2.الدالة الأسية

الكفاءات المستهدفة

- تعريف الدالة الأسية.
- معرفة خواص الدالة الأسية .
- استعمال حاسبة لحساب قيم دوال أسية.
- حساب نهايات تتضمن دوال أسية.
- دراسة دوال من الشكل $\exp\circ u$.

تصميم الدرس

I. تعريف- اتجاه التغير- إشارة $x\mapsto \exp(x)$

II. خواص جبرية

III.دراسة الدالة الأسية $x\mapsto \exp(x)$

IV.دراسة الدالة $\exp\circ u$

V. ملخص

VI.توظيف المعارف (تمارين + حلول وإرشادات)

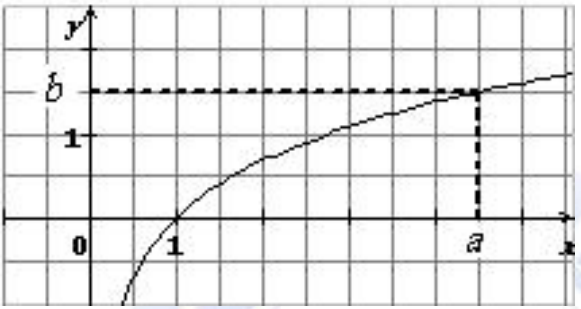
VII.تقويم ذاتي (اختيار من متعدد + صحيح أم خاطئ)

VIII. استعد للبكالوريا (مسألة محلولة مع سلّم التنقيط)

جميع الحقوق محفوظة ©

I.تعريف– اتجاه التغير– إشارة $x\mapsto \exp(x)$:

نشاط



الدالة $\ln$ مستمرة و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و لدينا:

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، من أجل كل عدد حقيقي b من $\mathbb{R}$ يوجد عدد حقيقي وحيد a من $]0;+\infty[$ بحيث $\ln(a)=b$.

بوضع $a=\exp(b)$ نكون قد عرفنا هكذا دالة جديدة.

تعريف: تسمى هذه الدالة " الدالة الأسية " و نرمز إليها بالرمز " $\exp$ ".

لدينا إذن: من أجل كل a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل b من $\mathbb{R}$:

$\ln(a)=b$ يعني $a=\exp(b)$.

1) أ) أحسب الأعداد التالية: $\exp(0)$، $\exp(1)$، $\exp(2)$.

ب) بين أن $\exp(-2)=\dfrac{1}{\exp(2)}$.

2) نعتبر في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنيين (C) و (C') الممثلين على التوالي للدالتين " $\exp$ " و" $\ln$ ".

أ) ماذا يمكن القول عن النقطتين $M_1(x;y)$ و $M_1'(y;x)$

حيث x ، y عددان حقيقيان.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

ب) b عدد حقيقي و a عدد حقيقي موجب تماما.بين أن النقطة $M(a;b)$ تنتمي إلى المنحني (C') إذا وفقط إذا كانت النقطة $M'(b;a)$ تنتمي إلى المنحني (C).

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C) و (C') ؟

ج) أرسم المنحني (C') ثم المنحني (C) في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

د) بين أن من أجل كل a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل b من $\mathbb{R}$ لدينا:

$\exp[\ln(a)]=a$ و $\ln[\exp(b)]=b$.

3) خمن اتجاه تغير الدالة " exp " على $\mathbb{R}$.

حل

1)

أ) $\exp(0)=y$ معناه $\ln y=0$ أي $y=1$ و منه $\exp(0)=1$.

$\exp(1)=y$ معناه $\ln y=1$ أي $y=e$ و منه $\exp(1)=e$.

أي $\ln y=\ln e^2$ أي $y=e^2$ و منه $\exp(2)=e^2$.

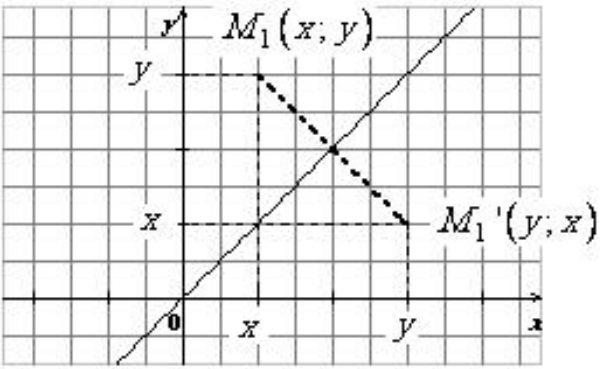
ب) $\exp(-2)=y$ معناه $\ln y=-2$ أي $-\ln y=2$ أي $\ln\left(\frac{1}{y}\right)=2$

أي $\frac{1}{y}=\exp(2)$ أي $y=\frac{1}{\exp(2)}$ ومنه $\exp(-2)=\frac{1}{\exp(2)}$.

2)

أ) $M_1(x;y)$ و $M_1'(y;x)$ متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

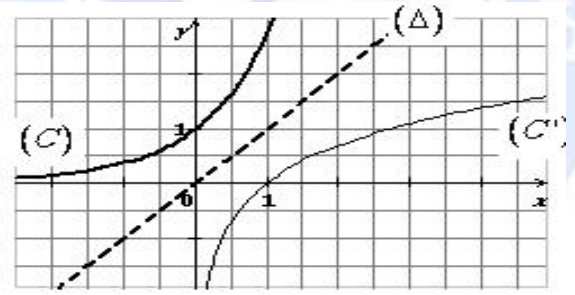
http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©



ب) $M(a;b)\in(C')$ معناه $b=\ln a$ أي $a=\exp(b)$ أي $M(a;b)\in(C')$

نستنتج أن (C)هو نظير (C')بالنسبة إلى المستقيم (Δ)الذي معادلته $y=x$.

ج) إنشاء (C) و (C') في نفس المعلم.



د) • $\exp\left[\ln(a)\right]=y$ معناه $\ln(a)=\ln(y)$ ومعناه $y=a$

إذن $\exp\left[\ln(a)\right]=a$.

• $\ln\left[\exp(b)\right]=y$ معناه $\exp(b)=\exp(y)$ ومعناه $y=b$

إذن $\ln\left[\exp(b)\right]=b$.

3) مخمنة: الدالة exp متزايدة تماما على $\mathbb{R}$(انظر التمثيل البياني).

تعريف

الدالة الأسية التي نرمز لها بالرمز " exp " هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل x من $\mathbb{R}$ العدد الحقيقي الموجب تماما y حيث $x=\ln(y)$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $]0;+\infty[$، $y=\exp(x)$ يعني $x=\ln(y)$.

الترميز e^x

- نرمز اصطلاحا، من أجل كل عدد حقيقي x ، إلى $\exp(x)$ بالرمز e^x.
- ونكتب، من أجل كل عدد حقيقي x ، $\exp(x)=e^x$ ونقرأ الرمز e^x : " أسية x ".

خاصية

من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\ln(e^n)=n$

برهان

من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا: $\ln(e^n)=n\ln(e)=n$

نستنتج إذن حسب التعريف أعلاه أنّ $\exp(n)=e^n$ وذلك من أجل كل عدد صحيح نسبي n .

توضيح: توصلنا إلى هذا الاستنتاج بوضع $e^n=y$ و $n=x$

جميع الحقوق محفوظة ©

خواص للدالة الأسية

من التعريف و باستعمال الترميز e^x نستنتج الخواص التالية:

(1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^x > 0$.

(2) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $]0;+\infty[$، $y = e^x$ يعني $x = \ln(y)$.

(3) من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\ln(e^x) = x$.

(4) من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $e^{\ln(x)} = x$.

أمثلة

$\ln(1) = 0$ إذن $e^0 = 1$؛ $\ln(e) = 1$ إذن $e^1 = e$.

خواص أخرى

من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا:

- $e^a = e^b$ يعني $a = b$.
- $e^a < e^b$ يعني $a < b$.

برهان

$e^a = e^b$ يعني $\ln(e^a) = \ln(e^b)$ أي $a = b$.

$e^a < e^b$ يعني $\ln(e^a) < \ln(e^b)$ أي $a < b$.

مبرهنة

الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ملاحظة: هذه المبرهنة هي نتيجة مباشرة للخاصية السابقة

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

تطبيق1

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$e^{x^2+3x-3}=e^{2x-1}$ (1) و $e^{5x+3}>e^{3x-1}$ (2)

حل

طريقة: $e^{u(x)}=e^{v(x)}$ تعني $u(x)=v(x)$.

$e^{u(x)}>e^{v(x)}$ تعني $u(x)>v(x)$.

(1) تعني $x^2+3x-3=2x-1$ أي $x^2+x-2=0$ و لهذه المعادلة الأخيرة حلان هما 1 و -2.

(2) تعني $5x+3>3x-1$ أي $x>-2$. مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن $S=]-2;+\infty[$.

تطبيق2

حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$e^{2x-1}=3$ (1) $e^{x+2}\geq -5$ (2) $e^{x+2}\geq 3$ (3)

حل

طريقة: $e^{u(x)}=\lambda$ حيث $\lambda>0$ معناه $u(x)=\ln(\lambda)$.

$e^{u(x)}\geq\lambda$ حيث $\lambda>0$ معناه $u(x)\geq\ln(\lambda)$.

- (1) تعني $2x-1=\ln 3$ أي $x=\dfrac{1+\ln 3}{2}$.
- من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{x+2}>0$ و منه $e^{x+2}>-5$. مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن $S=\mathbb{R}$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

- (3) تعني $x+2\geq \ln 3$ أي $x\geq \ln(3)-2$. مجموعة الحلول هي إذن $S=\left[\ln(3)-2;+\infty\right[$.

تطبيق3

حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$(1)\ \ln(2x-1)=2$ و $(2)\ \ln(2x-1)\leq 2$

حل

طريقة

- لحل المعادلة $\ln\left[u(x)\right]=\lambda$ نتبع الخطوات التالية:

أولا: نعين المجموعة D_1 للأعداد الحقيقية التي تكون من أجلها الدالة u معرفة.

