ln(y)}{\ln(a)}=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}+\dfrac{\ln(y)}{\ln(a)}$ أي

$$f_a(x\times y)=f_a(x)+f_a(y)$$

ب) $f_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)}{\ln(a)}=\dfrac{\ln(x)-\ln(y)}{\ln(a)}=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}-\dfrac{\ln(y)}{\ln(a)}$ أي

$$f_a\left(\frac{x}{y}\right)=f_a(x)-f_a(y)$$

ج) $f_a(x^n)=\dfrac{\ln(x^n)}{\ln(a)}=n\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}=nf_a(x)$.

3. أ)حساب الدالة المشتقة: $f'_a(x)=\dfrac{1}{\ln(a)}\times\dfrac{1}{x}$.

- إذا كان $\ln(a)>0$ أي $a>1$ فإن $f'_a(x)>0$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$ إذن f_a متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.
- إذا كان $\ln(a)<0$ أي $0<a<1$ فإن $f'_a(x)<0$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$ إذن f_a متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ب) بما أن $\lim\limits_{x\xrightarrow[>]{}0} \ln(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ فإن:

- من أجل $\ln(a) > 0$ أي $a > 1$ لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow[>]{}0} f_a(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty \end{cases}$.
- من أجل $\ln(a) < 0$ أي $0 < a < 1$ لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow[>]{}0} f_a(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty \end{cases}$.

لدينا من جهة أخرى :

$f_a(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$ و $f_a(1) = \dfrac{\ln(1)}{\ln(a)} = 0$.

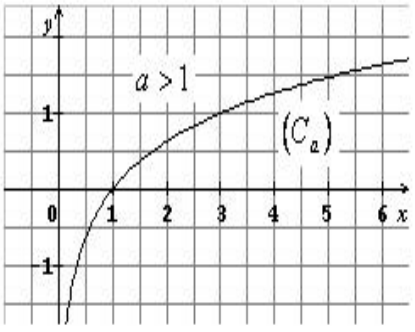
$a > 1$

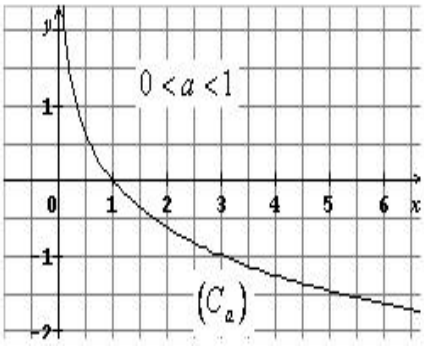
x	0		1		a		$+\infty$
$f'_a(x)$	‖	$+$	0	$+$	0	$+$	
$f_a(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

$0 < a < 1$

x	0		a		1		$+\infty$
$f'_a(x)$	‖	$-$	0	$-$	0	$-$	
$f_a(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	0	↘	$-\infty$

ج) إنشاء (C_a)





http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

تعريف

a عدد حقيقي موجب تماما و مختلف عن 1.

نسمي دالة اللوغاريتم للأساس a الدالة التي نرمز إليها بالرمز $\log_a$ و المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ: $\log_a(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

ملاحظة

- إذا كان $a=e$ فإن $\log_a(x)=\ln(x)$ لأن $\ln(e)=1$. إذن دالة اللوغاريتم للأساس e هي الدالة " ln ".
- إذا كان $a=10$ تسمى دالة اللوغلريتم للأساس 10 دالة اللوغاريتم العشري و نرمز إليها بالرمز " log "

خواص الدالة $\log_a$

من أجل كل x ، y من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

$$(1)\ \log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)\quad \log_a\left(\frac{1}{y}\right)=-\log_a(y)\ \ (2)$$

$$\log_a\left(x^n\right)=n\log_a(x)\ \ (3)$$

التغيرات و التمثيل البياني للدالة $\log_a$

من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\log_a(x)=\dfrac{1}{\ln(a)}\times\ln(x)$ و هي من الشكل $\log_a(x)=k\times\ln(x)$ و منه:

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

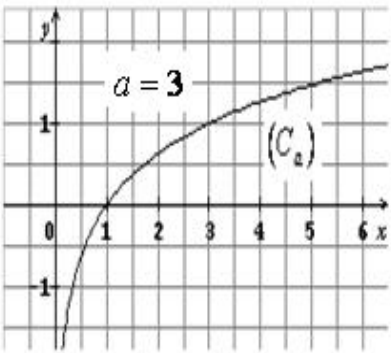
- إذا كان $0<a<1$ فإن $\ln(a)<0$: تكون الدالة $\log_a$ متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.
- إذا كان $a>1$ فإن $\ln(a)>0$: تكون الدالة $\log_a$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.
- الدالة $\log_a$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $(\log_a)'(x)=\dfrac{1}{x\ln(a)}$.

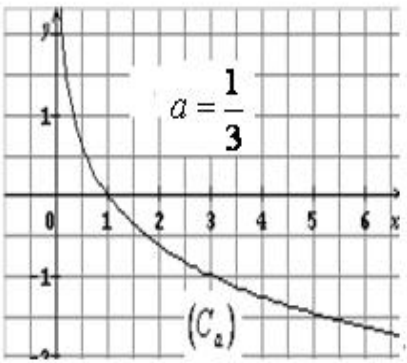
$a>1$

x	0		1		a		$+\infty$
$f'_a(x)$	‖	$+$	0	$+$	0	$+$	
$f_a(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

$0<a<1$

x	0		a		1		$+\infty$
$f'_a(x)$	‖	$-$	0	$-$	0	$-$	
$f_a(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↘	0	↘	$-\infty$





تطبيق 1

حل المعادلة والمتراجحة التاليتين:

$\log_{0,5}(2x+2)=\log_{0,5}(x+3)$ (1)

$\log_{0,5}(2x+2)\geq\log_{0,5}(x+3)$ (2)

http://www.onefd.edu.dz

حلّ

نبدأ أولا بتعيين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $2x+2>0$ و $x+3>0$ و هذا يعني $x>-1$ و $x>-3$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]-1;+\infty[$.

من أجل كل x من D، (1) تعني $2x+2=x+3$ أي $x=1$ و بما أن 1 ينتمي إلى D فإن مجموعة الحلول هي $S=\{1\}$.

2. مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي $D=]-1;+\infty[$.

من أجل كل x من D، (1) تعني $2x+2<x+3$ لأن $0,5<1$ أي $x<1$ و بالتالي فإن مجموعة الحلول هي $S=]-1;1[$.

تطبيق2

حل المعادلة التالية: $2\left[\log(x)\right]^2+\log(x)-6=0$

طريقة: لحل معادلة من الشكل $a\left[\log(x)\right]^2+b\log(x)+c=0$ مع $a\neq 0$ نضع $X=\log x$ ، نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ ثم نستنتج قيم x في حالة وجودها.

حلّ

مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]0;+\infty[$.

بوضع $X=\log x$ نحصل على المعادلة $2X^2+X-6=0$ ذات الحلين -2 و $\frac{3}{2}$.

$\log x=-2$ تعني $\log x=\log\left(10^{-2}\right)$ أي $x=10^{-2}$.

http://www.onefd.edu.dz

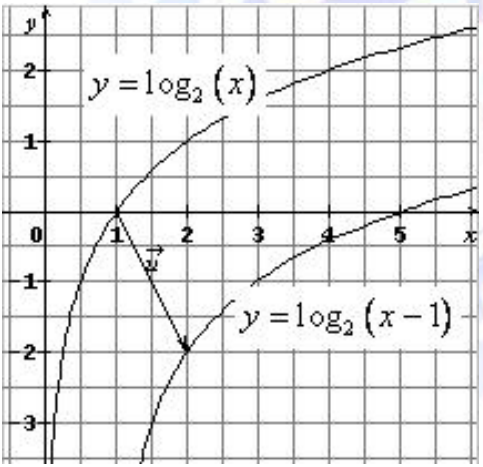
و $\log x = \frac{3}{2}$ تعني $\frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{3}{2}$ أي $\ln\left(x^2\right) = \ln\left(10^3\right)$ و هذا يعني $x^2 = 10^3$ و منه $x = \sqrt{10^3}$.

مجموعة الحلول هي $S = \left\{10^{-2}; \sqrt{10^3}\right\}$.

تطبيق3

نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـِـ: $f(x) = -2 + \log_2(x-1)$ عين اتجاه تغير الدالة f ثم أرسم المنحني الممثل للدالة f انطلاقا من التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \log_2(x)$.

حلّ



للدالتين f و $x \mapsto \log_2(x-1)$ نفس اتجاه التغير.

