# 1. الدالة اللوغاريتم النيبيري

**الكفاءات المستهدفة**

- تعريف الدالة اللوغاريتم النيبيري.
- معرفة خواص الدالة اللوغاريتم النيبيري .
- استعمال حاسبة لحساب قيم دوال لوغاريتم نيبيري.
- حساب نهايات تتضمن لوغاريتم نيبيري.
- دراسة دوال من الشكل $\ln \circ u$ .

## تصميم الدرس

**تعريف**

I. تعريف- اتجاه التغير- إشارة $x \mapsto \ln(x)$

II. خواص جبرية.

III. دراسة الدالة "اللوغاريتم النيبيري"

IV. دراسة الدالة $\ln \circ u$

V. دالة اللوغاريتم العشري

VI. ملخص

VII. توظيف المعارف (تمارين + حلول وإرشادات)

VIII. تقويم ذاتي (اختيار من متعدد + صحيح أم خاطئ)

IX. استعد للبكالوريا (مسألة محلولة مع سلّم التنقيط)


جميع الحقوق محفوظة ©

## تعريف:

**ابن حمزة المغربي:** جزائري الأصل، من العلماء البارزين في القرن العاشر للهجرة (أي السادس عشر للميلاد) و قد قضى فترة من الزمن
في استانبول يُدرِّس علم الرياضيات.
هو ممن مهدوا لاختراع اللوغاريتمات، وكانت بحوثه في المتواليات هي الأساس الذي بني عليه هذا الفرع من الرياضيات، فقد تكلم عن الصلة بين المتوالية الحسابية والهندسية كلاماً جعله واضعاً لأصول اللوغاريتمات.
وقد شكلت نتائجه هذه حجر الأساس الذي اعتمد عليه العالم نابير الاسكتلندي لتطوير علم اللوغاريتمات.
كان ابن حمزة مغرماً بعلم الحساب إلى درجة أنه، عندما ذهب لأداء مناسك الحج، أقام في مكة المكرمة مدة من الزمن يعلِّم الحساب لحجاج
بيت الله الحرام.
من أهم مؤلفاته كتابه "تحفة الأعداد لذوي الرشد والسداد" و قد كان تحفة فريدة في بحث المسائل الحسابية التي يستعملها الناس كل يوم، كما تعرض للمسائل التي تدور حول المساحات والحجوم، وكتب كتابه هذا
باللغة التركية وألفه بمكة المكرمة في مقدمة وأربعة فصول وخاتمة.

جون نابير

**جون نابير(1550 م – 1617 م)**
قام الرياضياتي الاسكتلندي جون نابير بنشر كتابه « وصف قاعدة اللوغاريتمات العجيبة» عام **1614** فافتتح به عهد اللوغاريتمات الحديثة.

http://www.oneld.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## I. تعريف- اتجاه التغير- إشارة $x \mapsto \ln(x)$ :

### نشاط1

من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم، نعتبر الدالة $f_n$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f_n(x)=\frac{1}{x^n}$

1. عين دالة أصلية على المجال $]0;+\infty[$ لكل دالة من الدوال التالية:

$f_2$ ، $f_3$ ، $f_4$ .

2. اشرح لماذا لا تسمح النتيجة المستعملة في السؤال الأول من تعيين دالة أصلية للدالة $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$ .

3. نعلم أن الدالة $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ فهي تقبل إذن دوالا أصلية على هذا المجال و تقبل بصفة خاصة دالة أصلية وحيدة تأخذ القيمة 0 من أجل القيمة 1 للمتغير.

**تعريف:** *تسمى الدالة الأصلية للدالة* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *و التي تنعدم عند* 1، *دالة اللوغاريتم النيبيري و نرمز إليها بـ* $\ln$.

- عبر من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ عن $\ln(x)$ باستعمال التكامل.
- من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$، عين عبارة الدالة المشتقة للدالة: $x \mapsto \ln(x)$ . استنتج اتجاه تغير الدالة $x \mapsto \ln(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.
- عين إشارة $Ln(x)$ .باستعمال اللمسة LN لحاسبة احسب $Ln(2)$ و $Ln(0,5)$.

http://www.onefd.edu.dz © الحقوق محفوظة

**حل**

**1.** من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم، مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f_n$ على $]0;+\infty[$ هي مجموعة الدوال من الشكل $x \mapsto F_n(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ ومنه $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ دالة أصلية للدالة $f_2$ ؛ $x \mapsto -\dfrac{1}{3x^3}$ دالة أصلية للدالة $f_3$ ؛ $x \mapsto -\dfrac{1}{2x^2}$ دالة أصلية للدالة $f_4$ .

**2.** في الحالة $n=1$ :مقام $F_n(x)$ يساوي 0من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ للدالة $f_1$ .

**3.** تذكر أن بصفة عامة:

$[a;b]$مجال يشمل $x_0$ و $x$ ؛ $f$ دالة مستمرة على $[a;b]$. الدالة الأصلية $F$ لـــ: $f$ التي تنعدم عند $x_0$ هي $x \mapsto F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ .

- لدينا $Ln(1) = 0$ إذن $Ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ .
- مشتقة الدالة $x \mapsto Ln(x)$ على $]0;+\infty[$ هي الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ .

من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ لدينا: $\frac{1}{x} > 0$ إذن الدالة $x \mapsto Ln(x)$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ .

- الدالة $Ln$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و $Ln(1) = 0$ إذن

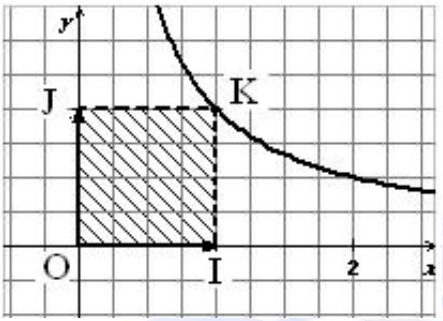
من اجل $0 < x \le 1$ : $Ln(x) \le Ln(1)$ أي $Ln(x) \le 0$

و من اجل $x \ge 1$ : $Ln(x) \ge Ln(1)$ أي $Ln(x) \ge 0$

تعرض الحاسبة: $Ln(2) = 0,6931...$ و $Ln(0,5) = -0,6931...$ .


جميع الحقوق محفوظة ©

## نشاط 2




ليكن $(C)$ التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

و حدة المساحة هي مساحة المربع $0IKJ$ حيث $K(1;1)$.

نسمي $a(t)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C)$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=t$.

1. عبر عن $a(t)$ بدلالة $\ln(t)$. نميز الحالتين: $t>1$ و $0<t<1$.
2. استنتج قيمة مقربة لـــ: $Ln(2)$.

## حل

1. لدينا $\int_1^t \frac{1}{x}dt = Ln(t)$

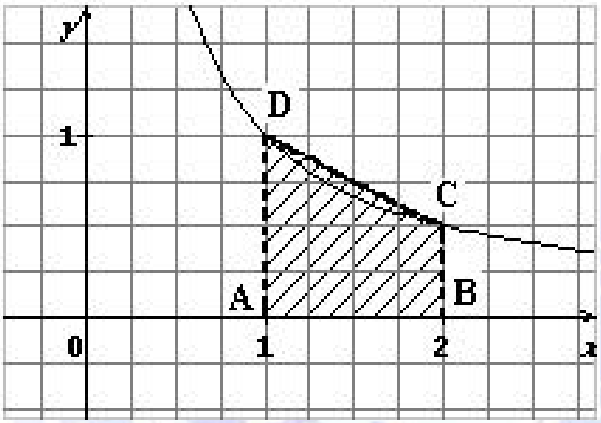
- في الحالة $t>1$: لدينا $\begin{cases} t>1 \\ \frac{1}{x}>0 \end{cases}$ إذن $a(t)=Ln(t)$
- في الحالة $t>1$: لدينا $\begin{cases} t<1 \\ \frac{1}{x}>0 \end{cases}$ إذن $a(t)=-Ln(t)$

2. $Ln(2)$ يعبر عن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C)$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

إذن مساحة شبه المنحرف $ABCD$ (انظر الشكل الآتي) تعبر عن قيمة مقربة لـــ: $Ln(2)$ أي $Ln(2) \simeq \frac{(AD+BC)\times AB}{2}$

أي $Ln(2) \simeq \frac{(1+0,5)\times 1}{2}$ أي $Ln(2) \simeq 0,75$ (انظر النشاط1).




**تعريف**

نسمي الدالة اللوغاريتم النيبيري و نرمز إليها بالرمز " $Ln$ " الدالة الأصلية على $]0;+\infty[$ للدالة $t \mapsto \frac{1}{t}$ و التي تنعدم عند 1 .

**ترميز:** نرمز إلى اللوغاريتم النيبيري لعدد $x$ من $]0;+\infty[$ بـــ $Ln(x)$ و أحيانا $Lnx$ .

**ملاحظة**

الدالة $t \mapsto \frac{1}{t}$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ فهي تقبل إذن دوالا أصلية

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

على هذا المجال و تقبل بصفة خاصة دالة أصلية وحيدة تأخذ القيمة 0 من أجل القيمة 1 للمتغير.

لدينا هكذا: من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ ، $\mathrm{Ln}(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

**مثال**

باستعمال حاسبة نتحصل مثلا على: $\ln 3 \approx 1,09861$.

## اتجاه تغير الدالة $Ln$

- من التعريف لدينا: $\ln(1)=0$
- الدالة اللوغاريتم النيبيري قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ ، $(\ln)'(x)=\frac{1}{x}$.