ثانيا: نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة مع $u(x)>0$ ولتكن D_2 مجموعة حلولها.

ثالثا: نعيّن المجموعة D حيث $D=D_1\cap D_2$

رابعا: نحل في المجموعة D المعادلة $u(x)=e^{\lambda}$.

- لحل المتراجحة $\ln\left[u(x)\right]\leq\lambda$ نتبع نفس الخطوات الأربعة السابقة مع تعديل في الخطوة الرابعة حيث نقوم بحل المتراجحة $u(x)\leq e^{\lambda}$ بدل المعادلة $u(x)=e^{\lambda}$.

- نقوم الآن بحل المعادلة $(1)\ \ln(2x-1)=2$

— $D_1=\mathbb{R}$

— D_2 هي مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث $2x-1>0$ أي $x>\frac{1}{2}$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

و منه $D_2 = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

ــ ومنه $D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{R} \cap \left]\frac{1}{2};+\infty\right[= \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

ــ نحل الآن المعادلة $2x-1=e^2$

من أجل كل x من D ، (1) تعني $2x-1=e^2$ أي $x=\frac{e^2+1}{2}$.

إذن المعادلة (1) تقبل حلا وحيدا هو $\frac{e^2+1}{2}$.

- نقوم الآن بحل المتراجحة (2) $\ln(2x-1)\le 2$

ــ المراحل الثلاثة الأولى هي نفسها بالنسبة للمعادلة لذلك فإنّ

$$D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{R} \cap \left]\frac{1}{2};+\infty\right[= \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

ــ من أجل كل x من D ، (2) تعني $2x-1\le e^2$ أي $x\le\frac{e^2+1}{2}$.

الحلول المتراجحة (2) هي إذن $S = \left]\frac{1}{2};\frac{e^2+1}{2}\right]$.

تطبيق4

(u_n) متتالية حسابية أساسها r .

(v_n) متتالية هندسية أساسها q و $q\neq 0$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $\alpha_n = e^{u_n}$ و $\beta_n = \ln|v_n|$.

1) عين طبيعة المتتالية (α_n) ، ثمّ اكتب حدّها العام.

2) عين طبيعة المتتالية (β_n) ، ثمّ اكتب حدّها العام.

3) احسب المجموع $S_\alpha = e^{u_0}+e^{u_1}+\ldots+e^{u_n}$ بدلالة α_0 و n و r .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

حل

1) من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n+r$

إذن $\alpha_{n+1}=e^{u_{n+1}}=e^{u_n+r}$

ومنه $\alpha_{n+1}=e^{u_n}\times e^r=\alpha_n\times e^r$

وهذا يعني أنّ (α_n) متتالية هندسية أساسها e^r.

* كتابة الحد العام

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $\alpha_n=\alpha_0\times e^r$

2) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=v_n\times q$

إذن $\beta_{n+1}=\ln|v_{n+1}|=\ln|v_n\times q|$

ومنه $\beta_{n+1}=\ln|v_n|+\ln|q|=\beta_n+\ln|q|$

و منه (β_n) متتالية حسابية أساسها $\ln|q|$.

* كتابة الحد العام

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $\beta_n=\beta_0+\ln|q|$

3) حساب المجموع $S_\alpha=e^{u_0}+e^{u_1}+...+e^{u_n}$ بدلالة α_0 و n و r .

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_n}=\alpha_n$

ومنه $S_\alpha=\alpha_0+\alpha_1+...+\alpha_n$

إذن S_α هو مجموع $n+1$ حدا الأولى للمتتالية الهندسية (α_n)

وعليه فإنّ $S_\alpha=\alpha_0\times\frac{1-(e^r)^{n+1}}{1-e^r}$.

جميع الحقوق محفوظة ©

II. خواص جبرية:

نشاط

1. نعتبر العددين a ، b حيث $a=13,5$ و $b=4,8$

أ)باستعمال حاسبة أحسب :

$a+b$ ثم $\exp(a+b)$ و $\exp(a)$ ، $\exp(b)$ ثم $\exp(a)\times\exp(b)$.

ب)قارن بين العددين $\exp(a+b)$ و $\exp(a)\times\exp(b)$.

2. أ) باستعمال مجدول و علما أن رمز الدالة الأسية هو " *EXP* "

أنجز و اتمم و رقة الحساب الموالية:

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	a+b	EXP(a)	EXP(b)	EXP(a)xEXP(b)	EXP(a+b)
2	2	3	5				
3	3,1	3,7	6,8				
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							

ب) ضع تخمينا.

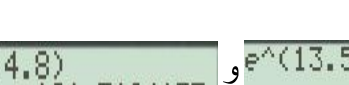
ج) جرب صحة تخمينك من أجل قيم مختلفة للعددين a و b.

جميع الحقوق محفوظة ©

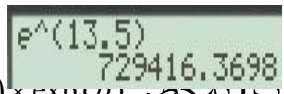
حل

1) أ)

و

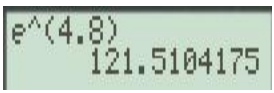


ب) نلاحظ: و



و

و



$\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$.

2) أ)

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	a+b	EXP(a)	EXP(b)	EXP(a)xEXP(b)	EXP(a+b)
2	2	3	5	7,3890561	20,0855369	148,4131591	148,413159
3	3,1	3,7	6,8	22,1979513	40,4473044	897,8472917	897,847292

ب) مخمنة: $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$.

ج)

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	a+b	EXP(a)	EXP(b)	EXP(a)xEXP(b)	EXP(a+b)
2	2	3	5	7,3890561	20,0855369	148,4131591	148,4131591
3	3,1	3,7	6,8	22,1979513	40,4473044	897,8472917	897,8472917
4	5,1	5,2	10,3	164,021907	181,272242	29732,61885	29732,61885
5	7,1	6,7	13,8	1211,96707	812,405825	984609,1112	984609,1112
6	9,1	8,2	17,3	8955,2927	3640,95031	32605775,72	32605775,72
7	11,1	9,7	20,8	66171,1602	16317,6072	1079754999	1079754999
8	13,1	11,2	24,3	488942,415	73130,4418	35756574812	35756574812
9	15,1	12,7	27,8	3612822,93	327747,902	1,1841E+12	1,1841E+12
10	17,1	14,2	31,3	26695351,3	1468864,19	3,92118E+13	3,92118E+13
11	19,1	15,7	34,8	197253448	6582992,58	1,29852E+15	1,29852E+15
12	21,1	17,2	38,3	1457516796	29502925,9	4,3001E+16	4,3001E+16
13	23,1	18,7	41,8	1,077E+10	132222941	1,424E+18	1,424E+18
14	25,1	20,2	45,3	7,9578E+10	592582108	4,71563E+19	4,71563E+19
15	27,1	21,7	48,8	5,88E+11	2655768756	1,5616E+21	1,5616E+21
16	29,1	23,2	52,3	4,3448E+12	1,1902E+10	5,17132E+22	5,17132E+22

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

مبرهنة (الخاصية الأساسية)

من أجل كل عددين حقيقيين a و b ، $e^{a+b}=e^a e^b$.

برهان: لإثبات أن $\alpha=\beta$ مع $\alpha>0$ و $\beta>0$ يكفي أن نثبت أن $\ln\alpha=\ln\beta$.

الأعداد e^a ، e^b و e^{a+b} موجبة تماما.

لدينا من جهة $\ln\left(e^{a+b}\right)=a+b$ من جهة أخرى:

$\ln\left(e^{a+b}\right)=\ln\left(e^a e^b\right)$ إذن $\ln\left(e^a e^b\right)=\ln\left(e^a\right)+\ln\left(e^b\right)=a+b$

منه $e^{a+b}=e^a e^b$.

- ملاحظة: نقول عن الدالة الأسية أنها تحول مجموع إلى جداء.
- أمثلة: $e\times e^x=e^{x+1}$ ، $e^{x^2-2}=e^{x^2}\times e^{-2}$.

نتائج

ن1) من أجل كل عددين حقيقيين a و b : $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$ و $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$.

برهان

- من أجل كل عدد حقيقي a لدينا: $e^a\times e^{-a}=e^{a-a}=e^0=1$

و بالتالي $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$.

- من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا:

$$e^{a-b}=e^{a+(-b)}=e^a\times e^{-b}=e^a\times\frac{1}{e^b}=\frac{e^a}{e^b}$$

مثال

$e^{2x-3}=\dfrac{e^{2x}}{e^3}$ ، $\dfrac{e^{2x-5}}{e^{x+1}}=e^{(2x-5)-(x+1)}=e^{x-6}$.

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

ن2) من أجل كل عدد حقيقي a و من أجل كل صحيح نسبي n لدينا $\left(e^{a}\right)^{n}=e^{na}$.

برهان

العددان $\left(e^{a}\right)^{n}$ و e^{na} موجبان تماما.

لدينا من جهة: $\ln\left[\left(e^{a}\right)^{n}\right]=n\ln\left(e^{a}\right)=na\ln(e)=na$

و من جهة أخرى: $\ln\left(e^{na}\right)=na\ln(e)=na$ و منه

$\ln\left[\left(e^{a}\right)^{n}\right]=\ln\left(e^{na}\right)$. إذن $\left(e^{a}\right)^{n}=e^{na}$.

أمثلة

$e^{2x}=\left(e^{x}\right)^{2}$ ، $e^{3x}=\left(e^{x}\right)^{3}$.

تطبيق1

حل، في المجموعة $\mathbb{R}$ ، ال: عادلة و المتراجحة

$(1)\ e^{x+2}e^{2x-3}=5$ و $(2)\ e^{-2x+1}>\frac{1}{2}e^{-x+1}$

حل

- (1) تعني $e^{(x+2)+(2x-3)}=5$ أي $e^{3x-1}=5$ و هذا يعني $3x-1=\ln 5$ أي $x=\frac{1+\ln 5}{3}$.
- (2) تعني $\frac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}}>\frac{1}{2}$ لأن $e^{-x+1}>0$ لدينا:

$\frac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}}=e^{(-2x+1)-(-x+1)}=e^{-2x+1+x-1}=e^{-x}$

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

و منه $\frac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}} > \frac{1}{2}$ تعني $e^{-x} > \frac{1}{2}$ أي $-x > \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ و هذا يعني $-x > -\ln 2$ أي $x < \ln 2$.

مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن: $S =]-\infty; \ln 2[$.

تطبيق2

حل، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة والمتراجحة التاليتين:

$(1)\ e^{2x} - e^{x} - 6 = 0$ ؛ $(2)\ e^{2x} - e^{x} - 6 > 0$

حل

طريقة

- لحل المعادلة $ae^{2x} + be^{x} + c = 0$ ، نتبع الخطوات التالية:

أوّلا: نضع $X = e^{x}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، وهنا نلاحظ أن $X \in \mathbb{R}_+^*$

ثانيا: نحل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ في $\mathbb{R}_+^*$

ثالثا: نعين قيم x ، من أجل كل حل ممكن للمعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ في $\mathbb{R}_+^*$ انطلاقا من العلاقة $X = e^{x}$.

فمثلا إذا كان X_0 حلا للمعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ في $\mathbb{R}_+^*$ نقوم بحل المعادلة $e^{x} = X_0$ لتعيين قيمة x المقابلة.

- لحل المتراجحة $ae^{2x} + be^{x} + c > 0$ ، نتبع الخطوات التالية:

أوّلا: نضع $X = e^{x}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، وهنا نلاحظ أن $X \in \mathbb{R}_+^*$.

ثانيا: نحل المتراجحة $aX^2 + bX + c > 0$ في $\mathbb{R}_+^*$

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

ثالثا: نعين قيم x ، من أجل كل حل ممكن للمتراجحة $aX^2+bX+c=0$ في $\mathbb{R}_+^*$ انطلاقا من العلاقة $X=e^x$.

فمثلا إذا كانت حلول المتراجحة $aX^2+bX+c>0$ في $\mathbb{R}_+^*$ هي X_0 بحيث $\alpha<X_0<\beta$ فإننا نقوم بحل المتراجحة المضاعفة $\alpha<e^x<\beta$ حيث نجد $\ln(\alpha)<x<\ln(\beta)$

ومنه نستنتج أنّ حلول المتراجحة $ae^{2x}+be^x+c>0$ هي كل قيم المجال $]\ln(\alpha);\ln(\beta)[$.

أ) بوضع $X=e^x$ نحصل على المعادلة ذات المجهول X التالية:

$X^2-X-6=0$.

لدينا $\Delta=25$ ومنه حلول المعادلة $X^2-X-6=0$ هما: $X'=-2$ و $X''=3$.

$e^x=-2$ لا تقبل حلولا لأن $e^x>0$ و $e^x=3$ تعني $x=\ln 3$.

ب) بوضع $X=e^x$ نحصل على المتراجحة : $X^2-X-6>0$.

للمعادلة $X^2-X-6=0$ جذران هما -2 و 3 . و بالتالي فإشارة X^2-X-6 هي كالآتي:

X	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
X^2-X-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

حلول المتراجحة $X^2-X-6>0$ في $\mathbb{R}_+^*$ هي إذن الأعداد الحقيقية X بحيث: $X>3$.

$e^x>3$ تعني $x>\ln 3$.

حلول المتراجحة (2) هي x حيث $x\in]\ln 3;+\infty[$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

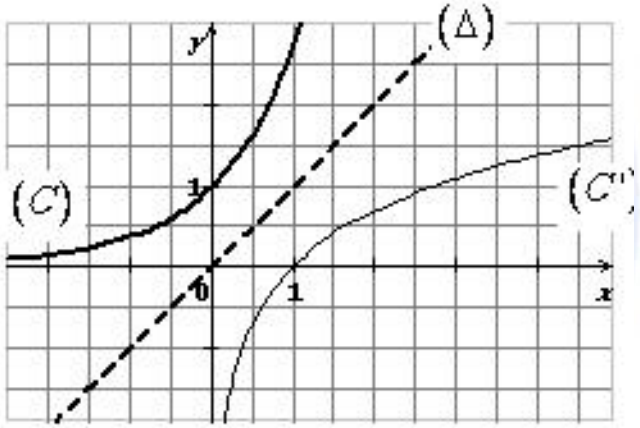
III.دراسة الدالة الأسية $x \mapsto \exp(x)$:

نشاط

نعتبر في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

المنحنيين (C) و (C') الممثلين على التوالي للدالتين " exp " و" ln ".

رأينا سابقا أن (C) هو نظير (C') بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.



خمن نهايتي الدالة " exp " عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

حل

نقرأ على التمثيل البياني السابق أن من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$\exp(x) > x$ بمأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$

(حسب مبرهنات المقارنة).

من جهة أخرى: المنحني الذي يمثل الدالة exp يقبل عند $-\infty$ مستقيما

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

مقاربا معادلته $y=0$ (أي محور الفواصل) إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x)=0$.

النهايات

خاصية

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

برهان

* نقبل دون برهان $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

* من أجل x من $\mathbb{R}$، نضع $X=-x$ و منه $e^x=e^{-X}=\dfrac{1}{e^X}$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}X=+\infty$

و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(e^X\right)=+\infty$ و هكذا فإن $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{e^X}=0$.

و بالتالي فإن، حسب المبرهنة المتعلقة بنهاية دالة مركبة، $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

مشتقة الدالة الأسية

خاصية

الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $\exp'(x)=e^x$.

برهان

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\ln\left[\exp(x)\right]$.

نلاحظ أن $f=\ln\circ u$ حيث $u:x\mapsto\exp(x)$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\exp'(x)}{\exp(x)}.$$

نعلم من جهة ثانية أن $f(x)=\ln(e^x)=x$ و منه $f'(x)=1$ و هكذا فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\frac{\exp'(x)}{\exp(x)}=1$ أي $\exp'(x)=\exp(x)=e^x$.

نتائج

الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ لأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^x>0$.

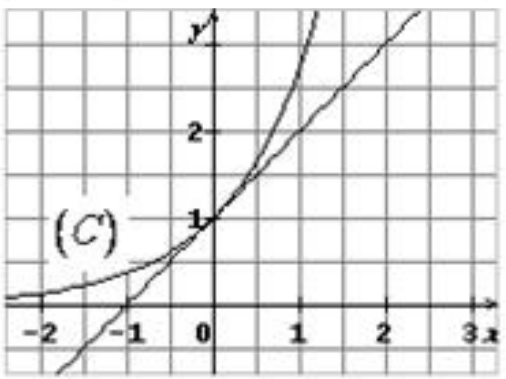
دالة أصلية للدالة $x\mapsto e^x$ على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x\mapsto e^x$ نفسها.

التمثيل البياني

نستعين بجدول التغيرات لإنشاء المنحني

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖
$\ln x$	$-\infty$	↗	‖ 1	↗	e	↗	$+\infty$

معادلة المماس عند النقط



جميع الحقوق محفوظة)

تطبيق1

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=2+e^{-2x+3}$

1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. ادرس اتجاه تغير الدالة f .

حل

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+3)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x+3}=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x+3)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x+3}=0$

و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$.

2. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$f'(x)=-2e^{-2x+3}$.

بما أن $e^{-2x+3}>0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)<0$.

إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

تطبيق2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـِ: $f(x)=\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني.

1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى (C) .

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. ارسم المنحني (C) في معلم متعامد ومتجانس.

حل

1) أ) لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+1}{e^x-1} = -1$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

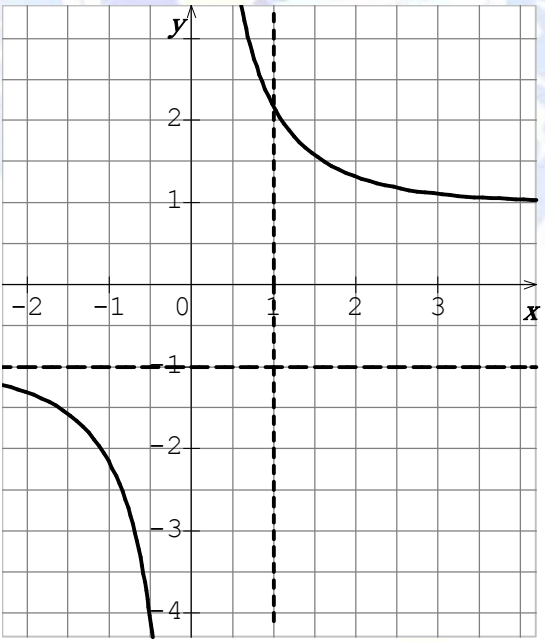
ب) نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و منه لدينا حالة عدم التعيين.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}}$$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

ج) لدينا



http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

$\lim_{x\to 0}\left(e^x+1\right)=2$ و $\lim_{x\to 0}\left(e^x-1\right)=0$.

نعلم أن $e^x<1$ يعني $x<0$

و $e^x>1$ يعني $x>0$

و بالتالي $\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$.

يقبل المنحنى (C) ثلاث مستقيمات مقاربة معادلاتها هي:

$x=0$ ، $y=-1$ و $y=1$.

2) f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ و لدينا $f'(x)=\dfrac{-2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$ و بالتالي فالدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

ملاحظة

يمكن إثبات أن الدالة f فردية كالآتي:

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}$

أي $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=\dfrac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}-1}=\dfrac{\frac{1+e^x}{e^x}}{\frac{1-e^x}{e^x}}=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}=\dfrac{e^x+1}{-\left(e^x-1\right)}$

أي $f(-x)=-\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ أي $f(-x)=-f(x)$.

f فردية و بطبيعة الحال المبدأ O مركز تناظر (C).

جميع الحقوق محفوظة ©

IV.دراسة دالة $\exp u$:

نشاط

نفرض وجود دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$بحيث:

$f(0)=1$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=f(x)$.