كما أن الدالة $x \mapsto \log_2(x-1)$ هي مركب الدالة $x \mapsto x-1$ متبوعة بالدالة $x \mapsto \log_2(x)$ و بما أن هاتين الدالتين متزايدتين فإن الدالة $x \mapsto \log_2(x-1)$ متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ وعليه فالدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

منحني الدالة f هو صورة المنحني الممثل للدالة $x \mapsto \log_2(x)$ بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{u}(1;-2)$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

II. قوى عدد حقيقي موجب تماما:

نشاط1

1) ليكن n عددا صحيحا نسبيا. أكتب العدد $\ln\left(3^n\right)$ بكيفية أخرى ثم استنتج أن $3^n = e^{n\ln 3}$.

الدستور $3^n = e^{n\ln 3}$ يمنحنا فكرة تمديد مفهوم القوى. هذا التمديد يفرض علينا طرح السؤال التالي:

كيف يمكن تعريف 3^x من أجل كل عدد حقيقي x ؟

نضع، تعريفا، من أجل كل عدد حقيقي x ، $3^x = e^{x\ln 3}$

عين، باستعمال حاسبة، المدور إلى 10^{-2} لكل عدد من الأعداد التالية:

$3^{\frac{1}{3}}$ ، 3^e ، $3^{-\frac{2}{5}}$ و $3^{\sqrt{2}}$.

2) بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين x ، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n :

أ) $3^x \times 3^y = 3^{x+y}$ ب) $\left(3^x\right)^n = 3^{nx}$ جـ) $\dfrac{3^x}{3^y} = 3^{x-y}$

3) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $f(x) = 3^x$.

حلّ

1)

- لدينا $\ln\left(3^n\right) = e^{\ln\left(3^n\right)}$ إذن $\ln\left(3^n\right) = e^{n\ln 3}$.
- $3^{\frac{1}{3}} \simeq 1,44$ ، $3^e \simeq 19,81$ ، $3^{-\frac{2}{5}} \simeq 0,64$ و $3^{\sqrt{2}} \simeq 4,73$.

2) أ) $3^x \times 3^y = e^{x\ln 3} \times e^{y\ln 3} = e^{(x+y)\ln 3} = 3^{x+y}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ب) $\left(3^x\right)^n = \left(e^{x\ln 3}\right)^n = e^{xn\ln 3} = 3^{nx}$.

ج) $\dfrac{3^x}{3^y} = \dfrac{e^{x\ln 3}}{e^{y\ln 3}} = e^{x\ln 3 - x\ln 3} = e^{(x-y)\ln 3} = 3^{x-y}$.

3)

- f معرفة على $]-\infty;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln 3} = 0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln 3 = -\infty$.

  $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln 3} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln 3 = +\infty$.
- الدالة $x \mapsto f(x) = 3^x = e^{x\ln 3}$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = (\ln 3)e^{x\ln 3}$ أي $f'(x) = (\ln 3)\times 3^x$.
- من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) > 0$ إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

نسمى الدالة $x \mapsto 3^x$ " الدالة الأسية ذات الأساس 3.

نشاط2

1) ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ: $f(x) = x^3$.

2) بين أن المعادلة $x^3 = 3$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$.

باستعمال حاسبة بيانية عين حصرا سعته 10^{-2} للعدد α.

نتيجة: العدد α هو إذن العدد الموجب الوحيد الذي يحقق: $\alpha^3 = 3$.

يسمى العدد α الجذر التكعيبي للعدد 3 و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[3]{3}$.

3) **تعريف:** يعطى التعريف التالي

نسمي الجذر التكعيبي للعدد الموجب a العدد الموجب الوحيد x حيث $x^3 = a$ و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[3]{a}$.

و لاحظ: $x = \sqrt[3]{a}$ معناه $x^3 = a$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

أ)عين الأعداد التالية: $\sqrt[3]{8}$ ، $\sqrt[3]{125}$ ، $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$.

ب)عين حصرا سعته 10^{-2} للعددين: $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[3]{11}$.

ج)برهن العلاقة: $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{10}$

لقد عرفنا في النشاط الثاني العدد $3^{\frac{1}{3}}$. بين أن $\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$.

حل

1) f معرفة على $[0;+\infty[$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $f'(x)=3x^2$.

من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f'(x)\geq 0$ إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$.

2) f مستمرة و متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $3\in\left[f(0);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

(لاحظ: $\left[f(0);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=[0;+\infty[$) إذن يوجد عدد حقيقي α و حيد في $[0;+\infty[$ حيث $f(\alpha)=3$ (مبرهنة القيم المتوسطة).

هذا يعني أن المعادلة $f(x)=3$ أي $x^3=3$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$.

3)

أ) $x=\sqrt[3]{8}$ معناه $x^3=8$ ومعناه $x^3=2^3$ ومعناه $x=2$ إذن $\sqrt[3]{8}=2$.

$x=\sqrt[3]{125}$ معناه $x^3=125$ ومعناه $x^3=5^3$ ومعناه $x=5$ إذن $\sqrt[3]{125}=5$.

$x=\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ معناه $x^3=\frac{8}{27}$ ومعناه $x^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3$ ومعناه $x=\frac{2}{3}$ إذن $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}$.

ب) $0,66<\sqrt[3]{2}<0,67$ و $3,66<\sqrt[3]{11}<3,67$

ج) $\begin{cases}a^3=2\\b^3=5\end{cases}$ معناه $\begin{cases}a=\sqrt[3]{2}\\b=\sqrt[3]{5}\end{cases}$ إذن $(ab)^3=10$ و منه $ab=\sqrt[3]{10}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة

أي $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{10}$.

تعريف1

نضع $a^b=e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي.

ملاحظة

يقرأ الرمز a^b: " a أس b " أو " a قوى b ".

مثال

$2^{\sqrt{3}}=e^{\sqrt{3}\ln 2}\approx 3,3219$.

تعريف2

a عدد حقيقي موجب تماما ومختلف عن 1.

تسمى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=a^x=e^{x\ln a}$: الدالة الأسية ذات الأساس a.

قواعد الحساب

من أجل كل a، b من $]0;+\infty[$ و من أجل كل x، y من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$\ln\left(a^x\right)=x\ln a \quad (1) \qquad a^xa^y=a^{x+y} \quad (2) \qquad a^{-y}=\frac{1}{a^y} \quad (3)$$

$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y} \quad (4) \qquad \left(a^x\right)^y=a^{xy} \quad (5) \qquad (ab)^x=a^xb^x \quad (6)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x} \quad (7).$$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

مبرهنة وتعريف

من أجل كل عدد حقيقي موجب a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، يوجدعدد حقيقي موجب وحيد b يحقق $b^n = a$.

يسمى b الجذر النوني للعدد a و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[n]{a}$ و تسمى الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $x \mapsto \sqrt[n]{x}$، الدالة الجذر النوني.

مثال

$\sqrt[n]{0} = 0$ ، $\sqrt[n]{1} = 1$ ، $\sqrt[3]{8} = 2$ ، $\sqrt[4]{81} = 3$ ، $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

خاصية

من أجل كل a من $[0;+\infty[$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

برهان

نعلم أن $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ و بما أن $\sqrt[n]{a}$ هو الحل الموجب الوحيد للمعادلة $x^n = a$ فإن $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

ملاحظة

نضع اصطلاحا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $0^{\frac{1}{n}} = 0$.

تطبيق 1

اختزل الكتابات التالية:

$a = 256^{\frac{1}{4}}$ $\quad b = (0,25)^{1,5}$ $\quad c = 3^{-\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}}$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

حلّ

$a = 256^{\frac{1}{4}} = \left(2^8\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{8\times\frac{1}{4}} = 2^2 = 4$.

$b = (0,25)^{-1,5} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(2^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{(-2)\left(-\frac{3}{2}\right)} = 2^3 = 8$

$c = 3^{-\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}} \times \left(3^2\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}} \times 3^{2\times\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} = 3$

تطبيق2

1)عين الدالة المشتقة للدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بـِ $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$

حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

2)أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty;-1[$ بـِ

$g(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$.

حلّ

1) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln x}$.

الدالة f_n هي مركب الدالة $x \mapsto \frac{1}{n}\ln x$ متبوعة بالدالة الأسية وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا:

$f_n'(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} e^{\frac{1}{n}\ln x} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} \times x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$. نلاحظ أن طريقة الحساب تبقى نفسها المطبقة بالنسبة لدوال القوى ذات أس صحيح.