من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ ، $\frac{1}{x}>0$ و منه الدالة " $\mathrm{Ln}$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Ln'(x)$ | ‖ | $+$ | | $+$ | |
| $Ln(x)$ | ‖ | ↗ | $0$ | ↗ | |

**خواص**

نستنتج من الفقرة السابقة أن من أجل كل عددين حقيقيين $a$ و $b$ من $]0;+\infty[$ لدينا:

- $\ln a=\ln b$ يعني $a=b$.
- $\ln a<\ln b$ يعني $a<b$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## إشارة $Ln(x)$

من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ لدينا:

$\ln x = 0$ * يعني $x = 1$.

$\ln x > 0$ * يعني $x > 1$.

$\ln x < 0$ * يعني $0 < x < 1$.

## تطبيق1

حل المعادلة (1) و المتراجحة (2) المعرفتين على المجموعة $D = ]-5;-1[ \cup ]1;3[$:

$$\ln\left(x^2-1\right) = \ln(x+5) \quad (1)$$

$$\ln\left(x^2-1\right) < \ln(x+5) \quad (2)$$

## حل

## طريقة

- لحل المعادلة $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$ في المجموعة $D$ ، نحل في $D$ المعادلة $u(x) = v(x)$. وهذا تطبيقا للخاصية:

  $\ln a = \ln b$ إذا وفقط إذا كان $a = b$.

- لحل المتراجحة $\left(\ln[u(x)] < \ln[v(x)]\right.$ في المجموعة $D$ ، نحل في $D$ المتراجحة $\left.u(x) < v(x)\right)$. وهذا تطبيقا للخاصية:

  $\ln a < \ln b$ إذا وفقط إذا كان $a < b$.

- إذن المعادلة $\ln\left(x^2-1\right) = \ln(x+5)$ (1) تكافؤ المعادلة $x^2-1 = x+5$ من أجل كل $x$ من $D$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

ومنه نجد $x^2-x-6=0$

حلا المعادلة $x^2-x-6=0$ هما $(-2)$ و 3 و كلاهما عنصر من $D$.

- المتراجحة $(2)$ $\ln\left(x^2-1\right)<\ln\left(x+5\right)$ تكافؤ المتراجحة

$x^2-1<x+5$ من أجل كل $x$ من $D$.

ومنه نجد $x^2-x-6<0$

ومنه نجد الحلول هي: $]-2;-1[\cup]1;3[$

## تطبيق2

عين حسب قيم $x$ إشارة $\ln\left(x-3\right)$ .

## حل

- $\ln\left(x-3\right)\le 0$ يعني $0<x-3\le 1$ أي $3<x\le 4$.
- $\ln\left(x-3\right)>0$ يعني $x-3>1$ أي $x>4$.

| $x$ | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Ln\left(x-3\right)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |


جميع الحقوق محفوظة ©

## II. خواص جبرية للدالة $Ln$ :

**نشاط**

نعتبر العددين $a$ ، $b$ حيث $a=138,3$ و $b=47,8$

1. باستعمال حاسبة أحسب الجداء $a\times b$ ثم $\ln(a\times b)$.

2. باستعمال حاسبة أحسب $\ln(a)$ ، $\ln(b)$ ثم المجموع $\ln(a)+\ln(b)$

ضع تخمينا.

**حل**

1. تعرض الحاسبة:

$6610,74$ لـــ: $a\times b$ و $8,796450878$ لـــ: $Ln(a\times b)$.

2.تعرض الحاسبة:

$4,929425239$ لـــ: $Ln(a)$ ، $3,867025639$ لـــ: $Ln(b)$

و $8,796450878$ لـــ: $Ln(a)+Ln(b)$.

مخمنة: $Ln(a\times b)=Ln(a)+Ln(b)$.

**مبرهنة (الخاصية الأساسية)**

من أجل كل عددين حقيقيين $a$ و $b$ من $]0;+\infty[$ ، لدينا

$\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

**برهان**

$f$ هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ: $f(x)=\ln(ax)-\ln(x)$ ، $a>0$.


جميع الحقوق محفوظة ©

من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$، $f'(x)=a\times\frac{1}{ax}-\frac{1}{x}=0$ و منه $f$ دالة ثابتة على $]0;+\infty[$.

لدينا $f(1)=\ln(a)-\ln(1)=\ln(a)$. إذن من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$، $f(x)=\ln(a)$ و بالتالي:

$\ln(ax)-\ln(x)=\ln(a)$ و هكذا من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$، $\ln(ax)=\ln(a)+\ln(x)$. نأخذ $x=b$.

**نتيجة1**

من أجل كل عددين حقيقيين $a$ و $b$ من $]0;+\infty[$،

$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ و $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

**برهان**

* من أجل $a$ من $]0;+\infty[$: $a\times\frac{1}{a}=1$ و منه $\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=0$ أي $\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{a}\right)=0$ و منه $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$.

* من أجل $a$ و $b$ من $]0;+\infty[$:

$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\left(\frac{1}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

**نتيجة2**

من أجل كل $a$ من $]0;+\infty[$ و من أجل كل $n$ من $\mathbb{Z}$، $\ln\left(a^n\right)=n\ln a$.

**برهان**

$a$ عدد حقيقي من $]0;+\infty[$ و $n$ عدد صحيح نسبي. نميز الحالات التالية:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

الحالة الأولى: $n \geq 0$ . نستعمل البرهان بالتراجع. و من أجل ذلك نسمي $P(n)$ الخاصية $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$ .

- من أجل $n = 0$ لدينا: $\ln\left(a^0\right) = \ln(1) = 0 = 0\ln a$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.
- فرضية التراجع: نفرض صحة $P(n)$ من أجل $n$ حيث $n \geq 0$ أي $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$ .
- وراثية الخاصية ابتداء من الرتبة 0: نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $\ln\left(a^{n+1}\right) = (n+1)\ln a$ . لدينا:

$$\ln\left(a^{n+1}\right) = \ln\left(a^n \times a\right) = \ln\left(a^n\right) + \ln a = n\ln a + \ln a = (n+1)\ln a$$

و منه $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$ .

الحالة الثانية: $n < 0$ .

$$\ln\left(a^n\right) = \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln\left(a^{-n}\right) = -(-n)\ln a = n\ln a$$ لأن $-n > 0$ .

**نتيجة3**

من أجل كل عدد حقيقي $a$ من $]0;+\infty[$ ، $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$ .

**برهان**

من أجل $a$ من $]0;+\infty[$ ، $\ln a = \ln\left[\left(\sqrt{a}\right)^2\right] = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$ و منه $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$ .


جميع الحقوق محفوظة ©

**تطبيق1**

حل المعادلة (1) و المتراجحة (2) المعرفتين على المجموعة $D=]-2;+\infty[$ :

$\ln(x+2)+\ln(x+3)=\ln 6$ (1)

و (2) $\ln(x+2)+\ln(x+3)\le \ln 6$ .

**حل**

**ملاحظة**

- الكتابة $\ln a+\ln b$ تفرض أن يكون $a>0$ و $b>0$
- بينما الكتابة $\ln(a\times b)$ تفرض أن يكون $ab>0$ و هذا يعني أنه يمكن للعددين $a$ و $b$ أن يكونا سالبين معا.

1) نحل الآن المعادلة (1) على $D=]-2;+\infty[$

من أجل كل $x$ من $D$ ، (1) تكافؤ $\ln(x+2)(x+3)=\ln 6$

و هذا يعني $(x+2)(x+3)=6$ أي $x^2+5x=0$

نعلم أنّ للمعادلة $x^2+5x=0$ حلان هما $(-5)$ و $0$.

ونلاحظ أن $0$ عنصرا من $D$ بينما $(-5)$ لا ينتمي إلى $D$.

ومنه نستنتج أنّ مجموعة الحلول هي إذن $S=\{0\}$.

2) نحل الآن المتراجحة (2) على $D=]-2;+\infty[$

من أجل كل $x$ من $D$ ، (2) تكافؤ $\ln(x+2)(x+3)\le \ln 6$

و هذا يعني $(x+2)(x+3)\le 6$ أي $x^2+5x\le 0$.

$x^2+5x\le 0$ أي $x(x+5)\le 0$ يعني $-5\le x\le 0$ و منه $x\in[-5;0]$

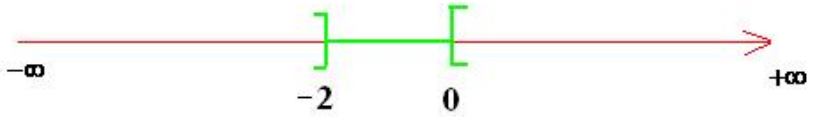
علما أن $x\in D$ نستنتج أن مجموعة الحلول هي $x$ بحيث

$x\in[-5;0]\cap D$ أي $x\in]-2;0]$ .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

إذن الحلول هي قيم المجال $]-2;0[$ .

يمكن تمثيل الحلول على المستقيم العددي كما هو موضح أدناه




## تطبيق2

$x$ عدد حقيقي موجب تماما. اختصر الكتابة $A(x)=Ln\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ .

## حل

$$A(x)=Ln\sqrt{\left(x\sqrt{x\sqrt{x}}\right)}=\frac{1}{2}Ln\left(x\sqrt{x\sqrt{x}}\right)$$

$$A(x)=\frac{1}{2}\left[Lnx+Ln\sqrt{\left(x\sqrt{x}\right)}\right]=\frac{1}{2}\left[Lnx+\frac{1}{2}Ln\left(x\sqrt{x}\right)\right] \text{ أي}$$

$$A(x)=\frac{1}{2}Lnx+\frac{1}{4}Ln\left(x\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}Lnx+\frac{1}{4}\left[Lnx+Ln\sqrt{x}\right] \text{ أي}$$

$$A(x)=\frac{1}{2}Lnx+\frac{1}{4}\left[Lnx+\frac{1}{2}Lnx\right]=\frac{1}{2}Lnx+\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}Lnx\right]=\frac{7}{8}Lnx \text{ .}$$

## تطبيق3

بلغ عدد سكان بلد 10 ملايين نسمة يوم 2007/01/01 .