عين علاقة تربط بين g و g' في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $g:x\mapsto f(3x)$

ب) $g:x\mapsto f(-x)$

ج) $g:x\mapsto \dfrac{1}{f(x)}$

حل

أ)تذكر مشتقة دالة مركبة.

$g(x)=f(3x)$؛ نضع $u(x)=3x$. لدينا $g(x)=f\left[u(x)\right]$

إذن $f'\left[u(x)\right]$ $g'(x)=u'(x)$ أي $f\left[u(x)\right]$ $g'(x)=u'(x)$

أي $g(x)$ $g'(x)=3$.

ب) $g(x)=f(-x)$؛ نضع $u(x)=-x$.

لدينا $g(x)=f\left[u(x)\right]$

إذن $f'\left[u(x)\right]$ $g'(x)=u'(x)$ أي $f\left[u(x)\right]$ $g'(x)=u'(x)$

أي $g(x)$ $g'(x)=-$.

ج) إذن $g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$ أي $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ $g'(x)=-\dfrac{f(x)}{\left[f(x)\right]^2}$

و منه $g'(x)=-\dfrac{1}{f(x)}$ أي $g(x)$ $g'(x)=-$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة

النهايات

لدراسة نهاية دالة $\exp\circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=e^{-x+2}$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+2}=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.
- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+2}=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

اتجاه التغير

خاصية

إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

برهان

نعلم أن الدالة " exp " متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

جميع الحقوق محفوظة ©

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^2-1}$.

نلاحظ أن $f=\exp\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل $u(x)=x^2-1$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

بما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزليدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

المشتقة و الدوال أصلية

خاصية

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن:

- الدالة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x $(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.
- الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I.

مثال

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^2+x+1}$ هي $f'(x)=(2x+1)e^{x^2+x+1}$.
- الدالة F حيث $F(x)=e^{-x^2}$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x)=-2xe^{-x^2}$ على $\mathbb{R}$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

تطبيق1

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـِ $f(x)=e^{2+\ln x}$

أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

حل

لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}(2+\ln x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to -\infty}e^{X}=0$

فإن $\lim\limits_{x\to 0}e^{2+\ln x}=0$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

لدينا: $\lim\limits_{x\to +\infty}(2+\ln x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ و بما أن

$\lim\limits_{X\to +\infty}e^{X}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to +\infty}e^{2+\ln x}=+\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$

ملاحظة

يمكن ملاحظة أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$،

$f(x)=e^{2+\ln x}=e^{2}e^{\ln x}=e^{2}x$.

تطبيق2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=\ln\left(e^{2x}+1\right)$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

1. أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

2. عين نقط المنحني (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{x}{3}$.

حل

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

جميع الحقوق محفوظة ©

بما أن $e^{2x}>0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. يكون المماس عند نقطة من (C) فاصلتها x موازيا للمستقيم (Δ) يعني $f'(x)=\frac{1}{3}$ أي $\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}=\frac{1}{3}$.

ويكون لدينا إذن $\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}=\frac{1}{3}$ أي $6e^{2x}=e^{2x}+1$ و هذا يعني $e^{2x}=\frac{1}{5}$ أي $2x=-\ln 5$ و منه $x=-\frac{\ln 5}{2}$

إذن بالتالي توجد نقطة وحيدة من (C) فاصلتها $x=-\frac{\ln 5}{2}$ يكون المماس عندها موازيا للمستقيم (Δ).

تطبيق3

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{2x+3}$

عين الدالة الأصلية g للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم عند -1.

حل

- بوضع $u(x)=2x+3$ يكون لدينا $u'(x)=2$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\frac{1}{2}\times u'(x)e^{u(x)}$.

و بالتالي تقبل الدالة f على $\mathbb{R}$ دوالا أصلية F معرفة كما يلي:

$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+3}+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

- لدينا $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x+3}+c$ و $g(-1)=0$ و منه $\frac{1}{2}e^{2(-1)+3}+c=0$ أي $\frac{1}{2}e+c=0$ و بالتالي $c=-\frac{1}{2}e$. نجد هكذا: $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x+3}-\frac{e}{2}$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

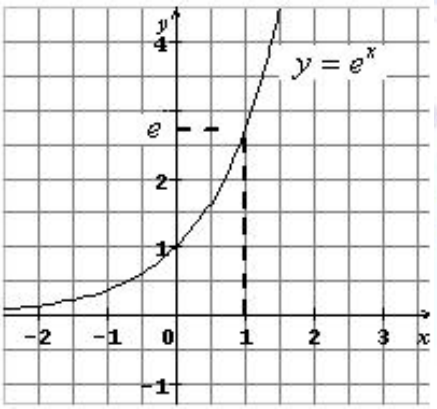
V. ملخص:

1. حول الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية النيبيرية

من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $y = Lnx$ معناه $x = e^y$ إذن $e^{Lnx} = x$.

من أجل كل عدد حقيقي a : $Lne^x = x$.

2. قراءة بيانية



- e^x معرّف على $\mathbb{R}$.
- $e^0 = 1$.
- الدالة $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما.
- $e^x > 1$ يكافئ $x > 0$.
- $e^x < 1$ يكافئ $x < 0$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

3. مشتقات و دوال أصلية

- مشتقة الدالة $x \mapsto e^x$ على $\mathbb{R}$ هي نفسها $x \mapsto e^x$.
- e^u هي دالة أصلية للدالة $u'e^u$ على مجال I .

(u قابلة للاشتقاق على I).

4. خواص

a و b عددان حقيقيان و $n \in \mathbb{Z}$.

الدالة exp تحول مجموع إلى جداء أي $e^{a+b} = e^a \times e^b$

و $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ و $\frac{1}{e^b} = e^{-b}$ و $\left(e^a\right)^n = e^{an}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة

VI.توظيف المعارف:

أ. تمارين

1.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الطول هي $1cm$.

1. بين أن الدالة f فردية. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C) ؟
2. أ)بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=x+1-\dfrac{2}{e^{-x}+1}$

ب) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3. أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

ج) حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ).

4. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
5. عين معادلة لـِ (d) مماس المنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.
6. أرسم (d) ، (Δ) ، (Δ') و (C) حيث (Δ') هو المستقيم المقارب للمنحني (C) عند $-\infty$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

7. عين دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ثم أحسب بـِ cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C)، المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معدلتاهما $x=0$ و $x=1$.

.2

الجزء الأول:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كما يلي:

$u_n = e^{-\frac{1}{3}+2n}$.

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـِ $f(x)=e^{-\frac{1}{3}+2x}$

2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3. بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدها الأول و أساسها.

4. نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

أ)أحسب S_n بدلالة n.

ب)عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = \frac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2} \times \left(1-e^{10}\right)$

الجزء الثاني:

نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n = \ln(u_n)$

1. ما هي طبيعة المتتالية (v_n) ؟ حدد حدها الأول و أساسها.

2. عبر بدلالة n عن المجموع S'_n علما أن $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

3. عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S'_n = \frac{160}{3}$.

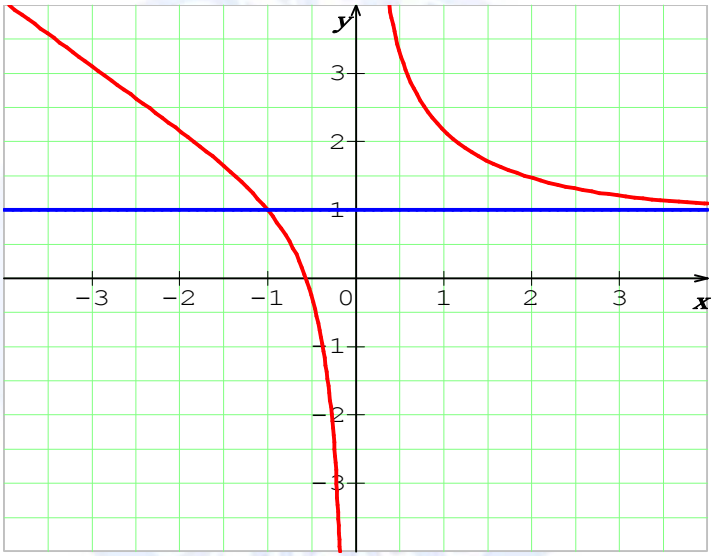
http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

.3

الجزء A :

المنحني $(\mathcal{C})$ في الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

محور التراتيب و المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقاربان للمنحني $(\mathcal{C})$.



1. اقرأ بيانيا نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.
2. حل بيانيا كل من : أ) $f(x)=1$ ؛ ب) $f(x)>1$

الجزء B :

نقبل أن الدالة f معرفة على بـــ : $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x-1}$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

1. أ- تحقق أن : $f(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}}$

ب- نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ، جد من جديد إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. أ- ادرس ، حسب قيم x إشارة $\left(e^x-1\right)$

ب- حل المترجحة $\dfrac{e^x+x}{e^x-1}>1$

3. بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=0$. ماذا تستنتج ؟

4. ادرس وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y=-x$.

.4

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=Ln\left(e^x+1\right)$ ، (C) هو تمثيلها البياني.

1.بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)=x+Ln\left(e^{-x}+1\right)$.

2.ادرس تغيرات f .

3.اكتب معادلة المماس (Δ) لـــ: (C) في نقطته التي فاصلتها 0 .

4.عين المستقيمات المقاربة للمنحني (C).

5. أنشئ (C) و (Δ).

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

.5

نعرف الدالة f على $]-\infty;0]$ بـــ: $f(x)=2e^{2x}-3e^{x}+1$.

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;I,J)$ حيث :

$OI=2\,cm$ و $OJ=8\,cm$.

1.أ) احسب $f\left(Ln\frac{3}{4}\right)$.

ب)عين تقاطع (C) مع محور الفواصل.

2. ادرس تغيرات f .

3.بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعيينه. أنشئ (C).

4.أ) عين دالة أصلية F للدالة f على $]-\infty;0]$.

ب) احسب المساحة S للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها $x=Ln\frac{3}{4}$ ، $x=Ln\frac{1}{2}$ و $y=1$.