من الواضح أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f_n'(x) > 0$ و منه فالدالة الجذر النوني متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

2) نلاحظ أن الدالة g هي مركب الدالتين $u: x \mapsto x^2 - 1$ متبوعة بالدالة f_3 . و بما أن الدالة u متناقصة تماما على $]-\infty;-1[$ و الدالة f_3 متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;-1[$.

تطبيق3

حل المعادلة والمتراجحة التاليتين:

$$3^x + 2\times 3^{-x} = 3 \quad (1) \qquad (0{,}31)^{2x} < 3 \quad (2)$$

حلّ

1) (1) تعني $3^x + \frac{2}{3^x} = 3$ أي $3^{2x} - 3\times 3^x + 2 = 0$. بوضع $X = 3^x$ نحصل على $X^2 - 3X + 2 = 0$ ذات الحلين 1 و 2. $3^x = 1$ تعني $\ln 3^x = \ln 1$ أي $x\ln 3 = 0$ و بالتالي $x = 0$.

أما $3^x = 2$ فتعني $x\ln 3 = \ln 2$ أي $x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. و منه مجموعة الحلول هي $S = \left\{0; \frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$.

3) $(0{,}31)^{2x} < 3$ تعني $\ln\left[(0{,}31)^{2x}\right] < \ln 3$ أي $2x\ln(0{,}31) < \ln 3$ و هذا يعني أن $x > \frac{\ln 3}{2\ln(0{,}31)}$ لأن $\ln(0{,}31) < 0$ و بالتالي مجموعة الحلول هي $\left]\frac{\ln 3}{2\ln(0{,}31)}; +\infty\right[$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

III. دراسة الدوال $x \mapsto a^x$ و $x \mapsto \sqrt[n]{x}$:

تغيرات الدالة $x \mapsto a^x$ و تمثيلها البياني

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و مختلف عن 1 و من أجل x من $\mathbb{R}$: $f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$.

أ)حساب الدالة المشتقة:

الدالة f_a قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$f_a'(x) = \ln a \times e^{x \ln a} = (\ln a) a^x$.

ب) إشارة الدالة المشتقة f_a' و اتجاه تغير f_a :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $a^x > 0$ و بالتالي فإشارة $f_a'(x)$ من نفس إشارة $\ln a$. و منه النتائج التالية:

* إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\ln a < 0$ و منه الدالة f_a متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

* إذا كان $a > 1$ فإن $\ln a > 0$ و منه الدالة f_a متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ج)حساب النهايات:

نميز حالتين حسب إشارة $\ln a$.

- إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln a = +\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ نستنتج أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f_a(x) = +\infty$

* إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln a = -\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ نستنتج أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = 0$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

* إذا كان $a>1$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$

نستنتج أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)=0$

- * إذا كان $a>1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$

نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)=+\infty$

د)جدول التغيرات

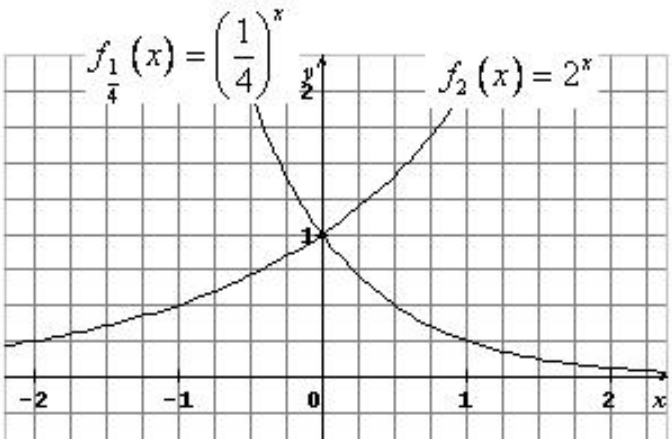
$0<a<1$

x	$-\infty$	0	a	1	$+\infty$
$f_a(x)$	$+\infty$	↘	1	↘	0

$a>1$

x	$-\infty$	0	1	a	$+\infty$
$f_a(x)$	0	↗			$+\infty$

هـ)التمثيل البياني



http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

تغيرات الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ و تمثيلها البياني

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، ومن أجل x من $[0;+\infty[$ ،

$g_n(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$.

أ)حساب الدالة المشتقة g_nو تعيين إشارتها و اتجاه تغير g_n :

g_n قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ و $g'_n(x)=\frac{1}{n}\times x^{\frac{1}{n}-1}$ و منه

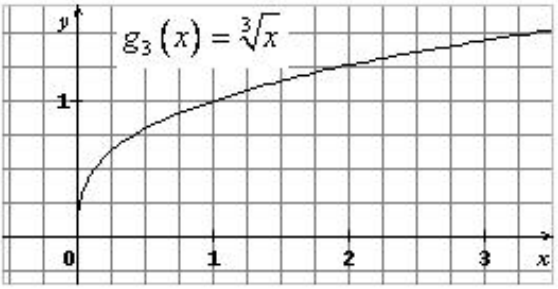
$g'_n(x)>0$. إذن g_n متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

ب)النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln x}=+\infty$

ب)جدول تغيرات g_n :

x	0		$+\infty$
$g'_n(x)$	‖	$+$	
$g_n(x)$	0	↗	$+\infty$

ج)التمثيل البياني:



http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

تطبيق1

1) أرسم في معلم متعامد و متجانس المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين على التوالي للدالتين f و g حيث:

$$f(x)=4^x \quad \text{و} \quad g(x)=(0,25)^x$$

2) بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب $(y'y)$.

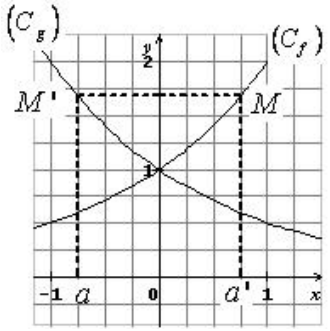
طريقة

لإثبات أن المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى $(y'y)$ يمكننا أن نبين أن:

$g(-x)=f(x)$ أو $f(-x)=g(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

حلّ

1) الدالتان f و g معرفتان على $\mathbb{R}$.



الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

2) من أجل كل a من $\mathbb{R}$ لدينا:

$g(-a)=(0,25)^{-a}=e^{-a\ln(0,25)}$ و منه

$g(-a)=e^{-a\ln\frac{1}{4}}=e^{a\ln 4}=4^a$. إذن $g(-a)=g(a)$. و منه (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى $(y'y)$.

جميع الحقوق محفوظة ©

تطبيق2

أكتب العبارات التالية بواسطة أس ناطق.

$f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$ (1) $g(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+1}$ (2)

$h(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+1}}$ (3)

حلّ

1) $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}=(x-1)(x-1)^{\frac{1}{2}}=(x-1)^{1+\frac{1}{2}}=(x-1)^{\frac{3}{2}}$

2) $g(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+1}=\left(x^2+2x+1\right)^{\frac{1}{3}}=\left[(x+1)^2\right]^{\frac{1}{3}}=(x+1)^{2\times\frac{1}{3}}=(x+1)^{\frac{2}{3}}$

3) $h(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+1}}=\dfrac{x+1}{(x+1)^{\frac{1}{4}}}=(x+1)(x+1)^{-\frac{1}{4}}=(x+1)^{1-\frac{1}{4}}=(x+1)^{\frac{3}{4}}$

تطبيق3

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$\sqrt[3]{x}=4$ (1) $\sqrt[5]{x+1}\le 2$ (2)

حلّ

1) مجموعة تعريف (1) هي $[0;+\infty[$.

من أجل كل x من $[0;+\infty[$، (1) تعني $x=4^3$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\{4^3\}$.

2) مجموعة تعريف (2) هي $[-1;+\infty[$.

من أجل كل x من $[-1;+\infty[$، (2) تعني $x+1\le 2^5$ أي $x\le 2^5-1$ و بالتالي $x\le 31$. مجموعة الحلول هي إذن: $S=[-1;31]$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

IV. التزايد المقارن:

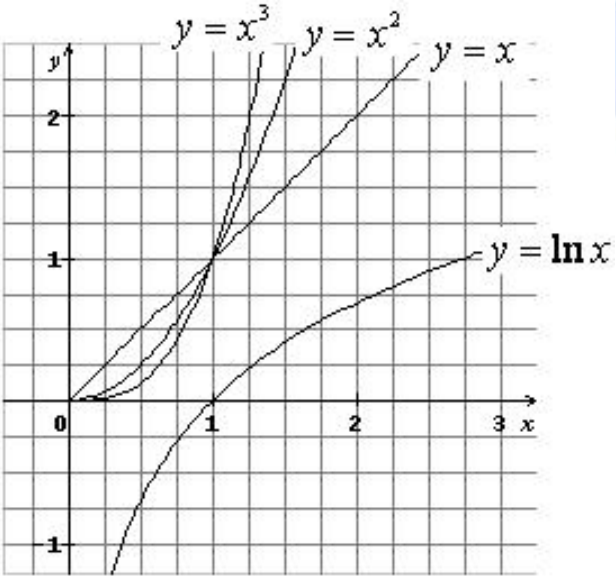
نشاط

1) باستعمال حاسبة بيانية أو برمجية مناسبة خمن على المجال $]0;+\infty[$ الأوضاع النسبية للمنحني الممثل للدالة $x \mapsto \ln(x)$ بالنسبة لمنحنيات الدوال: $x \mapsto x$ ، $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto x^3$ ثم قارن بين $\ln x$ و x^n من أجل $n=1$ ، $n=2$ و $n=3$.