1. في أي سنة يصبح عدد السكان ضعف ما كان عليه إذا علمت أن عدد السكان يرتفع سنويا بنسبة 5% ؟
2. في أي سنة يصبح عدد السكان نصف ما كان عليه إذا علمت أن عدد السكان ينقص سنويا بنسبة 5% ؟

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

**حل**

**1.** في 01 جانفي من السنة $2007+n$ يكون عدد سكان البلد هو

$10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$ أي $10^6(1,05)^n$.

تعيين أصغر عدد طبيعي $n$ يحقق $10^6(1,05)^n \geq 2\times 10^6$

أي $(1,05)^n \geq 2$.

$(1,05)^n \geq 2$ يعني $\ln(1,05)^n \geq \ln(2)$

لأن الدالة " ln " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

نحصل على $n\ln(1,05) \geq \ln(2)$ أي $n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,05)}$

لأن $\ln(1,05) > 0$ لأن $1,05 > 1$.

لدينا $\frac{\ln(2)}{\ln(1,05)} \approx 14,20$. و منه أصغر عدد طبيعي $n$ هو $n=15$.

يتضاعف إذن عدد سكان هذا البلد بعد 15 سنة أي سنة 2022.

**2.** في 01 جانفي من السنة $2007+n$ يكون عدد سكان البلد هو

$10^6\left(1-\frac{5}{100}\right)^n$ أي $10^6(0,95)^n$.

لنعين أصغر عدد طبيعي $n$ يحقق $10^6(0,95)^n \leq 0,5\times 10^6$

أي أصغر عدد طبيعي $n$ يحقق $(0,95)^n \leq 0,5$

ومنه $n\ln(0,95) \leq \ln(0,5)$

وأخيرا نجد: $n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}$ لأن $\ln(0,95) < 0$. أي $n \geq 13,51$.

ومنه فإنّ أصغر عدد طبيعي $n$ يحقق المطلوب هو $n=14$.

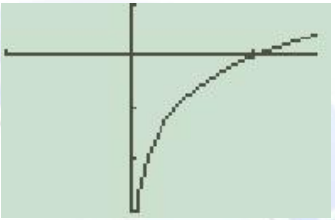
http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

## III.دراسة دالة اللوغاريتم النيبيري:

**نشاط**

باستعمال حاسبة بيانية مثلنا في الشكل التالي التمثيل البياني للدالة $Ln$

( اخترنا النافذة : $-1 < x < 1,5$ و $-3 < y < 1$)



أ) أكمل الجدول التالي:

| $x$ | 0,01 | 0,001 | 0,0001 | 0,00001 | 0,000001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | | | | | |

خمن نهاية الدالة $\ln$ عند $0$.

ب) أكمل الجدول التالي:

| $x$ | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | | | | | |

خمن نهاية الدالة $\ln$ عند $+\infty$.

**حل**

أ)

| $x$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | $-4,6...$ | $-6,9...$ | $-9,2...$ | $-11,5...$ | $-13,8...$ |

مخمنة: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} Ln(x) = -\infty$

http://www.onefd.edu.dz

ب)

| $x$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | 4,6... | 6,9... | 9,2... | 11,5... | 13,8... |

**مخمنة:** $\lim\limits_{x\to+\infty} Ln(x)=+\infty$ .

## النهايات

- **خاصية1:** نقبل بدون برهان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} Ln(x)=+\infty$ .
- **خاصية2:** $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} Ln(x)=-\infty$

## برهان

من أجل $x$ من $]0;+\infty[$، نضع $X=\dfrac{1}{x}$ و منه

$\ln X=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$ . لدينا: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} X=+\infty$

و من الخاصية (1) لدينا: $\lim\limits_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$ و هكذا فإن

$\lim\limits_{x\to0}\ln x=\lim\limits_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$ .

## جدول التغيرات

- دالة اللوغاريتم النيبيري قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$، $(\ln)'(x)=\dfrac{1}{x}$


جميع الحقوق محفوظة ©

• من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$، $\frac{1}{x}>0$ و منه الدالة " ln " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

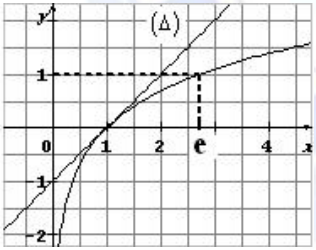
| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Ln'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $Ln(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

## التمثيل البياني

ليكن $(C)$ التمثيل البياني لدالة اللوغريتم النيبيري

• المنحني $(C)$ الممثل للدالة اللوغاريتم النيبيري يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.

• لدينا $\ln'(1)=1$ و $\ln 1=0$. إذن يقبل المنحني $(C)$ عند النقطة ذات الفاصلة $1$ مماسا $(\Delta): y=x-1$.




## العدد $e$

الدالة " ln " مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $\ln x=1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;+\infty[$.

نرمز إلى هذا الحل بالرمز " $e$ ".


جميع الحقوق محفوظة ©

## تعريف

العدد $e$ هو العدد الذي لوغاريتمه النيبيري يساوي 1. $(\ln e = 1)$.

تعطينا الحاسبة $e = 2,71828182...$.

## تطبيق 1

ليكن $(\Delta)$ مماس المنحنى $(C)$ الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ عند النقطة $A(e;1)$.

1. أكتب معادلة للمماس $(\Delta)$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{e}x$. احسب $f(e)$.
3. استنتج وضعية المنحنى $(C)$ بالنسبة للمماس $(\Delta)$.

## حل

1. معادلة $(\Delta)$ هي: $y = \frac{1}{e}(x-e)+1$ و منه $(\Delta): y = \frac{1}{e}x$

2. من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ لدينا

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex}.$$

بما أن $x > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $e-x$.

و هكذا:

من أجل $0 < x \leq e$ $f'(x) \geq 0$

و من أجل $x > e$ $f'(x) < 0$.

$f(e) = 0$ هي القيمة الحدية العظمى للدالة $f$ على $]0;+\infty[$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

| $x$ | $0$ | $e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | $0$ | |

3. من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ ، $f(x)\le 0$ أي من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ ، $\ln(x)\le \frac{1}{e}x$ .

نستنتج إذن أن المنحنى $(C)$ يقع تحت المماس $(\Delta)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

## تطبيق2

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]0;e[\cup]e;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$

1. أدرس نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ .

## حل

1. دراسة نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجموعة تعريفها.

- لدينا: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=-1$


جميع الحقوق محفوظة ©

لأنّ: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln x}=0\end{array}\right\}$

- ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x\left(\dfrac{1}{\ln x}+1\right)}{\ln x\left(\dfrac{1}{\ln x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{\ln x}+1\right)}{\left(\dfrac{1}{\ln x}-1\right)}=-1$

لأنّ: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0\end{array}\right\}$

- $\lim\limits_{x\to e}(1+\ln x)=2$
- $\lim\limits_{x\to e}(1-\ln x)=0$ و بما أن $1-\ln x>0$ من أجل $x<e$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}e}f(x)=+\infty$ .
- $\lim\limits_{x\to e}(1-\ln x)=0$ و بما أن $1-\ln x<0$ من أجل $x>e$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}e}f(x)=-\infty$ .

2. الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجالين $]0;e[$ ، $]e;+\infty[$ و لدينا من أجل كل $x$ من $]0;e[\cup]e;+\infty[$ ،

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x)-\left(-\frac{1}{x}\right)(1+\ln x)}{(1-\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}{(1-\ln x)^2}=\frac{2}{x(1-\ln x)^2}$$

بما أن $x>0$ فإن الدالة $f$ متزايدة تماما على كل من المجالين $]0;e[$ و $]e;+\infty[$ .

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

## IV.دراسة دالة $\ln\circ u$ :

### النهايات

لدراسة نهاية دالة $\ln\circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال: نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]2;+\infty[$ بـِ $f(x)=\ln(x-2)$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ و بما أن $\lim\limits_{X\to 0}\ln X=-\infty$ فإن

$$\lim_{x\to 2}\ln(x-2)=-\infty \quad \text{أي} \quad \lim_{x\to 2} f(x)=-\infty$$

- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x-2)=+\infty \quad \text{أي} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

### اتجاه التغيرات

### مبرهنة

إذا كانت $u$ دالة معرفة و موجبة تماما على مجال $I$ فإن للدالتين $u$ و $\ln\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال $I$.

### برهان

نعلم أن الدالة " ln " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$. إذن حسب مبرهنة اتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين $u$ و $\ln\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال $I$.

### مثال

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]1;+\infty[$ بـِ $f(x)=\ln\left(\dfrac{3}{x-1}\right)$.

نلاحظ أن $f=\ln\circ u$ حيث $u$ هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بالعبارة

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

$u(x)=\dfrac{3}{x-1}$.

بما ان الدالة $u$ متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فإن الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

## المشتقة و الدوال الأصلية

### خاصية

إذا كانت $u$ دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال $I$ فإن:

- الدالة $\ln\circ u$ قابلة للاشتقاق على $I$ و لدينا من أجل كل $x$ من $I$ :
$(\ln\circ u)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- الدالة $x\mapsto \ln\left[u(x)\right]$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على $I$.

### برهان

- يكفي تطبيق المبرهنة المتعلقة بمشتقة دالة مركبة.
- يكفي حساب مشتقة الدالة $x\mapsto \ln\left[u(x)\right]$.

### مثال

- مشتقة الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$ هي $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$
- الدالة $F$ حيث $F(x)=\ln(2x+1)$ هي دالة أصلية للدالة $f$ حيث $f(x)=\dfrac{2}{2x+1}$ على $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.