7.عين بيانيا، حسب قيم العدد الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة:

$2e^{2x}-3e^{x}+1-m=0$.

.6

نعتبر الدالة r المعرفة على $[0;12]$ بـــ : $r(x)=(900x)\,e^{-0,1(x-2)}$

الجزء A :

1. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;12]$ بـــ : $f(x)=\ln\left[r(x)\right]$

بين أن : $f(x)=\ln(900)+\ln x-0,1(x-2)$

2. نرمز بـــ f' إلى مشتقة الدالة f .بين أن :

$$f'(x)=\frac{10-x}{10x}$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة

3.ادرس تغيرات f على $[0;12]$.

4. نرمز بـــ r' إلى مشتقة الدالة r. عبر عن f' بدلالة r' ثم بين أن $f'(x)$ $r'(x)$ لهما نفس الإشارة من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;12]$.

5.استنتج تغيرات الدالة r على $[0;12]$.

الجزء B:

1.بين أن الدالة R المعرفة بـــ:

$$R(x) = -9000(x+10)e^{-0,1(x-2)}$$

دالة أصلية للدالة r على $[0;12]$

2.احسب القيمة المتوسطة r_m للدالة r على $[0;12]$ المعرفة بـــ:

$r_m = \frac{1}{12}\int_0^{12} r(x)\,dx$.

تعطى أولا القيمة المضبوطة ، ثم القيمة المقربة إلى 10^{-2}.

ب. حلول التمارين

1.

1.من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(x)+f(-x) = x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}-x+1-\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1} = 2-\frac{2e^x}{e^x+1}-\frac{\frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}$$ أي

$$f(x)+f(-x) = 2-\frac{2e^x}{e^x+1}-\frac{\frac{2}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} = 2-\frac{2e^x}{e^x+1}-\frac{2}{1+e^x} = \frac{2e^x+2-2e^x-2}{1+e^x} = 0$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا إذن $f(x)+f(-x)=0$

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

أي $f(-x)=-f(x)$ و منه f فردية.

f فردية إذن المبدأ O للمعلم مركز تناظر (C).

2.أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(x)=x+1-\frac{\frac{2}{e^{-x}}}{\frac{1}{e^{-x}}+1}=x+1-\frac{\frac{2}{e^{-x}}}{\frac{1+e^{-x}}{e^{-x}}}=x+1-\frac{2}{e^{-x}+1}$$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0\end{cases}$

3.أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}=x-1+2-\frac{2e^x}{e^x+1}=x-1+\frac{2(e^x+1)-2e^x}{e^x+1}$$

أي $f(x)=x-1+\frac{2}{e^x+1}$.

ب)لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+1)=+\infty$

إذن (C)يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x-1$.

ج) $f(x)-(x-1)=\frac{2}{e^x+1}$ إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$f(x)-(x-1)>0$، نستنتج أن (C) يقع فوق (Δ).

4. لدينا $f(x)=x-1+2\frac{1}{e^x+1}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0\end{cases}$
- $f'(x)=1-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$، تذكر أن مشتقة الدالة $\frac{1}{u}$ هي $-\frac{u'}{u^2}$

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+1\right)^2-2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}$$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)>0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0	$+\infty$

5.معادلة للمماس (d): $y=f'(0)(x-0)-f(0)$

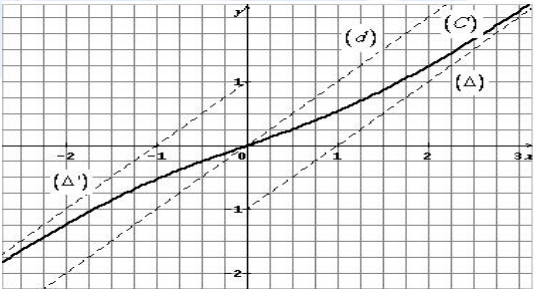
أي $y=1(x-0)-0$ أي $y=x$.

6. معادلة لـــ: (Δ'):

لدينا $f(x)=x+1-\frac{2}{e^{-x}+1}$ (انظر السؤال 2. أ)).

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}+1}=0 \quad \lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+1\right)=+\infty$$

إذن (C)يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (Δ') معادلته $y=x+1$.



.7

أ)تذكر أن Lnu هي دالة أصلية للدالة $\frac{u'}{u}$، u هي دالة موجبة تماما على مجال I و تقبل الاشتقاق على I .

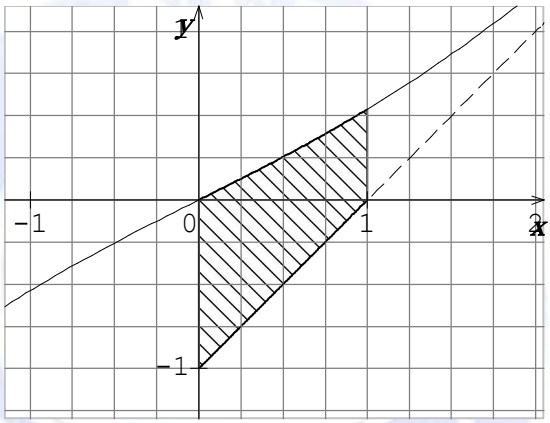
http://www.onefd.edu.dz

إذن $x \mapsto Ln\left(e^x+1\right)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$ على $\mathbb{R}$

و الدالة $x \mapsto F(x)=\frac{x^2}{2}+x-2Ln\left(e^x+1\right)$ هي دالة أصلية للدالة

$x \mapsto f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}$ على $\mathbb{R}$.

ب)نسمي S مساحة الشطح المطلوب.



$$S=\int_0^1\left[f(x)-(x-1)\right]dx=\left[F(x)-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right]_0^1$$

أي $$S=\left[\frac{x^2}{2}+x-2Ln\left(e^x+1\right)-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1$$

أي $$S=\left[2x-2Ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1=2\left[x-Ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1$$

أي $$S=2\left[Lne^x-Ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1=2\left[Ln\frac{e^x}{e^x+1}\right]_0^1=2\left[Ln\frac{e}{e+1}-Ln\frac{1}{2}\right]$$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

أي $S=2\left[Ln\dfrac{\left(\dfrac{e}{e+1}\right)}{\left(\dfrac{1}{2}\right)}\right]=2Ln\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)$ إذن $S\simeq 0,76\ cm^2$.

.2

1.نحسب الدالة المشتقة: $f'(x)=2\,e^{-\frac{1}{3}+2x}$

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا $f'(x)>0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

2. لدينا $u_n=f(n)$ و f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{e^{-\frac{1}{3}+2(n+1)}}{e^{-\frac{1}{3}+2n}}=\dfrac{e^{-\frac{1}{3}}\times e^{2(n+1)}}{e^{-\frac{1}{3}}\times e^{2n}}=\dfrac{e^{2(n+1)}}{e^{2n}}=e^{2(n+1)-2n}=e^2$

من اجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1}=e^2\times u_n$ إذن المتتالية (u_n) هندسية أساسها e^2 و حدها الأول $u_0=e^{-\frac{1}{3}}$.

.4

أ) $S_n=u_0\ \dfrac{1-\left(e^2\right)^{n+1}}{1-e^2}=e^{-\frac{1}{3}}\ \dfrac{1-e^{2n+2}}{1-e^2}$ أي $S_n=\dfrac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2}\left(1-e^{2n+2}\right)$.

ب) $S_n=\dfrac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2}\times\left(1-e^{10}\right)$ معناه $\dfrac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2}\left(1-e^{2n+2}\right)=\dfrac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2}\times\left(1-e^{10}\right)$

أي $2n+2=10$ أي $2n=8$ أي $n=4$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

.3

الجزء A :

.1 * محور التراتيب مستقيم مقارب للمنحني $(\mathcal{C})$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty$.

* المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحني $(\mathcal{C})$ عند $+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

.2

أ) المستقيم الذي معادلته $y=1$ يقطع $(\mathcal{C})$ في نقطة وحيدة فاصلتها $-\frac{1}{2}$

إذن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا هو $-\frac{1}{2}$.

ب)الفواصل x لنقط $(\mathcal{C})$ التي تقع فوق المستقيم الذي معادلته $y=1$ هي كل الأعداد الحقيقية من المجموعة $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

نستنتج أن مجموعة حلول المعادلة $f(x)>1$ هي: $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

الجزء B :

.1

أ) $f(x) = \dfrac{e^x\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}$ أي $f(x) = \dfrac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}}$.

ب) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\left(\dfrac{e^x}{x}\right)} = 0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

2.

أ)إشارة e^x-1

- $e^x-1>0$ يكافئ $e^x>1$ و يكافئ $e^x>e^0$ و يكافئ $x>0$.
- $e^x-1>0$ يكافئ $x<0$.

ب)حل المترجحة $\frac{e^x+x}{e^x-1}>1$

$\frac{e^x+x}{e^x-1}>1$ تكافئ $\frac{e^x+x}{e^x-1}-1>0$ و تكافئ $\frac{e^x+x-\left(e^x-1\right)}{e^x-1}>0$

أي $\frac{e^x+x-e^x+1}{e^x-1}>0$ أي $\frac{x+1}{e^x-1}>0$

لنعين إشارة $\frac{x+1}{e^x-1}$ باستعمال جدول:

$x+1\geq 0$ يكافئ $x\geq -1$ و $x+1\leq 0$ يكافئ $x\leq -1$

درسنا سابقا (السؤال 2. أ)) إشارة e^x-1 .

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-1		$-$		$-$		$+$	
$\frac{x+1}{e^x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

.3

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x+x}{e^x-1}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x+x+x\left(e^x-1\right)}{e^x-1}\right]$$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

أي $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{e^x+x+xe^x-x}{e^x-1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}\right]$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=0$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0\end{cases}$.

نستنتج أن المنحني الذي يمثل الدالة f يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (Δ)معادلته $y=-x$.