2) باستعمال حاسبة بيانية خمن على المجال $]0;+\infty[$ الأوضاع النسبية للمنحني الممثل للدالة $x \mapsto e^x$ بالنسبة لمنحنيات الدوال $x \mapsto x$ و $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto x^3$ ثم قارن بين e^x و x^n من أجل $n=1$ و $n=2$ و $n=3$.

حلّ

1)



http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

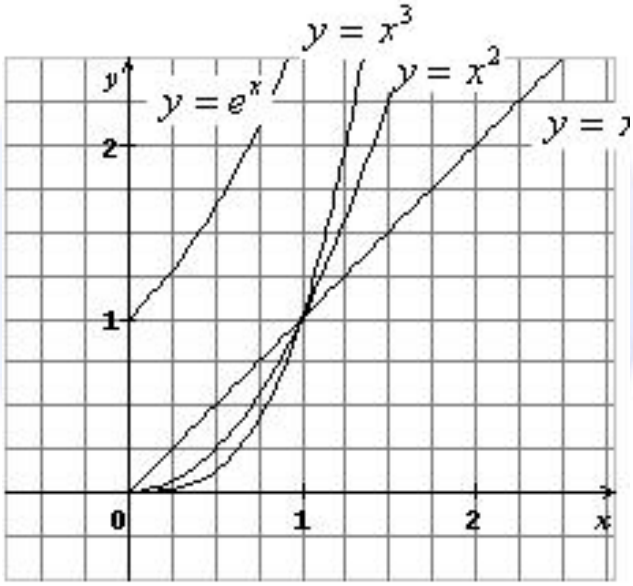
- مخمنة:

من أجل كل x من $]1;+\infty[$: التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(x)$ يقع تحت منحنيات الدوال: $x \mapsto x$ ، $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto x^3$

- و نلاحظ أن من أجل كل x من $]1;+\infty[$ لدينا :

$$\ln(x) \leq x \leq x^2 \leq x^3$$

(2



- مخمنة:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^x$ يقع فوق منحنيات الدوال $x \mapsto x$ ، $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto x^3$

- و نلاحظ أن من أجل كل x من $]1;+\infty[$ لدينا : $x \leq x^2 \leq x^3 \leq e^x$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto x$

مبرهنة

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad (1) \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad (2)$$

برهان

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

لدينا من أجل كل x من $[0;+\infty[$،

$f'(x) = e^x - x$ و $f''(x) = e^x - 1$. بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f''(x) \geq 0$ فإن الدالة f' متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و علما أن $f'(0) = 1$ فإن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x) \geq 0$ و منه فالدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و علما أن $f(0) = 1$ فإن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f(x) \geq 0$. نستنتج أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $e^x - \frac{x^2}{2} \geq 0$ و بالتالي فإن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$. باستعمال النهايات بالمقارنة و علما أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ كما نستنتج أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

2) نضع $X = -x$. إذن $\lim_{x\to-\infty} X = +\infty$ و منه:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{X\to+\infty} -Xe^{-X} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{X}{e^X} = 0$$

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x$

مبرهنة

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (1) \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to 0} x \ln x = 0 \quad (2)$$

برهان

1) من أجل $x > 0$ نضع $X = \ln x$ و منه $x = e^X$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ و

بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$

2) نضع $X = \frac{1}{x}$ و منه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} X = +\infty$ و بالتالي

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$$

التزايد المقارن مع الدالة $x \mapsto x^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

مبرهنة (نقبلها بدون برهان)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (1) \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (3) \qquad \lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0 \quad (4)$$

ملاحظة

عند اللانهاية تتفوق الدالة الأسية على الدالة قوة و تتفوق الدالة قوة على الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

مثال

لدينا الدالة $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{10} e^x = 0$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^{10} = +\infty \end{cases}$

والدالة $x \mapsto e^x$ تتفوق على الدالة $x \mapsto x^{10}$

http://www.onefd.edu.dz

تطبيق1

أحسب النهايتين التاليتين:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^x$

طريقة

لرفع حالات عدم التعيين يمكننا استعمال النهايتين:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$.

حلّ

1) لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و من تم $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2xe^x-e^x\right)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

تطبيق2

أحسب النهايتين التاليتين:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to0}(x+2)\ln x$

طريقة: لرفع حالات عدم التعيين يمكننا استعمال النهايتين:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$.

حلّ

1) لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و من تم $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-\dfrac{\ln x}{x}\right]=1$.

2) $\lim\limits_{x\to0}(x+2)\ln x=\lim\limits_{x\to0}\left(x\ln x+2\ln x\right)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ و $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

تطبيق3

أحسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{x^2+x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{2x^2-x+3}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+2x-1\right)e^x$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+x\right)\ln x$

حلّ

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}2\dfrac{e^x}{x^2}\times\dfrac{x^2}{x^2+x+1}=+\infty$ لأن

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+x+1}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{2x^2-x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\times\dfrac{x^2}{2x^2-x+3}=0$ لأن

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2x^2-x+3}=\dfrac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+2x-1\right)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3e^x+2xe^x-e^x\right)=0$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

4) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+x\right)\ln x=\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\ln x+x\ln x\right)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln x=0$.

تطبيق4

أحسب النهاية التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2x-1)e^x-3e^{2x}\right]$.

حلّ

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(2x-1)e^x-3e^{2x}\right]=\lim_{x\to+\infty}e^{2x}\left(2\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}-3\right)=-\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

V. ملخص:

1) اللوغاريتم للأساس a

a عدد حقيقي موجب تماما و $a \neq 1$.

اللوغاريتم للأساس a للعدد الحقيق الموجب تماما x هو العدد الحقيقي $\log_\alpha x$ و $\log_\alpha x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

2) قوى عدد حقيقي موجب تماما

a. من أجل كل عددين حقيقيين a و x حيث $a > 0$ و $a \neq 1$ لدينا: $a^x = e^{x \ln a}$.

b. $n \in \mathbb{N}^*$ و $a \in \mathbb{R}^+$.

يوجد عدد حقيقي موجب وحيد x حيث $x^n = a$.

x هو الجذر النوني لـــ: a و نكتب $\sqrt[n]{a} = x$.

مثلا $4^3 = 64$ معناه $\sqrt[3]{64} = 4$.

c. $n \in \mathbb{N}^*$ و $a \in \mathbb{R}^+$. لدينا $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

مثلا $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ ، $\sqrt[5]{7} = 7^{\frac{1}{5}}$ و $8^{\frac{1}{3}} = 2$ لأن $2^3 = 8$.

3) التزايد المقارن

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0$$

نقول أن الدالة الأسية تتفوق على الدالة قوة و الدالة قوة تتفوق على الدالة اللوغارتمية.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

VI. توظيف المعارف:

أ. تمارين

1.

f هي دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{3}}+3$

حيث a و b عددان حقيقيان.

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;I,J)$ حيث وحدتا الطول هما $1cm$ على محور الفواصل و $5cm$ على محور التراتيب.

1) احسب $f'(x)$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$.

2) عين a و b علما أن الدالة f تقبل قيمة حدية عند 4 و أن النقطة $A(0;2)$ تنتمي إلى المنحني (C).

3) نفرض في ما يأتي $a=1$ و $b=-1$. لدينا إذن:

من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x)=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3$

أ) ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$. استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب) حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ).

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

د) أملء الجدول الموالي (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$									

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

هـــ) أرسم المستقيم المقارب (Δ) و المنحني (C).

4) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $F(x)=(-3x-6)e^{-\frac{x}{3}}$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

5) احسب المساحة A للسطح المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=1$ و $y=3$.

.2

ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

نهدف إلى تعيين (إن وجدت) نقط المنحني (Γ) الأقرب من المبدأ O.

1) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة:

$$g(x)=x^2+\ln x$$

أ1)عين نهايتي الدالة g عند 0 و عند $+\infty$.

أ2)ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

أ3)بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

عين قيمة مقربة للعدد α.

أ4)حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

2) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة:

$$f(x)=x^2+(\ln x)^2$$

3) أدرس تغيرات الدالة f . حل المسألة المطروحة.

http://www.onefd.edu.dz

.3

مقارنة العددين الطبيعيين n^{n+1} و $(n+1)^n$ حيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1,2\}$.

1) علما أن التعامل مع القوى غالبا ما يتطلب إدخال اللوغاريتم بين أن:

$$n^{n+1} > (n+1)^n \quad \text{يعني} \quad \frac{\ln(n)}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

2)اختر دالة مناسبة يمكن أن تسمح دراسة اتجاه تغيراتها من المقارنة بين العددين $\frac{\ln(n)}{n}$ و $\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ أدرس تغيرات هذه الدالة ثم استنتج.

.4

نعتبر الدالة f_α المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad \text{حيث} \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$

1)ماذا يمكن القول عن الدالة f_α في حالة $\alpha = 0$ ؟ في حالة $\alpha = 1$ ؟

في ما يلي نفرض $\alpha \neq 0$ و $\alpha \neq 1$.

2) أدرس نهايتي الدالة f_α عند 0 وعند $+\infty$. نميز الحالتين: $\alpha < 0$ و $\alpha > 0$.

3) بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

4) نفرض $\alpha < 0$

أ) احسب $f_\alpha(1)$ و $f_\alpha(e)$.

أدرس اتجاه تغير الدالة f_α ثم شكل جدول تغيراتها.

ب)أرسم (C_α) التمثيل البياني للدالة f_α في الحالات التالية:

$\alpha = -2$ ، $\alpha = -1$ ، $\alpha = -\frac{1}{2}$ ، $\alpha = -0,3$.

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

5) نفرض $\alpha > 0$ و نعتبر الدالة g_α المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$g_\alpha(0) = 0$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $g_\alpha(x) = f_\alpha(x)$.

أ1) بين أن الدالة g_α مستمرة عند 0.

أ2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة g_α عند 0. نميز الحالتين: $0 < \alpha < 1$ و $\alpha > 1$.

أ3) ادرس اتجاه تغير الدالة g_α ثم شكل جدول تغيراتها.

أ4) ارسم (Γ_α) التمثيل البياني للدالة g_α على المجال في الحالات التالية:

$\alpha = 0,3$ ، $\alpha = 0,5$ ، $\alpha = 1,5$ ، $\alpha = 2$.

.5

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = x^2 e^{-2x}$

1)احسب f' مشتقة الدالة f.

استنتج اتجاه تغير الدالة f.

2) أ) ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$.

ب) ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ (استعمل النتيجة $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$)

3) أ)اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f في نقطته ذات الفاصلة0 .

ب) أنشئ $(\mathcal{C})$في المستوي المنسوب على معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الوحدة: $5cm$ على محور الفواصل و $10cm$ على محور التراتيب.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ب. حلول التمارين

1.

1)حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(-ax+3a-b)e^{-\frac{x}{3}} \text{ أي } f'(x)=ae^{-\frac{x}{3}}+(ax+b)\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\right)$$

2)تعيين a و b :

$A(0;2)\in(C)$ و f تقبل قيمة حدية عند $f'(4)=0$ 4 معناه

$$\begin{cases}f(0)=2\\f'(4)=0\end{cases} \text{ أي } \begin{cases}b+3=0\\\frac{1}{3}(-4a+3a-b)e^{-\frac{4}{3}}=0\end{cases} \text{ أي } \begin{cases}b+3=0\\-a-b=0\end{cases}$$

نستنتج أن $\begin{cases}b=-3\\a=3\end{cases}$ إذن $f(x)=(3x-3)e^{-\frac{x}{3}}+3$.

3) أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$f(x)=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3=xe^{-\frac{x}{3}}-e^{-\frac{x}{3}}+3=-3\left(-\frac{x}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}-e^{-\frac{x}{3}}+3$$

نضع $t=-\frac{x}{3}$ إذن $t\to-\infty$ عندما $x\to+\infty$

نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to-\infty}(-3te^t-e^t+3)=3$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0\\\lim\limits_{t\to-\infty}te^t=0\end{cases}$

المستقيم المقارب (Δ):

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ إذن (C) يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y=3$.

ب)وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ):

$f(x)-3=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}$.

إذا كان $x<1$: يكون $f(x)-3<0$ إذن (C) تحت (Δ).

إذا كان $x>1$: يكون $f(x)-3\geq 0$ إذن (C) فوق (Δ).

http://www.

و لاحظ أن (Δ) يقطع (C) في النقطة $M_0(1;3)$.

ج)اتجاه تغير f :

من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{1}{3}(-x+4)e^{-\frac{x}{3}}$.

- $f'(x)\le 0$ يكافئ $x\in[4;+\infty[$ إذن f متزايدة على $]4;+\infty[$.
- $f'(x)\le 0$ يكافئ $x\in[0;4]$ إذن f متناقصة على $]0;4]$.

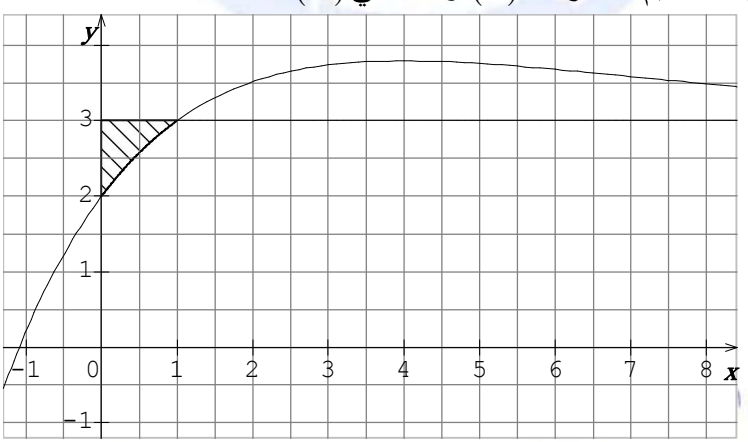
جدول تغيرات f :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$3e^{-\frac{4}{3}}+3$	↗	0

د) جدول قيم

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2	3	3,51	3,74	3,79	3,76	3,68	3,58	3,49

هـــ) رسم المستقيم المقارب (Δ) و المنحني (C)



4) F دالة أصلية للدالة f :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $F'(x)=-3e^{-\frac{x}{3}}+(-3x-6)\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}$

أي $F'(x)=-3e^{-\frac{x}{3}}+(x+2)e^{-\frac{x}{3}}$ أي $F'(x)=(-3+x+2)e^{-\frac{x}{3}}$

أي $F'(x)=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}$ أي $F'(x)=f(x)$ إذن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

5) حساب المساحة A :

لاحظ أن في المجال $[0;1]$ المستقيم (Δ) يقع فوق (C) إذن

و منه $A=\int_0^1\left[3-f(x)\right]dx=\int_0^1-f(x)\,dx=-\int_0^1 f(x)\,dx$

$A=-\left[F(x)\right]_0^1=-\left[F(x)\right]_0^1=-F(1)+F(0)$

أي $A=9e^{-\frac{1}{3}}-6$ $u.a$ و $A\simeq 0,449$ $u.a$.

2.

1) أ1) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}g(x)$: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}g(x)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x^2=0\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty\end{cases}$.

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$.

أ2) تغيرات g :

من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=2x+\frac{1}{x}$ إذن $g'(x)>0$ ، نستنتج أن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات g :

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

أ3) المعادلة $g(x)=0$ ...

بمأن g مستمرة و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و $0\in\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \gt}} g(x);\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[$

(لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \gt}} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$) فإن المعادلة $g(x)=0$

تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ (حسب مبرهنة القيم المتوسطة).

قيمة مقربة للعدد α : نلاحظ $f(0,66)>0$ و $f(0,65)<0$ إذن $\alpha\simeq 0,6$.

أ4) إشارة g :

g مستمرة و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و $g(\alpha)=0$ (انظر جدول تغيرات g)

إذن: من أجل كل x من $]0;\alpha[$ لدينا $g(x)\le 0$ و من أجل كل x من $]\alpha;+\infty[$ لدينا $g(x)\ge 0$.

2)تغيرات f

- f معرفة على $]0;+\infty[$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \gt}} f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \gt}} x^2=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \gt}} (\ln x)^2=+\infty\end{cases}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2=+\infty\end{cases}$.

- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=2x+\dfrac{2}{x}\ln x$

أي $f'(x)=\dfrac{2x^2+2\ln x}{x}$ أي $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x}$

- و x عدد موجب إذن إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$ (انظر السؤال 1-أ4)).

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\alpha^4+\alpha^2$	↗	$+\infty$

$M(x;y)\in(\Gamma)$ معناه $y=\ln x$ ، لدينا عندئذ $OM^2=x^2+(\ln x)^2$

أي $OM^2=f(x)$.

المسافة OM أصغر ما يمكن يعني $f(x)$ أصغر ما يمكن.

يكون $f(x)$ أصغر ما يمكن من أجل $x=\alpha$ علما أن $f(\alpha)=\alpha^4+\alpha^2$.

من بين نقط M من (Γ)، $M_0(\alpha;\alpha^4+\alpha^2)$ هي الأقرب من O .

3.

1) $n^{n+1}>(n+1)^n$ يكافئ $Ln(n)^{n+1}>Ln(n+1)^n$

أي $(n+1)Ln(n)>nLn(n+1)$.

العددان الطبيعيان n و $n+1$ موجبان تماما إذن:

$\dfrac{\ln(n)}{n}>\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

2) نعتبر الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ: $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$

التي تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و: $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln(x)}{x^2}$

أي $f'(x)=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.

$f'(x)\geq 0$ يكافئ $1-\ln(x)\geq 0$ أي $\ln(x)\leq 1$ أي $x\in]0;e]$

و $f'(x)\leq 0$ يكافئ $x\in[e;+\infty[$.

نستنتج أن f متناقصة على $]e;+\infty[$، إذن من أجل كل n و $n+1$ من $]e;+\infty[$ لدينا $f(n)>f(n+1)$ أي $\dfrac{\ln(n)}{n}>\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$

(لأن $n<n+1$).

لدينا عندئذ، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 3$ أي

$n\in\mathbb{N}^*-\{1;2\}$: $\dfrac{\ln(n)}{n}>\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$.

4.

1) في الحالة $\alpha=0$: من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $f_0(x)=1$.

f_0 دالة ثابتة.

في الحالة $\alpha=1$: من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $f_1(x)=1$.

f_1 دالة خطية.

2) $f_\alpha(x)=e^{\alpha\ln x}$

من أجل $\alpha>0$:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f_\alpha(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to 0} \alpha\ln x=-\infty$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty} \alpha \ln x = +\infty$.

من أجل $\alpha < 0$:

$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f_\alpha(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\xrightarrow{>}0} \alpha \ln x = +\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$ لأن $\lim_{x\to+\infty} \alpha \ln x = -\infty$.

3)من أجل x من $]0;+\infty[$ لدينا:

$f_\alpha'(x) = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln x}$ أي $f_\alpha'(x) = \alpha \frac{1}{x} \times x^\alpha$ أي $f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

4) أ) • $f_\alpha(1) = e^{\alpha \ln 1} = 1$ و $f_\alpha(e) = e^{\alpha \ln e} = e^\alpha$.

• $f_\alpha'(x) = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln x}$. لدينا $x \in]0;+\infty[$ و $\alpha < 0$ إذن $f_\alpha'(x) < 0$ و منه f_α متناقصة على $]0;+\infty[$.

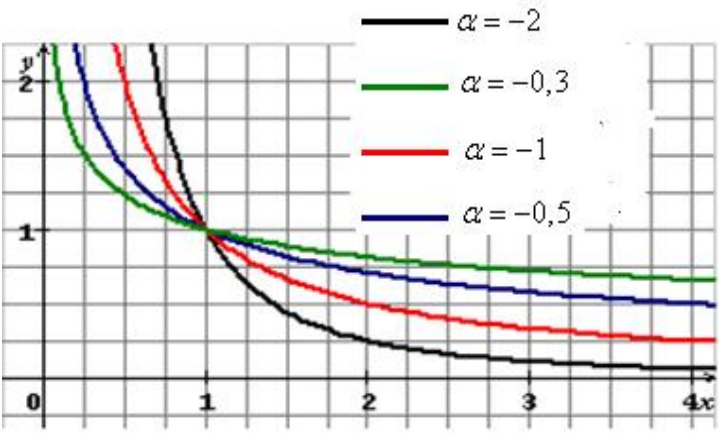
• نعلم أن $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f_\alpha(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$ عندما $\alpha < 0$.
(انظر السؤال الثاني).

• جدول تغيرات f_α :

x	0		1		e		$+\infty$
$f_\alpha'(x)$	‖	$-$		$-$		$-$	
$f_\alpha(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↘	e^α	↘	0

ب) لاحظ أن (C_α) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x = 0$ و مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$.

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة



5)

أ1) $g_a(0)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ >}} g_a(x)=\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ >}} e^{\alpha\ln x}=0$ إذن g_a مستمرة عند0 من اليمين.

أ2) $\lim\limits_{\substack{h\longrightarrow 0\\ >}} \dfrac{g_a(0+h)-g_a(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\longrightarrow 0\\ >}} \dfrac{g_a(h)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\longrightarrow 0\\ >}} \dfrac{h^{\alpha}}{h}=\lim\limits_{\substack{h\longrightarrow 0\\ >}} h^{\alpha-1}$

أي $\lim\limits_{\substack{h\longrightarrow 0\\ >}} \dfrac{g_a(0+h)-g_a(0)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\longrightarrow 0\\ >}} e^{(\alpha-1)\ln h}$

- إذا كان $\alpha>1$ أي إذا كان $\alpha-1>0$:

إذن $\lim\limits_{\substack{h\longrightarrow 0\\ >}} e^{(\alpha-1)\ln h}=0$ لأن $\lim\limits_{\substack{h\longrightarrow 0\\ >}} (\alpha-1)\ln h=-\infty$

و منه g_{α} تقبل الاشتقاق عند عند0 من اليمين.

- إذا كان $0<\alpha<1$ يكون $\alpha-1<0$:

إذن $\lim\limits_{\substack{h\longrightarrow 0\\ >}} e^{(\alpha-1)\ln h}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{\substack{h\longrightarrow 0\\ >}} (\alpha-1)\ln h=+\infty$

و منه g_a لاتقبل الاشتقاق عند عند0 من اليمين.

أ3) • $x\in[0;+\infty[$ لدينا . $g_{\alpha}'(x)=\alpha\dfrac{1}{x}e^{\alpha\ln x}$ و $\alpha>0$ إذن

$g_{\alpha}'(x)>0$ و منه f_{α} متزايدة على $[0;+\infty[$. $x\in[0;+\infty[$

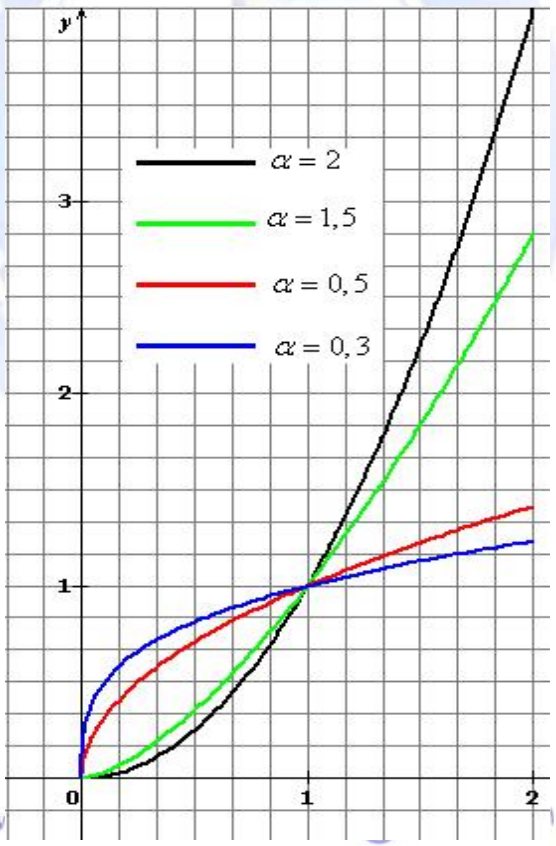
http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

• نعلم أن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g_\alpha(x) = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g_\alpha(x) = +\infty$ عندما $\alpha > 0$.
(انظر السؤال الثاني).

•جدول تغيرات g_α

x	0		1		e		$+\infty$
$g_\alpha'(x)$	‖	$+$		$+$		$+$	
$g_\alpha(x)$	‖ 0	↗	1	↗	e^α	↗	$+\infty$

أ4)



http://www جميع

.5

1)حساب $f'(x)$:

$f'(x) = 2xe^{-2x} + x^2\left(-2e^{-2x}\right)$ أي $f'(x) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x}$

أي $f'(x) = 2\left(-x^2 + x\right)e^{-2x}$.