جميع الحقوق محفوظة ©

## تطبيق 1

$f$ دالة معرفة على $]1;+\infty[$ بـِ $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)-\ln\left(x^2-1\right)$

أدرس نهايتي الدالة $f$ عند 1 و عند $+\infty$.

## حل

- لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left(x^2+1\right)=2$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\ln\left(x^2+1\right)=\ln 2$ .
- لدينا $\left(x^2-1\right)\xrightarrow{>}0$ لمّا $x\xrightarrow{>}1$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\ln\left(x^2-1\right)=-\infty$

نستنتج أن $\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln\left(x^2+1\right)-\ln\left(x^2-1\right)\right]=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$ .

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x^2+1\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x^2-1\right)=+\infty$ . إذن حالة عدم التعيين $+\infty-\infty$ . نزيلها بكتابة $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$ مع العلم أن $x$ من $]1;+\infty[$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)=1$ وبما أن $\lim\limits_{X\to 1}\ln X=0$ حيث $X=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ .

## تطبيق 2

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]0,5;+\infty[$ بـِ $f(x)=x+3\ln(2x-1)$

1. أحسب $f'(x)$ .

2. عين معادلة لـِ $(\Delta)$ مماس المنحني $(C)$ الممثل للدالة $f$ عند النقطة التي فاصلتها 1.

## حل

1. من أجل كل $x$ من $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f'(x)=1+3\times\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{2x+5}{2x-1}$ .


جميع الحقوق محفوظة ©

2. لدينا: $f(1)=1$ و $f'(1)=7$. لدينا

$(\Delta): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(\Delta): y=7x-6$.

**تطبيق3**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{5x-1}{x^2-1}$

1 .تحقق أنه من أجل كل $x$ من $]1;+\infty[$، $f(x)=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}$.

2. عين دالة أصلية للدالة $f$ على $]1;+\infty[$.

**حل**

1. من أجل كل $x$ من $]1;+\infty[$،

$\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)+3(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{5x-1}{x^2-1}$.

2. بوضع $u(x)=x-1$ و $v(x)=x+1$

يكون $u'(x)=1$ و $v'(x)=1$

و بالتالي يمكن كتابة العبارة $f(x)$ كما يلي:

$$f(x)=2\times\frac{u'(x)}{u(x)}+3\times\frac{v'(x)}{v(x)}$$

وبما أنه من أجل كل $x$ من $]1;+\infty[$، لدينا:

$u(x)>0$ و $v(x)>0$

فإنّ الدالة $F$ حيث $F(x)=2\ln\left[u(x)\right]+3\ln\left[v(x)\right]$ هي دالة أصلية للدالة $f$ على $]1;+\infty[$

نجد هكذا $F(x)=2\ln(x-1)+3\ln(x+1)$.


جميع الحقوق محفوظة ©

## V. دالة اللوغاريتم العشري:

### تعريف

دالة اللوغاريتم العشري هي الدالة التي نرمز إليها بالرمز "$\log$" والمعرفة على $]0;+\infty[$ بـِ: $\log(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

### أمثلة

- $\log(1)=\dfrac{Ln(1)}{Ln(10)}=0$ ، $\log(0,1)=\dfrac{Ln\left(10^{-1}\right)}{Ln(10)}=-1$ ، $\log(10)=\dfrac{Ln(10)}{Ln(10)}=1$.
- من أجل كل $n$ من $\mathbb{Z}$ لدينا: $\log\left(10^{n}\right)=\dfrac{Ln\left(10^{n}\right)}{Ln(10)}=\dfrac{nLn(10)}{Ln(10)}=n$

### تطبيق

نعتبر العدد الطبيعي $N$ حيث: $N=3^{10518}$.

عين باستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log N$. استنتج الحصر:

$10^{5018}\le N<10^{5019}$ ثم حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد $N$.

### حل

$\log N=10518\log 3$ و $\log N=5018,3...$ إذن $5018<\log N<5019$.

$5018<\dfrac{LnN}{Ln10}<5019$ أي $5018Ln10<LnN<5019Ln10$

أي $Ln10^{5018}<LnN<Ln10^{5019}$ أي $10^{5018}<N<10^{5019}$.

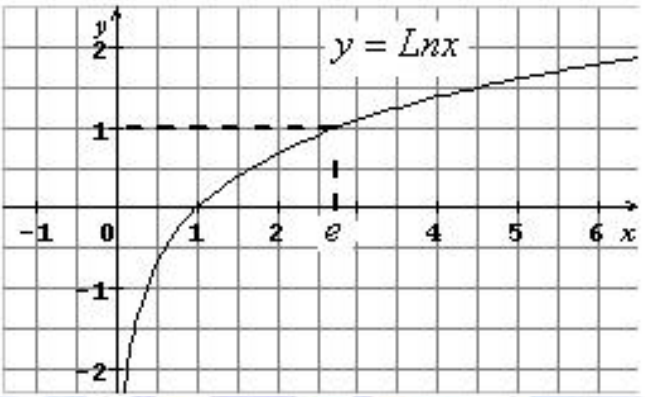
عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد $N$ هو 5019 .

### ملاحظة

إذا كان $10^{n}\le N<10^{n+1}$ ، $n\in\mathbb{N}^{*}$ فإن عدد أرقام $N$ هو $n+1$.

## VI.ملخص:

### 1. القراءة البيانية




يمكن استعمال التمثيل البياني للدّالة $Ln$ لاستنتاج نتائج عديدة:

- $Lnx$ معرف فقط من أجل $x>0$ .
- $Ln1=0$ .
- الدّالة $Ln$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ .
- $Lnx>0$ يكافئ $x>1$ و $Lnx<0$ يكافئ $0<x<1$ .
- $\lim\limits_{x\to+\infty} Lnx=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} Lnx=-\infty$ .

### 2. دوال مشتقة ودوال أصلية

- $Ln$ هي دالة أصلية للدّالة مقلوب على $]0;+\infty[$ .
- إذا كانت $u$ دالة موجبة تماما على مجال $I$ و قابلة للاشتقاق على $I$ فإن:
  - مشتقة الدّالة $Lnu$ على $I$ هي الدالة $\frac{u'}{u}$ .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

- $Lnu$ هي دالة أصلية لـــ: $\frac{u'}{u}$ على $I$ .

### 3. خواص

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان تماما و $n \in \mathbb{Z}$ .

- الدالة $Ln$ تحول جداء إلى مجموع أي: $Ln(ab) = Lna + Lnb$ و كذلك $Ln\left(\frac{a}{b}\right) = Lna - Lnb$ .
- $Lna^n = nLna$ و $Ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}Lna$ .

### 4. المعادلة $Ln(x) = m$

من أجل كل عدد حقيقي $m$ ، المعادلة $Lnx = m$ تقبل حلا وحيدا هو : $x = e^m$ .

### 5. اللوغاريتم العشري

- من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما: $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$ .

$\log(x)$ هو اللوغاريتم العشري للعدد الحقيقي الموجب تماما $x$ .

- $\log(10) = 1$

### 6. خواص

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان تماما و $n \in \mathbb{Z}$

- $Loga^n = n\log a$ ؛ $\log(10)^n = 1$
- الدالة $Log$ تحول جداء إلى مجموع أي: $Log(ab) = Loga + Logb$
- $Log\left(\frac{a}{b}\right) = Loga - Logb$


جميع الحقوق محفوظة ©

## VII. توظيف المعارف:

### أ. تمارين

#### 1.

**1.** نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـِ $g(x)=x^2-1+2\ln(x)$

أ) أحسب نهايات الدالة $g$ عند الأطراف من مجموعة تعريفها.

ب)أدرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل العدد 1 كحل وحيد لها في $]0;+\infty[$.

د) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$.

**2.** نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـِ $f(x)=\ln(x)-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

أ) أحسب نهايات الدالة $f$ عند الأطراف من مجموعة تعريفها.

ب) أحسب $f'(x)$ ثم بين أنه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$، لـِ $f'(x)$ و $g(x)$ نفس الإشارة.

ج) استنتج جدول تغيرات $f$ على $]0;+\infty[$.

د) ليكن $(C)$ و $(\Gamma)$ التمثيلين البيانيين للدالتين $f$ و $\ln$ على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الأطوال هي $4cm$.

أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين $(C)$ و $(\Gamma)$ ثم أرسمهما.

#### 2.

$(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0=a$ و من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$، $v_n=\ln(u_n)$

**1.** نفرض $u_0=9$ و من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$

http://www.onefd.edu

أ) عين القيم المضبوطة لـ $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ .

ب) عبر بدلالة $\ln 3$ عن كل من $v_0$ ، $v_1$ ، $v_2$ و $v_3$ .

ج) بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تحديد أساسها.

د) عبر عن $v_n$ بدلالة $n$ . ما هي نهاية المتتالية $(v_n)$ ؟

**2.** نفرض $u_0 = 1$ و من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $\ln(u_{n+1}) = -1 + \ln(u_n)$

أ) برهن أنه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$ ، $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}$ ثم استنتج طبيعة المتتالية $(u_n)$.

ب) عبر عن $u_n$ بدلالة $n$ .

ج) بين أن المتتالية $(v_n)$ حسابية يطلب تحديد أساسها.

د) عبر بدلالة $n$ عن المجموع $S_n$ علما أن $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ .

هـ) استنتج بدلالة $n$ عبارة $\ln(u_0 \times u_1 \times ... \times u_n)$ .

**3.**

$f$ هي الدّالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بالشكل $f(x) = 1 - \frac{Lnx}{x+1}$ و $(C)$ هو تمثيلها البياني.

1) $g$ هي الدّالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = -x - 1 + x\,Lnx$ .