4. $f(x)+x=\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}=\dfrac{(x+1)e^x}{e^x-1}$

إشارة $f(x)+x$ هي إشارة $\dfrac{x+1}{e^x-1}$ (السؤال 2.ب))

- عندما $x\in]-\infty;-1[$ أو $x\in]0;+\infty[$ يكون $(\mathcal{C})$ فوق (Δ).
- عندما $x\in]-1;0[$ أو $x\in]0;+\infty[$ يكون $(\mathcal{C})$ تحت (Δ).

.4

1.من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x)=Ln\left(e^x+1\right)=Ln\left(\frac{1}{e^{-x}}+1\right)=Ln\left(\frac{1+e^{-x}}{e^{-x}}\right)$$

أي $f(x)=Ln\left(1+e^{-x}\right)-Lne^{-x}=Ln\left(1+e^{-x}\right)-(-x)Lne$

أي $f(x)=Ln\left(1+e^{-x}\right)+x=x+Ln\left(1+e^{-x}\right)$.

.2

- مجموعة تعريف f : $D_f=]-\infty;+\infty[$.
- النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}Ln\left(e^x+1\right)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

جميع الحقوق محفوظة ©

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x + Ln\left(1+e^{-x}\right) \right] = +\infty$

- حساب الدالة المشتقة $f'(x)$: $f'(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$.
- إشارة $f'(x)$: من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{x} > 0$ إذن $f'(x) > 0$.
- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

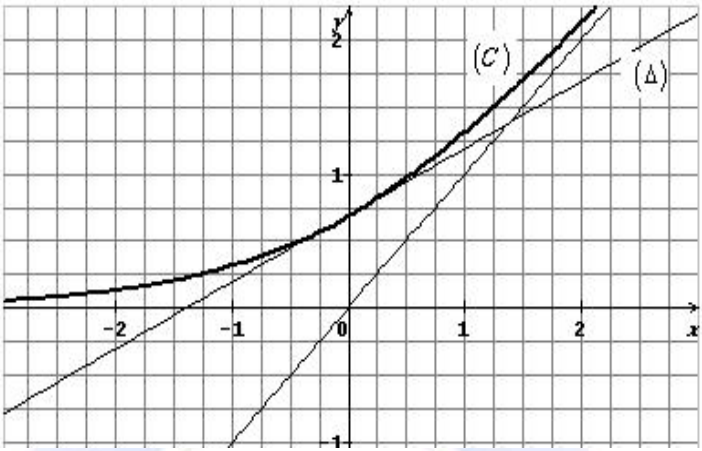
3.معادلة $(\Delta): y = f'(0)(x-0) + f(0)$ أي $y = \dfrac{1}{2}x + Ln2$

4. المستقيمات المقاربة:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ إذن (C) يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$ (محور الفواصل).
- لاحظ أن $f(x) = x + Ln\left(1+e^{-x}\right)$ إذن:
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - x \right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[Ln\left(1+e^{-x}\right) \right] = 0$ إذن يقبل (C) يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x$.

4.إنشاء (C) و (Δ):

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©



.5

1.أ) تذكر أن من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما لدينا $e^{Lna}=a$.

$$f\left(Ln\frac{3}{4}\right)=2e^{2Ln\frac{3}{4}}-3e^{Ln\frac{3}{4}}+1=2e^{Ln\left(\frac{3}{4}\right)^2}-3e^{Ln\frac{3}{4}}+1$$

إذن $f\left(Ln\frac{3}{4}\right)=2\left(\frac{3}{4}\right)^2-3\left(\frac{3}{4}\right)+1=-\frac{1}{8}$.

ب) لنحل المعادلة $f(x)=0$ أي $2e^{2x}-3e^{x}+1=0$.....$(*)$..

نضع $t=e^{x}$ علما $t>0$ و المعادلة $(*)$ تصبح $2t^2-3t+1=0$..

نحل المعادلة $2t^2-3t+1=0$. و نجد $t=1$، $t=\frac{1}{2}$.

$t=1$ معناه $e^{x}=1$ أي $e^{x}=e^{0}$ أي $x=0$.

$t=\frac{1}{2}$ معناه $e^{x}=\frac{1}{2}$ أي $e^{x}=e^{Ln\frac{1}{2}}$ أي $x=Ln\frac{1}{2}$

نستنتج أن (C) يقطع محور الفواصل في النقطتين: $A\left(Ln\frac{1}{2};0\right)$ و O.

2.تغيرات f:

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

أ) f معرفة على $I =]-\infty;0]$.

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$.

ج)حساب الدالة المشتقة: $f'(x) = 4e^{2x} - 3e^x = e^x\left(4e^x - 3\right)$

د)إشارة $f'(x)$:

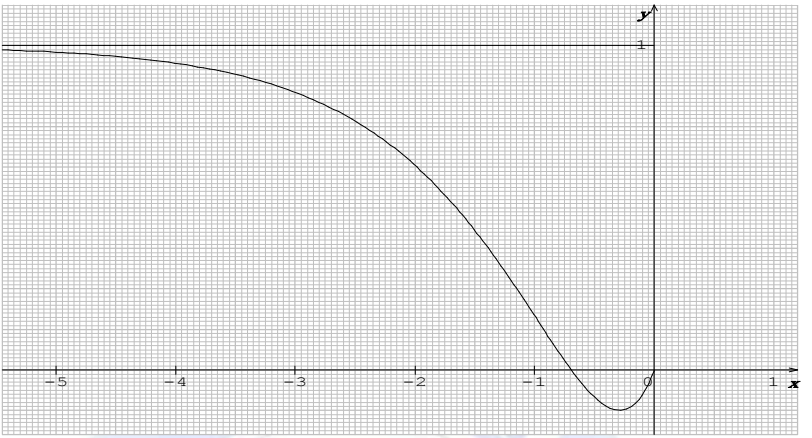
- $f'(x) = 0$ معناه $4e^x - 3 = 0$ (لأن $e^x \neq 0$ أي $e^x = \frac{3}{4}$ أي $e^x = e^{Ln\frac{3}{4}}$ أي $x = Ln\frac{3}{4}$.
- $f'(x) > 0$ معناه $4e^x - 3 > 0$ (لأن $e^x > 0$ أي $4e^x > 3$ أي $e^x > \frac{3}{4}$ أي $e^x > e^{Ln\frac{3}{4}}$ أي $x > Ln\frac{3}{4}$.
- $f'(x) > 0$ معناه $x < Ln\frac{3}{4}$.

هـ)جدول التغيرات

x	$-\infty$		$Ln\frac{1}{2}$		$Ln\frac{3}{4}$		0
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	0

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ إذن (C) يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y = 1$.

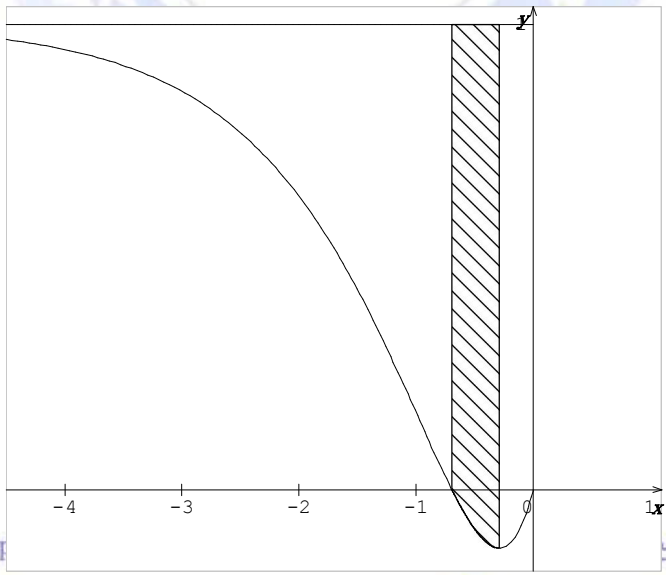
http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©



4.أ) تذكر أن الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto e^{ax+b}$ على $\mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ هي الدوال من الشكل $x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b} + k$ ، k ثابت كيفي.

لدينا عندئذ: $F(x) = 2 \times \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^{x} + x$ أي $F(x) = e^{2x} - 3e^{x} + x$.

ب)



http جميع

إذن $S=\left[x-F(x)\right]_{Ln\frac{1}{2}}^{Ln\frac{3}{4}}$ أي $S=\int_{Ln\frac{1}{2}}^{Ln\frac{3}{4}}\left[1-f(x)\right]dx$

و منه $S=\left[x-e^{2x}+3e^{x}-x\right]_{Ln\frac{1}{2}}^{Ln\frac{3}{4}}=\left[-e^{2x}+3e^{x}\right]_{Ln\frac{1}{2}}^{Ln\frac{3}{4}}$

$S=\left[-e^{2x}+3e^{x}\right]_{Ln\frac{1}{2}}^{Ln\frac{3}{4}}=\left(-e^{2Ln\frac{3}{4}}+3e^{Ln\frac{3}{4}}\right)-\left(-e^{2Ln\frac{1}{2}}+3e^{Ln\frac{1}{2}}\right)$.