اتجاه تغير الدالة f :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $2e^{-2x} > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $-x^2 + x$. نستنتج الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

نستنتج أن:

- f متزايدة على المجال $[0;1]$.
- f متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ و على المجال $[1;+\infty[$.

2) أ)حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty \end{cases}$.

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\left(e^x\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)}\right]^2$$

جميع الحقوق محفوظة ©

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

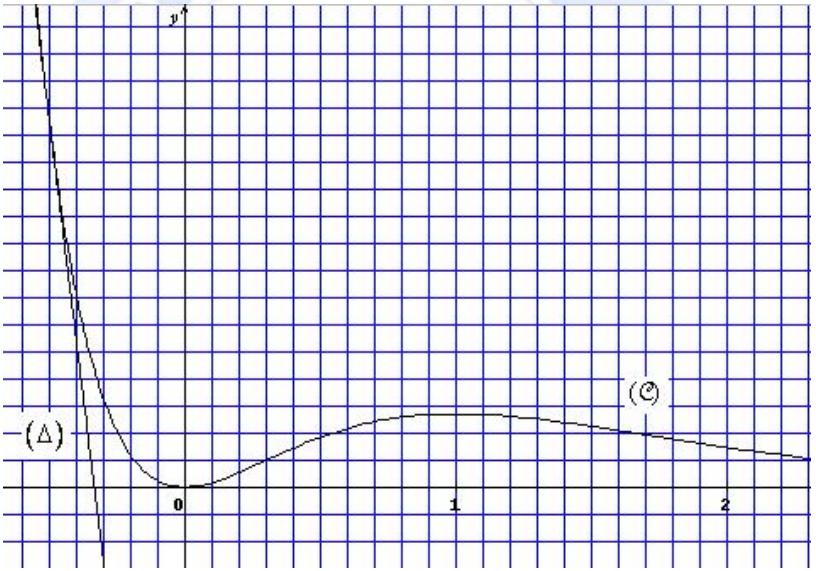
3)أ)معادلة (Δ):

$y=f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ أي $y=-\dfrac{3e}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{e}{4}$

أي $y=-\dfrac{3e}{2}x-\dfrac{e}{2}$ أي $y=-\dfrac{e}{2}(3x+1)$.

ب)إنشاء $(\mathcal{C})$

إذن $(\mathcal{C})$ يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.



http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

VII. تقويم ذاتي:

أ. اختيار من متعدد

لكل سؤال عدة اقتراحات يمكن أن تكون صحيحة، عينها مع تعليل جوابك

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=x2^{-x}$ ، و (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

س1.

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ؛ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

س2. من اجل كل عدد حقيقي x:

أ) $f'(x)=(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$ ؛ ب) $f'(x)=(1-x)2^{-x}$

ج) $f'(x)=(1-x\ln 2)2^{-x}$.

س3.

أ) من اجل كل عدد حقيقي سالب x : $f(x)\le\frac{3}{4}$

ب) المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبلين حلين فقط.

ج) يقع المماس T للمنحني (Γ) عند النقطة التي فاصلتها 0 فوق المنحني (Γ)

س4. g هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=\ln f(x)$

أ) من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ ، $g(x)<0$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

ج) الدالة g متناقصة على المجال $]0;+\infty[$.

http://www.onefd.edu.dz

ب. صحيح أم خاطئ

1. اذكر إن كانت النهايات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير جوابك.

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=(-x+3)e^{-x}$

أ1) من أجل كل $x>0$ ، $f(x)\geq -x+3$.

أ2) محور الفواصل مقارب لمنحني الدالة f .

أ3) مشتقة الدالة f هي $f'(x)=(2-x)e^{-x}$.

أ4) الدالة g تقبل قيمة حدية واحدة.

أ5) المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا في المجال $[0;1]$.

2. لكل خاصية من الخواص التالية ، اذكر إن كانت صحيحة أم خاطئة معللا إجابتك.

أ1) من اجل كل عدد حقيقي x ، $\ln\left(2^x\right)=x$.

أ2) يوجد عدد حقيقي a موجب بحيث من اجل كل عدد حقيقي x $\ln\left(a^x\right)=x$.

أ3) من اجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و x، $a^{\frac{\ln x}{\ln a}}=x$.

أ4) يوجد عدد حقيقي x حيث $2^{x-1}=3$.

أ5) من اجل كل عدد حقيقي موجب x، $\sqrt[100]{x}\leq x$.

أ6) يوجد عدد حقيقي موجب x حيث $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\neq x$.

أ7) من أجل كل عددين حقيقيين x و y: $2^{x+y}=\sqrt{2^{2x}\times 2^{2y}}$.

جميع الحقوق محفوظة ©

أ. أجوبة اختيار من متعدد

- تمنح 2 نقطة لكل جواب صحيح.
- تنقص 1 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.

لا تضاف و لا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة.

س1. الاقتراح ب) صحيح لأن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x\ln 2}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x\ln 2}{e^{x\ln 2}} \times \frac{1}{\ln 2} \right)$$

نضع $t = x\ln 2$ ، لدينا $t \to +\infty$ عندما $x \to +\infty$ إذن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{e^t} \times \frac{1}{\ln 2} \right) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^t}{t}} \times \frac{1}{\ln 2} \right) = 0$$

لأن $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.

س2. الاقتراحان أ) و ج) صحيحان لأن:

$$f(x) = x\,2^{-x} = x\,e^{\ln 2^{-x}} = x\,e^{-x\ln 2} \quad \text{و} \quad f'(x) = e^{-x\ln 2} + x(-\ln 2)e^{-x\ln 2}$$

أي $f'(x) = (1 - x\ln 2)e^{-x\ln 2}$ أي $f'(x) = (1 - x\ln 2)2^{-x}$.

س3.

أ) صحيح لأن من أجل كل x من $]-\infty;0]$ لدينا $x\,2^{-x} \le 0$

إذن $x\,2^{-x} \le \frac{3}{4}$.

ب) صحيح لأن:

- $f'(x) \ge 0$ يكافئ $1 - x\ln 2 \ge 0$ أي $x \le \frac{1}{\ln 2}$ (انظر س2.)

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (انظر س1.)

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x\ln 2}=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x\ln 2}=+\infty\end{cases}$

- f مستمرة و متزايدة على $\left]-\infty;\dfrac{1}{\ln 2}\right]$ و

$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\ f\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)\right]$ أي $\dfrac{1}{2}\in\left]-\infty;\dfrac{1}{e\ln 2}\right]$.

$\left(\dfrac{1}{e\ln 2}=0,53...\right)$ إذن المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]-\infty;\dfrac{1}{\ln 2}\right]$.

- f مستمرة و متناقصة على $\left[\dfrac{1}{\ln 2};+\infty\right[$ و

$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\ f\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)\right]$ أي $\dfrac{1}{2}\in\left]0;\dfrac{1}{e\ln 2}\right]$.

- $\left(\dfrac{1}{e\ln 2}=0,53...\right)$ إذن المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[\dfrac{1}{\ln 2};+\infty\right[$.

نستنتج أن المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حلين فقط على

$\left]-\infty;\dfrac{1}{\ln 2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{\ln 2};+\infty\right[$ أي على $\mathbb{R}$.

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

ج) صحيح لأنّ:

- معادلة T : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=x$ لأن $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.

- $f(x)-x=\frac{x}{2^x}-x=x\left(\frac{1}{2^x}-1\right)=\frac{x(1-2^x)}{2^x}$.

$1-2^x\geq 0$ يكافئ $2^x\leq 1$ أي $x\leq 0$.

- إذن: من أجل $x\leq 0$ لدينا $1-2^x\geq 0$ و منه $f(x)-x\leq 0$

أي $f(x)\leq x$ ، نستنتج أن Γ تحت T .

- من أجل $x\geq 0$ لدينا $1-2^x\leq 0$ و منه $f(x)-x\leq 0$ أي

$f(x)\leq x$ ، نستنتج أن (Γ) تحت T .

س3. كل الأجوبة المقترحة خاطئة. مثال مضاد:

نفرض $g(x)=\ln\left[x(x^2+1)\right]$ و لاحظ : $f(x)=x(x^2+1)$.

g معرفة على $]0;+\infty[$.

أ) مثلا: من أجل $x>1$ يكون $x(x^2+1)>1$ و منه

$$\ln\left[x(x^2+1)\right]>0$$

أي $g(x)\geq 0$.

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}x(x^2+1)=+\infty$.

ج) لدينا $g(x)=\ln(x^3+x)$ إذن $g'(x)=\frac{3x^2+1}{x^3+x}$.

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)>0$ إذن g متزايدة على $]0;+\infty[$.

ب. أجوبة صحيح أم خاطئ

1.

- تمنح 2 نقطة لكل جواب صحيح.
- تنقص 1 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.

لا تضاف و لا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة.

أ1) خاطئ. مثال مضاد: $f(1)$ ليس أكبر من $-1+3$؛

$$\begin{cases} f(1)=\dfrac{2}{e}=0,7..... \\ -1+3=2 \end{cases}$$

أ2) خاطئ لأن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq -\infty$ و كذلك $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq +\infty$.

أ3) خاطئ لأن $f'(x)=-e^{-x}+(-x+3)(-e^{-x})$ أي $f'(x)=(x-4)e^{-x}$

أ4) صحيح لأن الدالة المشتقة تندم مرة واحد (عند 4) مغرة إشارتها.

أ5) صحيح لأن f مستمرة على $[0;1]$ و 1 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$ لأن $f(0)=3$ و $f(1)=\dfrac{2}{e}=0,7.....$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

.2

- تمنح 2 نقطة لكل جواب صحيح.
- تنقص 1 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.

لا تضاف و لا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة.

أ1) خاطئ لأن $\ln 2^x = x\ln 2$ و $\ln 2 \neq 1$.

أ2) صحيح لأن $\ln e^x = x$ ، $(a = e)$.

أ3) صحيح لأن $e^{\frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{\ln a}}\right)} = e^{\frac{\ln x}{\ln a}\times \ln a} = e^{\ln x} = x$

أ4) صحيح لأن الدالة $x \mapsto f(x) = 2^{x-1}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ إذن على كل مجال من $\mathbb{R}$ مثلا على $[1;4]$ و 3 محصور بين $f(1)$ و $f(4)$ (3 محصور بين 1 و 8).

أ5) خاطئ . مثال مضاد: من أجل $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ لدينا $\sqrt[100]{x} > x$ لأن

$$\sqrt[100]{\left(\frac{1}{2}\right)^{100}} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

أ6) خاطئ لأن $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = \left[x^{\frac{1}{3}}\right]^3 = x^{\frac{1}{3}\times 3} = x^1 = x$.

أ7) صحيح لأن $\sqrt{2^{2x}} \times \sqrt{2^{2y}} = \sqrt{\left(2^x\right)^2} \times \sqrt{\left(2^y\right)^2} = 2^x \times 2^y = 2^{x+y}$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

VIII. استعد للبكالوريا:

مسألة: (10 نقط)

جزء أول: نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة:

$$g(x)=x+1+\ln x$$

1) عين نهايتي الدالة g عند 0 و عند $+\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.

4) باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا للعدد α سعته $0,01$.

5) حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

جزء ثان: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$f(0)=0$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الأطوال هي $4cm$.

1) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

2) أ) تحقق أن $f(\alpha)=-\alpha$.

ب) ادرس تغيرات الدالة f.

3) ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ في المعلم $(O;I,J)$.

أ) ادرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C) و (Γ).

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ب) احسب النهاية: $\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x - f(x)\right]$. فسر بيانيا النتيجة. أرسم المنحنيين (C) و (Γ).

			الأسئلة	سلّم التنقيط
الجزء الأول	1)		حساب $\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$	0,5+0,5
	2)		حساب $g'(x)$ و إشارة $g'(x)$	0,5+0,5
			اتجاه تغير g و جدول تغيرات g	0,5+0,5
	3)		المعادلة $g(x)=0$	0,5
	4)		حصر للعدد α	0,5
	5)		إشارة $g(x)$	0,5
الجزء الثاني	1)		حساب $f'(x)$	0,5
	2)	أ)	$f(\alpha)=-\alpha$	0,5
		ب)	حساب $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$	0,5+0,5
			إشارة $f'(x)$	0,5
			جدول تغيرات f	0,5
	3)	أ)	الأوضاع النسبية لـــ: (C) و (Γ).	0,5
		ب)	حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x - f(x)\right]$	0,5
			تفسر النتيجة و الرسم	1+0,5

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

حل مفصل

الجزء الأول

1) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = -\infty$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (x+1) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty \end{cases}$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

2) تغيرات g

- g معرفة على المجال $]0;+\infty[$ وقابلة للاشتقاق عليه.
- من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$.
- من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x) > 0$.

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

جميع الحقوق محفوظة ©

4) المعادلة $g(x)=0$ ...

بما أن g مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ و صفر يحقق:

$$0\in\left]\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x);\lim_{x\to+\infty} g(x)\right[$$

(لأن $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$)

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة تقبل المعادلة $g(x)=0$ حلا α في المجال $]0;+\infty[$.

وبما أنّ g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإنّ الحل α وحيدا.

4) إيجاد حصرا للعدد α سعته 10^{-2}:

X	Y_1
.27	-.0393
.28	.00703
.29	.05213
.3	.09603
.31	.13882
.32	.18057

نجد باستعمال حاسبة بيانية: $0,27<\alpha<0,28$

5)إشارة g:

g مستمرة و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و $g(\alpha)=0$ (انظر جدول تغيرات g)

إذن: من أجل كل x من $]0;\alpha]$ لدينا $g(x)\le 0$ و من أجل كل x من $[\alpha;+\infty[$ لدينا $g(x)\ge 0$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

الجزء الثاني

1) حساب $f'(x)$:

مشتقة الدالة $x \mapsto x\ln x$ هي الدالة $x \mapsto \ln x + 1$

(حذار! يجب التمييز بين $\ln x + 1$ و $\ln(x+1)$).

لدينا إذن: $f'(x) = \dfrac{(\ln x + 1)(x+1) - x\ln x}{(x+1)^2}$

أي $f'(x) = \dfrac{x\ln x + \ln x + x + 1 - x\ln x}{(x+1)^2}$

أي $f'(x) = \dfrac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}$ ومنه $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

2) أ) حساب $f(\alpha)$:

$f(\alpha) = \dfrac{\alpha \ln \alpha}{\alpha + 1}$ و بما أن $g(\alpha) = 0$ أي $\alpha + 1 + \ln\alpha = 0$ أي

فإن $\ln\alpha = -\alpha - 1$ أي $f(\alpha) = \dfrac{\alpha(-\alpha - 1)}{\alpha + 1}$. $f(\alpha) = -\alpha$

ب) تغيرات f :

- f معرفة على $]0;+\infty[$.
- $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} 0} f(x) = 0$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} 0} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} 0} (x+1)^2 = 1 \end{cases}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x+1} \times \ln x\right] = +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$.

جميع الحقوق محفوظة ©

- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

و $(x+1)^2$عدد موجب إذن إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$ (انظر السؤال 5) من الجز الأول).

-

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\alpha$	↗	$+\infty$

3) أ) دراسة الأوضاع النسبية للمنحنيين (C) و (Γ)

نضع $h(x)=\ln x-f(x)$.

- لدينا عندئذ $h'(x)=\ln x-\dfrac{x\ln x}{x+1}=\left(1-\dfrac{x}{x+1}\right)\ln x$ أي $h'(x)=\dfrac{1}{x+1}\ln x$.
- ندرس إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$:

$h(x)\geq 0$ معناه $\ln x\geq 0$ و معناه $x\in[1;+\infty[$.

$h(x)\leq 0$ معناه $\ln x\leq 0$ و معناه $x\in[0;1]$.

نستنتج أن:

من أجل $x\in[1;+\infty[$: (Γ) فوق (C)

و من أجل $x\in[0;1]$: (Γ) تحت (C)

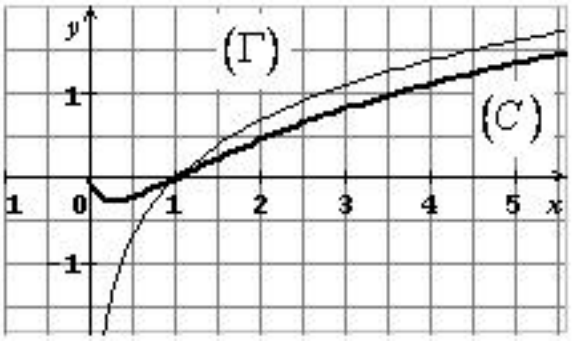
و لاحظ أن (Γ) يقطع (C) في النقطة $M_0(1;0)$.

ب)حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x-f(x)\right]$:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\end{cases}$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x-f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{x}{x+1}\right]=0$.

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x-f(x)\right]=0$ منحني (Γ) مقارب للمنحني (C).



جميع الحقوق محفوظة ©