أ) ادرس تغيرات $g$ .

ب) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $]3,59\ ;\ 3,60[$.

ج) عيّن إشارة $g(x)$ .

2) أ) بيّن أن للدالتين $f'$ و $g$ نفس الإشارة.

ب) ادرس تغيرات $f$ .

ح) بيّن أن $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{\alpha}$ و استنتج حصر لـ: $f(\alpha)$ سعته $0,002$ .

د) أنشئ $(C)$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

**4.**

$(U_n)$ هي المتتالية الموجبة تماما المعرفة بحدها العام $U_0 = e$ و العلاقة التراجعية $U_{n+1} = e\sqrt{U_n}$ .

$(\beta_n)$ هي المتتالية حيث $\beta_n = 2 - Ln(U_n)$ .

1) بيّن أن المتتالية $(\beta_n)$ هندسية.

2) احسب $\beta_n$ ثم $U_n$ بدلالة $n$ .احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n)$ .

3) عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية $n$ التي من أجلها $\beta_0 + \beta_1 + ..... + \beta_n < 1,96$ .

**5.**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـِ :

$$f(x) = x + 2 - \ln(x+2)$$

1.احسب نهاية الدالة $f$ عند $-2$ .

2. بملاحظة أن $f(x) = (x+2)\left(1 - \dfrac{\ln(x+2)}{x+2}\right)$ ، وباستعمال النتيجة $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X} = 0$ ، عين نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$.

3.احسب مشتقة الدالة $f$ ، ثم شكل جدول تغيرات $f$ .

4. أ) بين أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا واحدا $\alpha$ محصوراً بين 2 و3.

ب- باستعمال الحاسبة ، عين حصرا سعته $10^{-2}$ للعدد $\alpha$ .

5. نرمز بـ $(\mathcal{C})$ إلى منحني الدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس. وحدة الأطوال $1cm$.

عين معامل توجيه المماس $T$ لـ: $(\mathcal{C})$ عند النقطة التي فاصلتها2.

اكتب معادلة $T$ ثم ارسم $T$ و المنحني $(\mathcal{C})$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

**6.**

$f$ هي الدّالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بالشكل $f(x)=\dfrac{1+Lnx}{x}$ و $(C)$ هو تمثيلها البياني.

1)ادرس تغيرات $f$.

2)عين المستقيمات المقاربة للمنحني $(C)$.

3) عين نقطة تقاطع $(C)$ مع محور الفواصل. أنشئ $(C)$.

4) احسب المساحة $S$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C)$ و المستقيمات التي معادلتها $x=\dfrac{1}{e}$ ، $x=e$ و $y=0$.

## ب. حلول التمارين

**1.**

1. أ) حساب النهايات

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=-\infty \quad \text{لأن} \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(x^2-1\right)=-1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} Lnx=-\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \quad \text{لأن} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-1\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} Lnx=+\infty \end{cases}$$

ب) اتجاه تغير $g$ و جدول تغيراتها

من أجل كل $x$ **من** $]0;+\infty[$ : $g'(x)=2x+\dfrac{2}{x}$ و $g'(x)>0$

إذن $g$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

ج)المعادلة $g(x)=0$

بماأن الدالة $g$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و

$0 \in \left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x);\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[$ (أي $0 \in ]-\infty;+\infty[$) فإن المعادلة

$g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $]0;+\infty[$ (حسب مبرهنة القيم المتوسطة) و ذا الحل هو 1 .

د) نستنتج من السؤال ج) أن من أجل $x \in ]0;1]$ لدينا $g(x) \le 0$ و من أجل $x \in [1;+\infty[$ لدينا $g(x) \ge 0$ (انظر جدول تغيرات $g$).

2.أ) حساب النهايات

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} Lnx=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{Lnx}{x_2}=-\infty\end{cases}$$ لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} Lnx\left(1-\dfrac{Lnx}{x^2}\right)=+\infty$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} Lnx=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{Lnx}{x}\right)=0\end{cases}$$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(Lnx-\dfrac{1}{x}\dfrac{Lnx}{x}\right)=+\infty$

ب)حساب $f'(x)$:

http://www.onefd.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{\frac{1}{x}x^2-2xLnx}{x^4}$$ أي $$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{x-2xLnx}{x^4}$$

أي $$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1-2Lnx}{x^3}$$ أي $$f'(x)=\frac{x^2-1+2Lnx}{x^3}$$

أي $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ لدينا $x^3>0$ إذن لـِ $f'(x)$ و $g(x)$ نفس الإشارة.

ج) جدول تغيرات $f$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

د) الأوضاع النسبية للمنحنيين $(C)$ و $(\Gamma)$

نضع $\varphi(x)=(Lnx)-f(x)$ أي $\varphi(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}$

من أجل $0<x\leq 1$ لدينا $\varphi(x)\leq 0$ إذن $(\Gamma)$ تحت $(C)$.

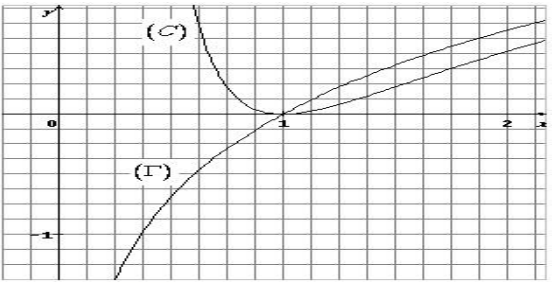
من أجل $x\geq 11$ لدينا $\varphi(x)\geq 0$ إذن $(\Gamma)$ فوق $(C)$.

إنشاء $(C)$ و $(\Gamma)$:

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$ إذن $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$

و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} Ln(x)=-\infty$ إذن $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$

http://www.oneed.edu.dz




2.

1. أ) حساب $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ .

$u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{9} = 3$ ، $u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{3}$ ، $u_3 = \sqrt{u_2} = \sqrt{\sqrt{3}}$ .

ب) حساب $v_0$ ، $v_1$ ، $v_2$ و $v_3$

$$v_0 = Ln(u_0) = Ln(9) = Ln(3^2) = 2Ln(3)$$

$$v_1 = Ln(u_1) = Ln(3) \quad ، \quad v_2 = Ln(u_2) = Ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}Ln3$$

$$v_3 = Ln(u_3) = Ln\sqrt{(\sqrt{3})} = \frac{1}{2}Ln\sqrt{3} = \frac{1}{4}Ln3 .$$

ج) نبين أن $(v_n)$ هندسية

$$v_{n+1} = Ln(u_{n+1}) = Ln(\sqrt{u_n}) = \frac{1}{2}Ln(u_n) = \frac{1}{2}v_n$$

من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا: $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ إذن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

د) حساب $v_n$ بدلالة $n$ و نهاية $(v_n)$

- $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 2Ln(3)$، إذن من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا: $v_n = (2Ln3)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $\frac{1}{2} \in ]-1;1[$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$ .

2.أ)لنبرهن أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}$

- $\ln(u_{n+1}) = -1 + \ln(u_n)$ معناه $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -1$

أي $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -1$ أي $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\ln e$ أي $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln e^{-1}$

أي $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\frac{1}{e}$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}$.

- من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}$ أي $u_{n+1} = \frac{1}{e}u_n$

إذن المتتالية $(u_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{e}$.

ب) حساب $u_n$ بدلالة $n$

$(u_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{e}$ و حدها الأول $u_0 = 1$، إذن من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا: $u_n = \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

ج)لنبرهن أن المتتالية $(v_n)$ حسابية

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(u_n \times \frac{1}{e}\right) = \ln(u_n) + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = v_n - 1$$

من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا: $v_{n+1} = v_n - 1$ إذن $(v_n)$ متتالية حسابية أساسها $-1$.

د) حساب $S_n$

$$S_n = \frac{(v_0 + v_n)(n+1)}{2}$$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

لدينا $v_0 = \ln(u_0) = \ln 1 = 0$ و $v_n = v_0 + n(-1)$ أي $v_n = -n$

إذن $S_n = \dfrac{-n(n+1)}{2}$.

هـ) حساب $P_n$ بدلالة $n$

$$\ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n) = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ldots + \ln(u_n)$$

أي $\ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n) = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

أي $\ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n) = S_n$ .

## 3.

1) أ) تغيرات g

مجموعة التعريف: $D_g = ]0;+\infty[$

- النهايات: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = -1$ لأن $\begin{cases} -x-1 \to -1 \\ xLnx \to 0 \end{cases}$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\dfrac{-x-1}{x} + Lnx\right] = +\infty$

$$\begin{cases} \dfrac{-x-1}{x} \to -1 \\ Lnx \to +\infty \end{cases}$$

- حساب $g'(x)$ : $g'(x) = Lnx$
- جدول التغيرات:

| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| g' | — | 0 | + |
| g | $-1$ ↘ | $-2$ | ↗ $+\infty$ |

ب) المعادلة $g(x) = 0$

لدينا :

- $g$ مستمرة و متزايدة تماما على $[3,59\ ;\ 3,60]$ (جدول تغيرات $g$).

http://www.oneid.edu.dz © جميع الحقوق محفوظة

• $g(3,6)\times g(3,59)<0$ لأن $g(3,59)=-0,0014\ldots$ و $g(3,6)=0,011\ldots$

إذن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $3,59\le\alpha\le 3,6$ .

ج) إشارة $g(x)$

| x | 0 | 1 | 3,59 | $\alpha$ | 3,6 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| g | $-1$ ↘ | $-2$ | — | 0 | + | $+\infty$ ↗ |

لدينا $g(x)\le 0$ عندما $x\in]0;\alpha]$ و لدينا $g(x)\ge 0$ عندما $x\in[\alpha;+\infty[$

2) أ) $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ إذن لـ: $f'$ نفس الإشارة لأن $(x+1)^2>0$.