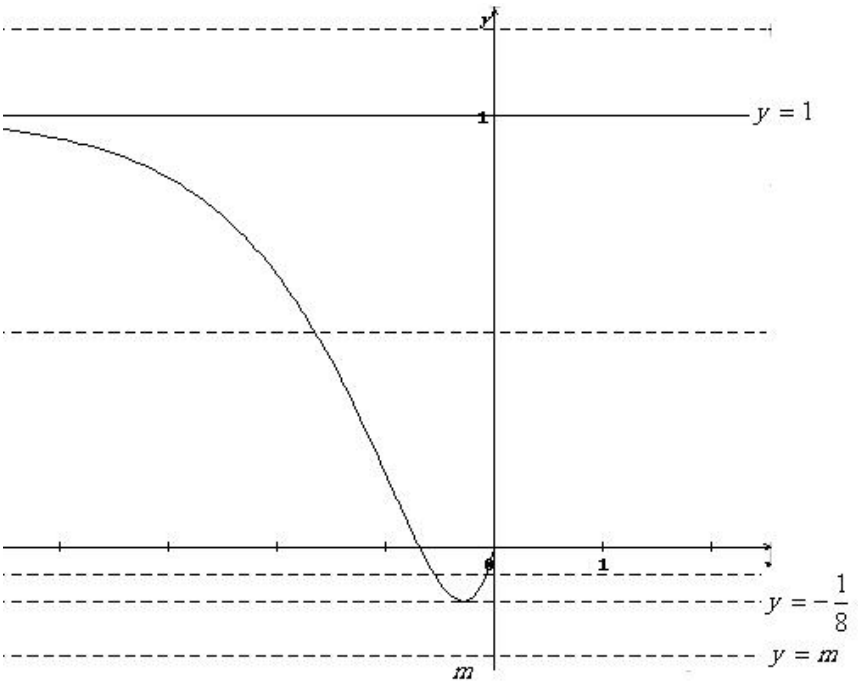
لدينا
$$\begin{cases}-e^{2Ln\frac{3}{4}}+3e^{Ln\frac{3}{4}}=-e^{Ln\frac{9}{16}}+3e^{Ln\frac{3}{4}}=-\frac{9}{16}+\frac{9}{4}=\frac{27}{16}\\ -e^{2Ln\frac{1}{2}}+3e^{Ln\frac{1}{2}}=-e^{Ln\frac{1}{4}}+3e^{Ln\frac{1}{2}}=-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{5}{4}\end{cases}$$

إذن $S=\frac{27}{16}-\frac{5}{4}=\frac{7}{16}u.A$.

$1u.A=2\times 8\ cm^2$ إذن $S=\frac{7}{16}\times 16\ cm^2$ أي $S=7\ cm^2$.

5.المعادلة $2e^{2x}-3e^{x}+1-m=0$ تكافئ $f(x)=m$ ، إذن حلولها (في حالة وجودها) تكون فواصل نقط تقاطع المنحني (C) الذي يمثل الدالة f و المستقيم الذي معادلته $y=m$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©



نستنتج عندئذ من الشكل السابق:

- إذا كان $m < -\frac{1}{8}$: المعادلة لا تقبل أي حل.
- إذا كان $m = -\frac{1}{8}$: المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $Ln\frac{3}{4}$.
- إذا كان $-\frac{1}{8} < m \leq 0$: المعادلة تقبل حلين.
- إذا كان $0 < m < 1$: المعادلة تقبل وحيدا.
- إذا كان $m \geq 1$: المعادلة لا تقبل أي حل.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

.6

الجزء A :

1.من أجل كل x من $]0;12]$: $f(x)=\ln\left[900x\ e^{-0,1(x-2)}\right]$

إذن $f(x)=\ln(900x)+\ln\ e^{-0,1(x-2)}$

أي $f(x)=\ln(900x)+\ln\ e^{-0,1(x-2)}=\ln 900+\ln x-0,1(x-2)$.

2. من أجل كل x من $]0;12]$:

$f(x)=\ln 900+\ln x-0,1x+0,2$ إذن $f'(x)=\frac{1}{x}-0,1$

أي $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{10}$ أي $f'(x)=\frac{10-x}{10x}$.

3.تغيرات f على $]0;12]$:

أ) f معرفةعلى $]0;12]$.

ب) $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ >}} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ >}} \ln x=-\infty$

ج) $f'(x)=\frac{10-x}{10x}$.

د) إشارة $f'(x)$:

- $f'(x)=0$ معناه $x=10$.
- $f'(x)>0$ معناه $x<10$ و $f'(x)<0$ معناه $x>10$.

هـ) جدول التغيرات:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

x	0		10		12
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\ln 9000 - 0,8$	↘	$\ln 10800 - 1$

4. $f'(x) = \dfrac{r'(x)}{r(x)}$ و من أجل كل x من $[0;12[$: $r(x) > 0$ إذن للعبارتين: $f'(x)$ و $r'(x)$ نفس الإشارة على $[0;12[$.

5.

x	0		10		12
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$r'(x)$		$+$	0	$-$	
$r(x)$	0	↗	$9000e^{-0,8}$	↘	$10800e^{-1}$

الجزء B:

1. لدينا $R(x) = -9000\left[(x+10)\ e^{-0,1x+0,2}\right]$

و $R'(x) = -9000\left[e^{-0,1x+0,2} + (x+10)(-0,1)e^{-0,1x+0,2}\right]$

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

أي $R'(x)=-9000\ e^{-0,1x+0,2}\left[(x+10)(-0,1)\right]$

أي $R'(x)=-9000\ e^{-0,1x+0,2}\left[1-0,1x-1\right]$

أي $R'(x)=-9000\ (-0,1x)e^{-0,1x+0,2}$

أي $R'(x)=900xe^{-0,1(x-2)}$.

من أجل كل x من $]0;12[$: $R'(x)=r(x)$ إذن R دالة أصلية للدالة r على $]0;12[$.

2. $r_m=\frac{1}{12}\int_0^{12}r(x)dx=\frac{1}{12}\left[R(x)\right]_0^{12}=\frac{1}{12}\left[R(12)-R(0)\right]$.

بما أن $R(12)=-9000\times22\times e^{-1}$ و $R(0)=-9000\times10\times e^{0,2}$

فإن $R(12)-R(0)=-9000\times22\times e^{-1}+9000\times10\times e^{0,2}$

أي $R(12)-R(0)=9000\left(-22e^{-1}+10e^{0,2}\right)$

أي $R(12)-R(0)=18000\left(-11e^{-1}+5e^{0,2}\right)$.

نستنتج : $r_m=\frac{18000}{12}\left(-11e^{-1}+5e^{0,2}\right)=1500\left(-11e^{-1}+5e^{0,2}\right)$

$r_m\simeq3090,51$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

VII. تقويم ذاتي:

أ. اختيار من متعدد

1. كل سؤال يتضمن إجابة واحدة صحيحة حدّد هذه الإجابة

a. العدد e^{4+2x} يكتب على الشكل:

أ) $\left(e^2\right)^2 \times \frac{1}{e^{2x}}$ ب) $\left(e^{x+2}\right)^2$ جـ) $e^4 + e^{2x}$

b. إذا كانت $f(x) = e^{-x} + \ln x$ فإن:

أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ب) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ جـ) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2e$

c. المتراجحة $e^{-3x+1} < e^{-2x+3}$ تقبل كمجموعة حلول:

أ) $]-\infty;-2[$ ب) $[-2;+\infty[$ جـ) $\left]e^{-2};+\infty\right[$

d. إذا كان $0 < a < b$ فإن:

أ) $\frac{e^a}{e^b} < 1$ ب) $e^{-a} < e^{-b}$ جـ) $e^{\frac{a}{b}} < 1$

2. لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2e^{-x} + x + 5$.

a. في معلم معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها0 معادلته:

أ) $y = -x + 7$ ب) $y = 3x + 7$ جـ) $y = 7x - 1$

b. مجموعة حلول المتراجحة المضاعفة $-1 < e^x < 8$ هي:

أ) $]0;3\ln 2[$ ب) $]-\infty;3\ln 2[$ جـ) $]\ln 8;+\infty[$

c. u دالة معرفة $\mathbb{R}$ على بـ : $u(x) = (2x+3)e^{2x^2+6x+1}$

دالة أصلية U للدالة u على $\mathbb{R}$ هي :

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

أ) $U(x)=e^{2x^2+6x+1}-1$ ب) $U(x)=\frac{1}{2}e^{2x^2+6x+1}+3$

جـ) $U(x)=(x^2+3x)e^{2x^2+6x+1}$

ب. صحيح أم خاطئ

1. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=e^{-x}-1$

$(\mathcal{C})$ هو المنحني البياني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.نرمز بـــ f' على مشتقة الدالة f على $\mathbb{R}$

و نرمز بـــ F إلى الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أم خاطئة

a. $f(\ln 2)=-3$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$

c. $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx>1$

d. من اجل كل عدد حقيقي x ،لدينا: $F(x)=1-e^{-x}-x$

2. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=xe^{-x}$.

حدّد إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة ،

برّر الأجوبة.

a. من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\times f(-x)\le 0$

b. من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)+f(x)=e^{-x}$

c. من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\le e^{-1}$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=+\infty$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

3. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=-1+e^{-x+2}$.

أجب بصحيح أم خاطئ على الجمل الرياضية التالية ، مبررا إجابتك.

a. الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

c. الدالة f سالبة تماما على $]-\infty;2[$ و موجبة تماما على $]2,+\infty[$

d. منحنى الدالة f يقبل المستقيم الذي معادلته $y=-1$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$.

e. الدالة $x\mapsto e^{f(x)}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

أ. أجوبة اختيار من متعدد

1.

- تمنح 5 نقط لكل جواب صحيح.
- تنقص 5 نقط بالنسبة لكل جواب خاطئ.
- لا تضاف و لا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة

a. الإجابة **ب) صحيحة** لأن $\left(e^{x+2}\right)^2=e^{2(x+2)}=e^{2x+4}$.

b. الإجابة **أ) صحيحة** لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\ln x\right)=+\infty$ و لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$

c. الإجابة **ب) صحيحة** لأن $e^{-3x+1}<e^{-2x+3}$ تكافئ $-3x+1<-2x+3$ (لأن الدالة exp متزايدة على $\mathbb{R}$) أي $-x<2$ أي $x>-2$ أي $x\in]-2;+\infty[$.

جميع الحقوق محفوظة ©

d. الإجابة أ) **صحيحة** لأن $0<a<b$ يكافئ $e^0<e^a<e^b$ أي $1<e^a<e^b$ أي $\frac{e^a}{e^b}<1$ لأن $e^b>0$.