ب) اتجاه تغير $f$ :

- مجموعة التعريف: $D_f=]0;+\infty[$
- النهايات: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}-Lnx\to+\infty\\ x+1\to 0^+\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x}{x+1}\dfrac{Lnx}{x}\right)=1$ لأن $\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}\to 1\\ \dfrac{Lnx}{x}\to 0\end{cases}$

- حساب $f(x)$ : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$
- جدول التغيرات :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

| x | 0 | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f' | — | 0 | + |
| f | $+\infty$ ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ 1 |

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

ج)- حساب $f(\alpha)$

لدينا $g(\alpha)$ أي $-\alpha-1+\alpha Ln\alpha=0$ أي $Ln\alpha=\dfrac{\alpha+1}{\alpha}$

إذن $f(\alpha)=1-\dfrac{Ln\alpha}{\alpha+1}=1-\dfrac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{\alpha+1}=1-\dfrac{1}{\alpha}$

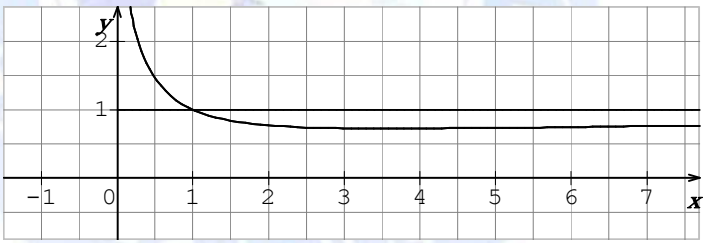
- حصر $f(\alpha)$ :

$3,59\le\alpha\le3,6$ معناه $3,59\le\alpha\le3,6$ أي $1-\dfrac{1}{3,59}\le1-\dfrac{1}{\alpha}\le1-\dfrac{1}{3,6}$

أي $0,721448...\le f(\alpha)\le0,722222....$ إذن $0,721\le f(\alpha)\le0,723$ .

د) إنشاء $(C)$

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=+\infty$ إذن $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$ .
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ إذن $(C)$ يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته $y=1$ .




## 4.

1 لنبين أن $(\beta_n)$ هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$$\beta_{n+1}=2-Ln(U_{n+1})=2-Ln\left(e\sqrt{U_n}\right)=2-\left[Lne+Ln(U_n)^{\frac{1}{2}}\right]=2-\left[1+\frac{1}{2}Ln(U_n)\right]$$

$$\beta_{n+1}=2-1-\frac{1}{2}Ln(U_n)=1-\frac{1}{2}Ln(U_n)=\frac{1}{2}[2-Ln(U_n)]=\frac{1}{2}\beta_n .$$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $\beta_{n+1} = \frac{1}{2}\beta_n$ إذن $(\beta_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\beta_0 = 2 - Ln(U_0) = 2 - Lne = 1$

2) لنحسب $\beta_n$ :

$(\beta_n)$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول 1 إذن $\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لنحسب $U_n$ :

$\beta_n = 2 - Ln(U_n)$ أي $Ln(U_n) = 2 - \beta_n$ أي $U_n = e^{2-\beta_n}$ أي $U_n = e^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

لنحسب نهاية $(U_n)$ : $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n) = e^2$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ .

3) لنحسب $S_n = \beta_0 + \beta_1 + ... + \beta_n$ :

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

لنعين $n$ حيث $S_n < 1,96$ :

$S_n < 1,96$ يكافئ $2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] < 1,96$ أي $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0,02$ أي

$$Ln\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > Ln0,02$$

يعني $(n+1)Ln\left(\frac{1}{2}\right) > Ln0,02$ أي $-(n+1)Ln2 > Ln0,02$ أي

$$n+1 < -\frac{Ln0,02}{Ln2}$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

أي $n < -1 - \frac{Ln0,02}{Ln2}$ أي $n < 4,643$ ، إذن الأعداد الطبيعية $n$ حيث $S_n < 1,96$ هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 و 4 .

.5

1. $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} \ln(x+2) = -\infty \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} (x+2) = 0 \end{cases}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ (x+2)\left(1 - \frac{\ln(x+2)}{x+2}\right)\right] = +\infty$

لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x+2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty \end{cases}$

3.من اجل كل $x$من $]-2;+\infty[$ لدينا $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$ أي $f'(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

إشارة $f'(x)$ على $]-2;+\infty[$ هي إشارة $x+2$.

جدول التغيرات $f$ :

| $x$ | -2 | | -1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

4. أ) حسب جدول التغيرات ، الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $[2;3]$.بما أن $f(2) = 2,61...$ و $f(3) = 3,39...$ و $f(x)$ تأخذ القيمة 3 في المجال $[2;3]$ فإن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ محصوراً بين 2 وَ 3 .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

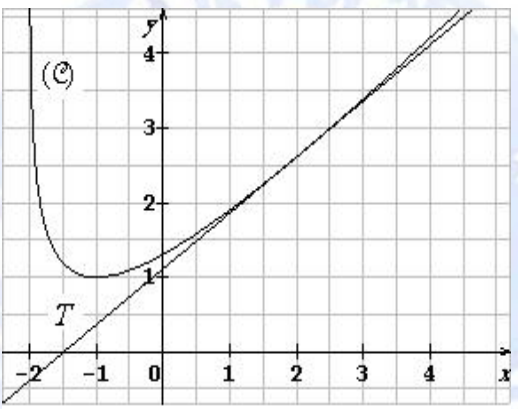
ب) باستعمال الحاسبة نلاحظ أن $f(2,50) = 2,99...$ (لاحظ $f(2,50) < 3$)

و $f(2,51) = 3,003...$ (لاحظ $f(2,51) > 3$) إذن $2,50 < \alpha < 2,51$.

5. معامل توجيه المماس $T$ للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة التي فاصلتها 2

هو $f'(2) = \frac{3}{4}$ إذن معادلته هي $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

أي $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} - \ln 4$




6.

1) تغيرات $f$

- مجموعة التعريف: $D_f = ]0;+\infty[$.
- النهايات: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (1+\ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x) = 0^+ \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = 0$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

- حساب الدالة المشتقة $f'$ :

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-(1+\ln x)}{x^2} \text{ أي } f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$$

- إشارة $f'$ : هي إشارة $-\ln x$ لأن المقام $x^2$ موجب تماما.

$f'(x)=0$ معناه $\ln x=0$ أي $x=1$

$f'(x)\geq 0$ معناه $-\ln x\geq 0$ أي $\ln x\leq 0$ أي $0<x\leq 1$

$f'(x)\leq 0$ معناه $-\ln x\leq 0$ أي $\ln x\geq 0$ أي $x\geq 1$

- جدول التغيرات

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

2)المستقيمات المقاربة

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$ إذن $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$ .
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=0$ .

3) تقاطع $(C)$ مع محور الفواصل

$(C)$ يقطع محور الفواصل في نقطة $M(x;y)$ معناه $\begin{cases}y=0\\ y=f(x)\end{cases}$.

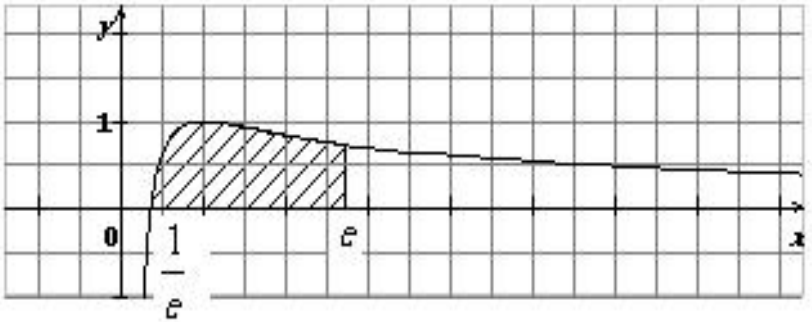
لنحل المعادلة $f(x)=0$ :

http://www.onefd.edu.dz

$f(x)=0$ معناه $\frac{1+\ln x}{x}=0$ أي $1+\ln x=0$ أي $\ln x=-1$

أي $\ln x=-\ln e$ أي $\ln x=\ln e^{-1}$ أي $x=e^{-1}$ أي $x=\frac{1}{e}$.

$(C)$ يقطع محور الفواصل في النقطة $A\left(\frac{1}{e};0\right)$.




4)حساب $S$

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1+\ln x}{x}dx=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}(1+\ln x)dx$$

تذكر أن مشتقة الدالة $\frac{1}{2}u^2$ هي الدالة $u'u$ إذن $\frac{1}{2}u^2$ هي دالة أصلية للدالة $u'u$.

نستنتج أنم $x\mapsto\frac{1}{2}(1+\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{x}(1+\ln x)$

على $]0;+\infty[$ و منه $S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}(1+\ln x)dx=\left[\frac{1}{2}(1+\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$

أي $S=\frac{1}{2}(1+\ln e)^2-\frac{1}{2}\left(1+\ln\frac{1}{e}\right)^2=\frac{1}{2}(1+1)^2-\frac{1}{2}(1-1)^2=2u.a$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

## VIII. تقويم ذاتي:

### أ. اختيار من متعدد

- تمنح نقطتان لكل جواب صحيح.
- تنقص نقطة واحدة بالنسبة لكل جواب خاطئ.
- لا تضاف و لا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة.

في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه، المطلوب الإجابة بصحيح أو خاطئ على تبرير الإجابات.

1) الحالة1: لتكن الدوال $f$ ، $g$ و $h$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بـ:

$$f(x)=\ln(x-2)\ ،\ g(x)=\ln(x^2+1)\quad h(x)=\frac{x}{\ln x}$$

أ) $f(x)$ و $g(x)$ لهما معنى من أجل كل عدد حقيقي $x$ .

ب) $h(x)$ لها معنى إذا كان $x>0$ .

جـ) $f(3)=0$ .

د) $h(e)=e$ .

هـ) من أجل كل $x>2$ : $\frac{f(x)}{g(x)}=\ln\frac{x-2}{x^2+1}$ .

2) الحالة2: تبسيط العبارات

أ) $\ln 2+\ln\frac{1}{2}-\ln e^{-2}=2$

ب) $\ln(3)^2+\ln 3-\ln\sqrt{3}=2\ln 3$

جـ) $\frac{\ln e^{-2}}{\ln e^{-1}}-\ln 2e=1-\ln 2$

د) $\ln 125-\ln 81-\ln\frac{3}{5}+2\ln\sqrt{243}=4\ln 5-\ln 3$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

هـ) $\ln\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^{142}\right]+\ln\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{142}\right]=0$

3) الحالة3: معادلات و متراجحات

أ) 2- هو الحل الوحيد للمعادلة $\ln(x+1)=\ln(2x+3)$.

ب) 1- هو الحل الوحيد للمعادلة $\ln(x+2)=0$.

جـ) $\ln\frac{x+1}{x-3}\geq 0$ تقبل كمجموعة حلول المجال $]3;+\infty[$.

د) $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$ تقبل $e^3$ كحل وحيد.

هـ) $1+\ln(2-x)\geq 0$ تقبل كمجموعة حلول $]-\infty;2[$.

4) الحالة4: $f$ دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\frac{2\ln x}{x}$

أ) $f$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)=x^2+2-2\ln x$.

ب) على $]0;+\infty[$ $g$ تقبل قيمة حدية صغرى تساوي3.

ج) $f$ متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

د) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا $\alpha$ حيث $\alpha\in]1;2[$

## ب. صحيح أم خاطئ

اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير الجواب

1) $x\ln(0,2)\geq 5$ معناه $x\geq\frac{5}{\ln(0,2)}$.

2) إذا كانت $f$ دالة معرفة و موجبة تماما على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x)=2x$ فإن الدالة $f$ ln متزايدة على $\mathbb{R}$.

3) المنحني الممثل للدالة $x\mapsto f(x)=\ln x$ يقبل مماسا معامل توجيهه3 عند النقطة $A\left(\frac{1}{3};-\ln 3\right)$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

4) $-4$ هو حل للمعادلة $\ln(4-x)-\ln(x+6)=\ln 6$ .

5) الدالة $f: x\mapsto \ln(-2x)$ متناقصة تماما على $]-\infty;0[$

6) إذا كانت الدالة $f$ معرفة على $]-\infty;1[$ بالشكل $f(x)=\ln(3-3x)$ فإن : $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$ .

7) إذا كانت الدالة $f$ قابلة للاشتقاق و سالبة تماما على مجال $D$ فإن $(\ln|f|)'=-\dfrac{f'}{f}$ .

8) الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بالشكل: $f(x)=\ln(x^2-1)$ متناقصة تماما على $]1;+\infty[$ .

9) المعادلة $\ln x^2=\ln(3x+4)$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ .

10) الدالة $F: x\mapsto \dfrac{1}{2}\ln(2x-1)$ المعرفة على $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ أصلية للدالة $f: x\mapsto \dfrac{1}{2x-1}$ .

11) إذا كانت $f(x)=x\ln x$ فإن $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}$ .

12) الدالة $F$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ: $F(x)=\ln x-1$ هي دالة أصلية للدالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ: $f(x)=\dfrac{1}{x}-x$ .

13) $Lnx=\int_1^x \dfrac{1}{t}\,dt$ .

14) الدالة $x\mapsto \ln(7x)$ المعرفة على $]0;+\infty[$ أصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ .

15) الدالة $F: x\mapsto \ln(x-1)$ المعرفة على $]-1;1[$ أصلية لـــ: $x\mapsto \dfrac{1}{x-1}$ .

16) العدد $\int_e^1 (Lnx)^2\,dt$ يعبر عن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني الذي يمثل الدّالة $x\mapsto x^3e^x$ و المستقيمات التي معادلاتها $x=-1$ ، $x=1$ و $y=0$ .

## أ. أجوبة اختيار من متعدد

**1) الحالة 1**

أ) خاطئ **لأن** $g$ لها معنى من أجل كل عدد حقيقي $x$ (لأن $x^2+1$ عدد موجب) و $g$ لها معنى من أجل $x>2$.

ب) خاطئ لأن $h$ ليس لها معنى من أجل $Lnx=0$ أي من أجل $x=1$

إذن $h$ لها معنى عندما $x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$.

ج) صحيح لأن $f(3)=Ln(3-2)=Ln1=0$.

د) صحيح لأن $h(e)=\dfrac{e}{Lne}=\dfrac{e}{1}=e$.

هـ) خاطئ لأن بصفة عامة: من أجل كل $a$ و $b$ من $]0;+\infty[$ لدينا $Ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=Ln(a)-Ln(b)$، يجب أن نميز عندئذ بين $Ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$ و $\dfrac{Ln(a)}{Ln(b)}$.

**2) الحالة 2**

أ) صحيح لأن $\ln 2+\ln\dfrac{1}{2}-\ln e^{-2}=\ln\left(2\times\dfrac{1}{2}\right)-(-2)\ln 2=\ln 1+2=0+2=2$.

ب) خاطئ لأن $\ln(3)^2+\ln 3-\ln\sqrt{3}=2\ln 3+\ln 3-\dfrac{1}{2}\ln 3=\dfrac{5}{2}\ln 2$.

ج) صحيح لأن $\dfrac{\ln e^{-2}}{\ln e^{-1}}-\ln 2e=\dfrac{-2\ln e}{-1\ln e}-(\ln e+\ln 2)=2-(1+\ln 2)=1-\ln 2$.

د) خاطئ لأن $\ln 125-\ln 81-\ln\dfrac{3}{5}+2\ln\sqrt{243}=\ln 5^3-\ln 3^3-\ln\dfrac{3}{5}+2\ln\sqrt{3^4}$

أي $\ln 125-\ln 81-\ln\dfrac{3}{5}+2\ln\sqrt{243}=3\ln 5-3\ln 3-(\ln 3-\ln 5)+2\ln 3^2$

أي $\ln 125-\ln 81-\ln\dfrac{3}{5}+2\ln\sqrt{243}=3\ln 5-3\ln 3-\ln 3+\ln 5+4\ln 3$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

أي $\ln 125 - \ln 81 - \ln\frac{3}{5} + 2\ln\sqrt{243} = 3\ln 5 - 3\ln 3 - \ln 3 + \ln 5 + 4\ln 3$

أي $\ln 125 - \ln 81 - \ln\frac{3}{5} + 2\ln\sqrt{243} = 4\ln 5$ .

هـ) صحيح لأن :

$$A = \ln\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^{142}\right] + \ln\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{142}\right]$$

$$= 142\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + 142\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

أي $A = 142\left[\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + \ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$

أي $A = 142\left[\ln\left[\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\right] = 142\ln(2-1) = 0$

أي $A = \ln\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^{142}\right] + \ln\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{142}\right] = 0$ .

3) الحالة3

أ) خاطئ لأن المعادلة المقترحة غير معرفة من أجل $x = -2$ .

ب) صحيح لأن $\ln(x+2) = 0$ معناه $x + 2 = 1$ أي $x = -1$ .

ج) صحيح لأن المتراجحة المقترحة معناها $\begin{cases} \frac{x+1}{x-3} > 0 \\ \ln\frac{x+1}{x-3} \geq 0 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} \frac{x+1}{x-3} > 0 \\ \frac{x+1}{x-3} \geq 1 \end{cases}$ وبالتالي $\frac{x+1}{x-3} \geq 1$ ومنه $\frac{x+1}{x-3} - 1 \geq 0$

أي $\frac{4}{x-3} \geq 0$ وأخيرا نجد $x > 3$

ومنه نستنتج أنّ $x \in ]3;+\infty[$ .

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة

د) خاطئ لأن المعادلة المقترحة معناها $\begin{cases} t^2-2t-3=0 \\ t=\ln x \end{cases}$ و عندما نحل المعادلة $t^2-2t-3=0$ نجد الحلين $t_1=-1$ ، $t_2=3$ إذن المعادلة المقترحة تقبل حلين هما $x_1$ و $x_2$ حيث $\ln x_1=-1$ و $\ln x_2=3$ أي $x_1=e^{-1}$ و $x_2=e^3$ .

هـ) خاطئ لأن المتراجحة المقترحة معناها $\ln(2-x)\geq -1$

أي $\ln(2-x)\geq \ln e^{-1}$ أي $\begin{cases} 2-x>0 \\ 2-x>e^{-1} \end{cases}$ أي $2-x>e^{-1}$ أي $x<2-e^{-1}$

أي $x\in ]-\infty;2-e^{-1}[$ .

4) الحالة4

أ) صحيح لأن $f'(x)=1+\dfrac{\frac{2}{x}x-2\ln x}{x^2}$

أي $f'(x)=\dfrac{x^2+2-2\ln x}{x^2}$

ومنه $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ .

ب) صحيح لأن $g'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}=\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{x}$

إذن: $g'(x)\leq 0$ من أجل $x\in ]0;1]$ أي $g$ متناقصة على $]0;1]$

$g'(x)\geq 0$ من أجل $x\in [1;+\infty[$ أي $g$ متزايدة على $[1;+\infty[$

و لدينا $g(1)=3$ .


جميع الحقوق محفوظة ©

ج) خاطئ لأن:

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | ‖ $+$ | $3$ | $+$ ↗ |
| $f'(x)$ | ‖ $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | ‖ ↗ | | ↗ |

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.

د) خاطئ لأن $0 \notin [f(1); f(2)]$ ( $f(1)=1$ و $f(2)=2+\ln 2$ ) رغم أن $f$ مستمرة على المجال $[1;2]$.

## ب. أجوبة صحيح أم خاطئ

- تمنح نقطتان لكل جواب صحيح.
- تنقص نقطة واحدة بالنسبة لكل جواب خاطئ.
- لا تضاف و لا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة.

1) خاطئ لأن $\ln(0,2)<0$ (لأن $0<0,2<1$)، لدينا عندئذ $x \le \dfrac{5}{\ln(0,2)}$.

2) خاطئ لأن $(\ln f)'=\dfrac{f'}{f}$ و $f'$ ليست موجبة على كل $\mathbb{R}$ إذن $(\ln f)'$ ليست موجبة على كل $\mathbb{R}$ إذن $\ln f$ ليست متزايدة على $\mathbb{R}$.

3) صحيح لأن المعادلة $f'(x)=3$ تقبل حلا ه و $x=\dfrac{1}{3}$ و $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\ln 3$.

4) خاطئ لأن $\ln(8)-\ln(-4+6)=\ln 8-\ln 2=\ln\dfrac{8}{2}=\ln 4$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

5) صحيح لأن $f'(x)=\dfrac{-2}{-2x}=\dfrac{1}{x}$ و من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}_-^*$ : $f'(x)<0$ .

6) صحيح لأن $f'(x)=\dfrac{-3}{3-3x}=\dfrac{-3}{-3(-1+x)}=\dfrac{1}{x-1}$ .

7) خاطئ لأن إذا كانت $f$ سالبة تماما على $D$ فإن $|f|=-f$ و منه

$(\ln|f|)'=[\ln(-f)]'=\dfrac{(-f)'}{(-f)}=\dfrac{-f'}{-f}=\dfrac{f'}{f}$ .

8) خاطئ لأن $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$ و من أجل كل $x$ من $]1;+\infty[$ لدينا

$2x>0$ و $x^2-1>0$ إذن $f'(x)>0$ .

9) صحيح لأن المعادلة المقترحة معناها

$$\begin{cases} x^2=3x+4 \\ x^2\neq 0 \\ 3x+4>0 \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} x^2-3x-4=0 \\ x\neq 0 \\ x>-\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} x^2-3x-4=0 \\ x\in\left]-\dfrac{4}{3};0\right[\cup]0;+\infty[ \end{cases}$$

و المعادلة $x^2-3x-4=0$ تقبل حلين في المجموعة

$\left]-\dfrac{4}{3};0\right[\cup]0;+\infty[$ ( هما $-1$ و $4$ ).

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

10) صحيح لأن $F'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{2x-1}=\frac{1}{2x-1}$.

11) خاطئ لأن $f'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$.

12) خاطئ لأن $F'(x)=\frac{1}{x}$.

13) صحيح لأن الدّالة $Ln$ هي الدالة الأصلية للدّالة مقلوب والتي تنعدم عند 1 . وهما شرطا تعريف الدالة $Ln$ .

14) صحيح لأن مشتقة الدّالة $x\mapsto Ln(7x)$ هي الدّالة مقلوب.

تذكر أن $(Lnu)'=\frac{u'}{u}$.

15) خاطئ لأن الدّالة $x\mapsto Ln(x-1)$ غير معرفة على $]-1;1[$.

- لاحظ أن $\frac{1}{x-1}=\frac{-1}{-x+1}$ و تذكر أن $(Lnu)'=\frac{u'}{u}$.

إذن الدالة $x\mapsto Ln(-x+1)$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{x-1}$ على المجال $]-1;1[$.

16) خاطئ لأن الدّالة $x\mapsto x^3e^x$ ليست موجبة على المجال $[-1;1]$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

## IX. استعد للبكالوريا:

**مسألة: (10 نقط)**

$f$ هي الدالة المعرفة على المجموعة $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ بالشكل:

$$f(x)=\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

نرمز بـ $(C)$ إلى التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) ادرس تغيرات $f$.

2) بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=\frac{x}{2}$ مقارب مائل للمنحني $(C)$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$. عين المستقيمات المقاربة أخرى لـ: $(C)$ و أنشئ المنحني $(C)$.

3) $g$ هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بالشكل

$g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x\ln x$.

بيّن أن $g$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto h(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ على $]0;+\infty[$.

4) احسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد للمنحني $(C)$ و المستقيمات التي معادلاتها $y=\frac{x}{2}$ ، $x=1$ و $x=4$.

5) $(u_n)$ هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ يختلف عن 0 و 1 بحدها العام $u_n=\frac{n}{2}+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. عين اتجاه تغير $(u_n)$.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

| | | | سلّم التنقيط |
|---|---|---|---|
| 1) | تغيرات $f$ | النهايات | 2 |
| | | حساب المشتقة | 0,5 |
| | | إشارة المشتقة | 0,5 |
| | | جدول التغيرات | 1 |
| 2) | المستقيمات المقاربة و إنشاء المنحني | المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{x}{2}$ | 1 |
| | | المستقيم ذو المعادلة $x=0$ | 0,5 |
| | | المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ | 0,5 |
| | | إنشاء المنحني | 1 |
| 3) | دالة أصلية | | 1 |
| 4) | حساب المساحة | $S=\int_1^4\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]dx$ | 0,5 |
| | | حساب $S=\left[h(x)\right]_1^4$ | 0,5 |
| 5) | اتجاه تغير المتتالية | | 1 |

## حل مفصل

1) تغيرات $f$ .

- مجموعة التعريف: $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ . $D_f=$
- النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}=-\infty\end{cases}$ أي $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}=-\infty\end{cases}$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

- لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty\end{cases}$$

- لأن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=-\infty$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\dfrac{x+1}{x}=0^{+}\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

- لأن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=+\infty$

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\dfrac{x+1}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\dfrac{2}{x}=0\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\dfrac{2}{x}=0\end{cases}$$

- حساب الدالة المشتقة $f'$:

من أجل كل $x$ من $D_f$: $f(x)=\dfrac{x}{2}+\ln(x+1)-\ln(x)$

و $f'(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}$ أي $f'(x)=\dfrac{x^2+x-2}{2x(x+1)}$

- إشارة $f'$: هي إشارة $x^2+x-2$ البسط لأن المقام $2x(x+1)$ موجب تماما من أجل كل $x$ من $D_f$.

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

- جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1-\ln 2$ | ↘ | ‖ | | ‖ | ↘ | $\frac{1}{2}+\ln 2$ | ↗ | $+\infty$ |

2)المستقيم المقارب المائل:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\dfrac{x}{2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{x}{2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=0 \end{cases}$$ إذن $(C)$ يقبل عند $-\infty$ و

عند $+\infty$ مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=\dfrac{x}{2}$ .

المستقيمات المقاربة الأخرى:

$\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow 0\\ >}} f(x)=+\infty$ إذن $(C)$ مستقيما مقاربا معادلته $x=0$ .

$\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow -1\\ <}} f(x)=-\infty$ إذن $(C)$ مستقيما مقاربا معادلته $x=-1$ .

3) دالة أصلية للدالة $h$ على $]0;+\infty[$ :

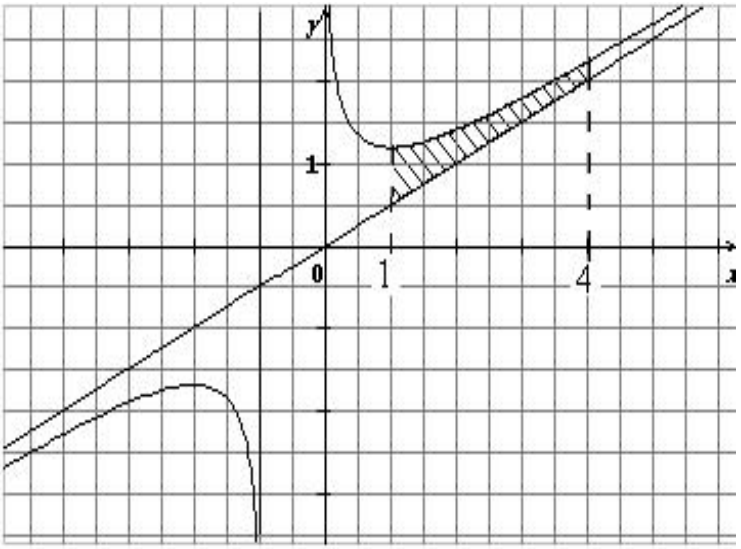
$$g'(x)=\ln(x+1)+(x+1)\frac{1}{(x+1)}-\left[\ln x+x\frac{1}{x}\right]$$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

أي $g'(x)=\ln(x+1)+1-\ln x-1$ أي $g'(x)=\ln(x+1)-\ln x$

أي $g'(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

لدينا من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $g'(x)=h(x)$ إذن $g$ دالة أصلية للدالة $h$ على $]0;+\infty[$.




4)حساب المساحة

$$S=\int_1^4\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]dx=\int_1^4\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx$$

إذن $S=\left[h(x)\right]_1^4$ ( انظر السؤال 3) )

و منه $S=h(4)-h(1)=5\ln 5-4\ln 4-2\ln 2=5\ln 5-10\ln 2$ $u.a$

5)لدينا $\begin{cases}u_n=f(n)\\ n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\end{cases}$ . بمأن $\begin{cases}u_n=f(n)\\ n\in\,]1;+\infty[\,\cap\,\mathbb{N}\end{cases}$ و

$f$ متزايدة تماما على $]1;+\infty[$ فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0;1\}}$ متزيدة تماما.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©