.1

- تمنح 4 نقط لكل جواب صحيح .
- تنقص4 نقط بالنسبة لكل جواب خاطئ.
- لا تضاف و لا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة

a. الإجابة أ) **صحيحة** لأن $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و $\begin{cases} f'(0)=-1 \\ f(0)=7 \end{cases}$

b. الإجابة **ب) صحيحة** لأن $-1<e^x<8$ تكافئ $e^x<e^{Ln8}$ أي $x<\ln 8$ أي $x<\ln 2^3$ أي $x<3\ln 2$ أي $x\in]-\infty;3\ln 2[$.

c. الإجابة **ب) صحيحة** لأن مشتقة الدالة $x\mapsto U(x)=\frac{1}{2}e^{2x^2+6x+1}+3$ هي الدالة $x\mapsto U'(x)=\frac{1}{2}(4x+6)e^{2x^2+6x+1}$ أي $x\mapsto U'(x)=(2x+3)e^{2x^2+6x+1}$ أي $U'(x)=u(x)$.

ب. أجوبة صحيح أم خاطئ

.1

- تمنح 5 نقطة لكل جواب صحيح.
- تنقص5 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.
- لا تضاف و لا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

a. **خاطئ** لأن $f(\ln 2) = e^{-\ln 2} - 1 = e^{\ln \frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

b. **صحيح** لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

c. **خاطئ** لأن $\int_{-1}^{0} (e^{-x} - 1)dx = \left[-e^{-x} - x\right]_{-1}^{0} = (-e^{0}) - (-e^{1} + 1)$

أي $\int_{-1}^{0} (e^{-x} - 1)dx = -1 + e - 1 = e - 2$ و $e - 2 < 1$.

d. **صحيح** لأن $F'(x) = e^{-x} - 1$.

.2

- تمنح 5 نقطة لكل جواب صحيح.
- تنقص 5 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.

لا تضاف و لا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة

a. **صحيح** لأن $f(x) \times f(-x) = xe^{-x} \times (-x)e^{x} = -x^2 e^{-x+x}$

أي $f(x) \times f(-x) = -x^2 e^{0} = -x^2$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $-x^2 \leq 0$.

b. **صحيح** لأن $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x}$ إذن

$f'(x) + f(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$.

c. **صحيح** لأن: $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$

و $f'(x) \geq 0$ من أجل $x \leq 1$ ، $f'(x) \leq 0$ من أجل $x \geq 1$.

نلاحظ في جدول تغيرات f التالي أن من أجل كل x

من $\mathbb{R}$: $f(x) \leq e^{-1}$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	e^{-1}	↘	

d. **صحيح** لأن: $f'(x)=(1-x)e^{-x}$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty\end{cases}$

.3

- تمنح 3 نقطة لكل جواب صحيح.
- تنقص3 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.

لا تضاف و لا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة

a. **صحيح** لأن: $f'(x)=-e^{-x+2}$، من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)<0$

إذن f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

b. **خاطئ** لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+2}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$

c. **خاطئ** لأن: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)>1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		↘	1

d. **خاطئ** لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب عند $+\infty$.

e. **صحيح** لأن:مشتقة الدالة $x\mapsto e^{f(x)}$ هي $x\mapsto f'(x)e^{f(x)}$ و من كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)<0$.

جميع الحقوق محفوظة ©

VIII. استعد للبكالوريا:

مسألة: (10 نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x+\dfrac{4}{1+e^{x}}$

1. احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2. أ- احسب $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. نرمز بـــ $(\mathcal{C})$ إلى التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ- بين أن المنحني $(\mathcal{C})$ يقبل المستقيم D الذي معادلته $y=x$ كمقارب مائل عند $+\infty$ ، و يقبل المستقيم D' الذي معادلته $y=x+4$ كمقارب مائل عند $-\infty$.

ب- ادرس وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى كل من D و D'

4. بين أن المنحني $(\mathcal{C})$ يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $\alpha\in[-4;-3]$.

5. ارسم $(\mathcal{C})$.

6. أ -عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$\frac{4}{1+e^{x}}=a+\frac{be^{x}}{1+e^{x}}$$

ب- استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

جـــ- احسب المساحة A للحيز المحدد بالمنحني $(\mathcal{C})$ و المستقيم D و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

		الأسئلة	سلّم التنقيط
1)		النهايات	1,5
2)	أ-	حساب f'	1
	ب-	إشارة f'	0,5
		جدول تغيرات f	0,5
3)	أ-	المستقيم المقارب المائل (D)	0,5
		المستقيم المقارب المائل (D')	0,5
	ب-	وضعية $(\mathcal{C})$	1
4)		تقاطع $(\mathcal{C})$ و محور الفواصل	1,5
5)		إنشاء $(\mathcal{C})$	1,5
6)	أ-	تعيين a و b	0,5
	ب-	دالة أصلية لـ: f	0,5
	ج-	حساب المساحة	0,5

حل مفصل

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{1+e^x}=0\end{cases}$

2. أ) لدينا $f(x)=x+4\dfrac{1}{1+e^x}$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

تذكر أن مشتقة الدالة $x \mapsto \frac{1}{u(x)}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

إذن $f'(x)=1-\frac{4e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ أي $f'(x)=\frac{\left(1+e^x\right)^2-4e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$

أي $f'(x)=\frac{1+e^{2x}+2e^x-4e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ أي $f'(x)=\frac{e^{2x}+1-2e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$

أي $f'(x)=\frac{\left(e^x-1\right)^2}{\left(1+e^x\right)^2}$.

ب) $f'(x)=\frac{\left(e^x-1\right)^2}{\left(1+e^x\right)^2}$ إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)\geq 0$

إذن f متزايدة على $\mathbb{R}$.

لاحظ أن $f'(0)=0$ و $f(0)=2$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

3. أ)

- $\begin{cases} f(x)=x+\frac{4}{1+e^x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{1+e^x}\right)=0 \end{cases}$ إذن $(\mathcal{C})$ يقبل المستقيم D الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

http://www.onefd.edu.dz

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+4)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{1+e^{x}}-4\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-4e^{x}}{1+e^{x}}\right)=0$

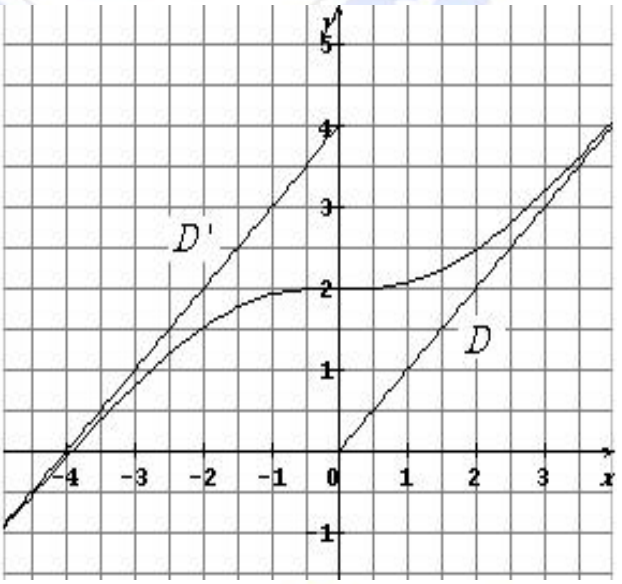
لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ إذن $(\mathcal{C})$ يقبل المستقيم D' الذي معادلته $y=x+4$ كمقارب مائل عند $-\infty$.

ب)

- $f(x)-x=\dfrac{4}{1+e^{x}}$ إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)-x>0$ و منه $(\mathcal{C})$ فوق D.
- $f(x)-(x+4)=\dfrac{-4e^{x}}{1+e^{x}}$ إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)-(x+4)<0$ و منه $(\mathcal{C})$ تحت D'.

4. f مستمرة و متزايدة تماما على $[-4;-3]$(انظر جدول تغيرات f) و $f(-3)\times f(-4)<0$ ($f(-3)=0,810...$ و $f(-4)=-0,719...$)

5.إنشاء $(\mathcal{C})$



http://www.onef

6. أ) $a+\dfrac{be^x}{1+e^x}=\dfrac{a\left(1+e^x\right)+be^x}{1+e^x}=\dfrac{(a+b)e^x+a}{1+e^x}$

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\dfrac{4}{1+e^x}=\dfrac{(a+b)e^x+a}{1+e^x}$ معناه:

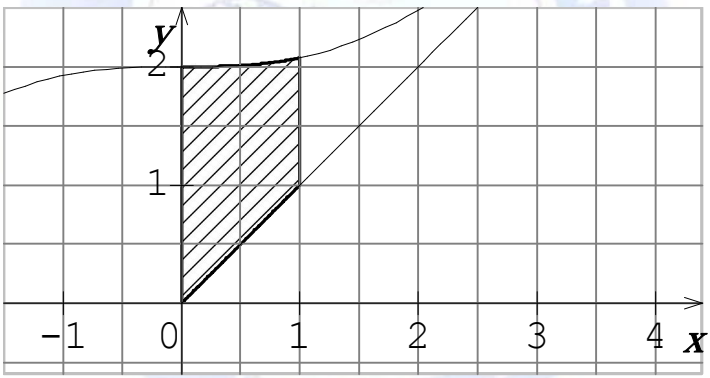
أي $\begin{cases}a+b=0\\a=4\end{cases}$ إذن $\begin{cases}a=4\\b=-4\end{cases}$.

$\dfrac{4}{1+e^x}=4-\dfrac{4e^x}{1+e^x}$

ب) لدينا $f(x)=x+4-4\dfrac{e^x}{1+e^x}$ إذن الدالة

$x\mapsto F(x)=\dfrac{x^2}{2}+4x-4\ln\left(1+e^x\right)$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ج) حساب المساحة A



$A=\int_0^1\left[f(x)-x\right]dx=\left[F(x)-\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1$

أي $A=\left[4x-4\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^1=\left[4-4\ln(1+e)\right]-(-4\ln 2)$

أي $A=4\left[1-\ln(1+e)+\ln 2\right]=4\left[\ln e-\ln(1+e)+\ln 2\right]$

أي $A=4\left[\ln e+\ln 2-\ln(1+e)\right]=4\left[\ln 2e-\ln(1+e)\right]=4\ln\left(\dfrac{2e}{1+e}\right)$

و $A\simeq 1{,}519$.

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة